

Geometria fractal no ensino médio: uma revisão sistemática de abordagens pedagógicas e estratégias de aprendizagem

ARTIGO

Jairomar de Araújo Sobrinhoⁱ 

Universidade Federal do Tocantins, Palmas, TO, Brasil

Hellena Christiana Fernandes Apolinárioⁱⁱ 

Universidade Federal do Tocantins, Palmas, TO, Brasil

Resumo

Este estudo objetiva mapear e analisar pesquisas que propõem atividades didáticas voltadas à Geometria Fractal no ensino de Matemática, identificando metodologias, recursos e impactos no processo de aprendizagem. Por meio de uma revisão sistemática da literatura (RSL), foram selecionadas nove dissertações disponíveis nos periódicos da CAPES e no repositório do PROFMAT. Os resultados revelam crescente presença da Geometria Fractal no Ensino Médio, com uso frequente de softwares como o GeoGebra e materiais manipulativos, favorecendo a visualização e experimentação dos conceitos. Observa-se ainda a adoção de abordagens pedagógicas como o construtivismo e o interacionismo, que promovem a aprendizagem ativa. Conclui-se que a inserção da Geometria Fractal pode contribuir para a motivação e o engajamento dos estudantes, embora persistam desafios, como a integração com outras áreas do conhecimento e a inclusão do ensino de programação como ferramenta complementar.

Palavras-chave: Ensino Médio. Ensino-aprendizagem. Geometria Fractal. Matemática.

Fractal geometry in basic education: a systematic review of pedagogical approaches and learning strategies

Abstract

This study aims to map and analyze research that proposes didactic activities focused on Fractal Geometry in Mathematics education, identifying methodologies, resources used, and their impact on the learning process. Through a systematic literature review (SLR), nine dissertations were selected from CAPES journals and the PROFMAT repository. The results show a growing presence of Fractal Geometry in high school education, with frequent use of software such as GeoGebra and manipulative materials that enhance visualization and experimentation of fractal concepts. Pedagogical approaches such as constructivism and interactionism are also observed, promoting active student learning. It is concluded that the inclusion of Fractal Geometry can contribute to student motivation and engagement, although challenges remain, such as the need for greater integration with other areas of knowledge and the inclusion of programming education as a complementary tool.

Keywords: High School. Teaching-learning. Fractal Geometry. Mathematics.

1 Introdução

2

Ao longo dos anos, a educação matemática defrontou-se com desafios e oportunidades inerentes à evolução científica e tecnológica. A Geometria Fractal, formalizada por Benoît Mandelbrot na década de 1970, estuda padrões geométricos autorreferentes, caracterizados pela autossimilaridade em diferentes escalas e pela complexidade infinita gerada por regras iterativas simples. Essa abordagem matemática tem aplicações não apenas na Matemática, mas também em áreas como Física (estudo de sistemas caóticos), Biologia (modelagem de crescimento celular e padrões naturais), Geografia (análise de formações costeiras e bacias hidrográficas) e Ciência da Computação (compressão de imagens e algoritmos de geração procedural). Tais conexões interdisciplinares tornam os fractais uma ferramenta poderosa para a educação, permitindo projetos e atividades que exploram a modelagem matemática e a visualização digital. Trabalhos como os de Barbosa (2005) e Mossulin e Medeiros (2023) demonstram a viabilidade do uso da Geometria Fractal em atividades práticas na sala de aula, promovendo maior engajamento dos alunos por meio de recursos computacionais, como o *software* GeoGebra, e metodologias ativas baseadas na experimentação.

A despeito da geometria fractal se configurar como um campo relativamente novo, sua pertinência na educação tem experimentado um acentuado crescimento. Esta tendência é claramente refletida nos documentos curriculares oficiais, notadamente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que destaca os fractais como instrumentos basilares para a compreensão tanto das criações humanas quanto dos padrões naturais (Brasil, 2017).

A introdução da geometria fractal no arcabouço curricular educacional não se traduz apenas em uma inovação metodológica, mas também proporciona uma oportunidade de reestabelecer conexões dos estudantes com conceitos matemáticos por intermédio de aplicações práticas e contextuais. A exploração dos padrões fractais possibilita aos alunos aprofundar seu entendimento sobre os fenômenos complexos, desde manifestações

naturais, como nuvens e relevos montanhosos, até construções artificiais, exemplificadas por redes de infraestrutura urbana e sistemas computacionais.

Todavia, a inserção da geometria fractal no processo de ensino demanda uma abordagem pedagógica bem planejada e estruturada, considerando as diferentes possibilidades e estratégias de ensino. Embora essa abordagem tenha potencial para engajar os estudantes e ampliar sua compreensão matemática, sua eficácia depende de fatores como o perfil da turma, os interesses dos alunos e a mediação do professor. Dessa forma, estratégias didáticas baseadas na experimentação, modelagem matemática e uso de tecnologias podem favorecer a aprendizagem, mas não garantem, de maneira determinista, a assimilação do conteúdo por todos os estudantes.

Neste cenário, a presente revisão sistemática de literatura (RSL) procura promover um mapeamento de estudos que propugnam atividades didáticas voltadas à exploração da Geometria Fractal no ensino da Matemática. O escopo abarca a análise da literatura existente com o propósito de identificar práticas pedagógicas efetivas, avaliar os impactos no envolvimento e desempenho discente, bem como explorar as possíveis implicações para a formação matemática e cognitiva dos educandos.

Adicionalmente, esta revisão visa contextualizar a geometria fractal no seio do panorama mais abrangente da educação matemática contemporânea, realçando suas intersecções com outras áreas do conhecimento e delineando perspectivas promissoras para pesquisas vindouras. Por meio deste esforço, almeja-se contribuir substancialmente para o avanço do campo e para a promoção de uma abordagem educacional interdisciplinar e centrada no discente.

2 Metodologia

A finalidade desta RSL reside na apreensão e evidência da lógica subjacente a um conjunto particular de documentos, primando pela viabilidade de replicação das pesquisas no âmbito de uma comunidade acadêmica. Tal enfoque parte das colaborações

delineadas por Galvão e Ricarte (2019). O presente trabalho repousa sobre a base da revisão exaustiva de informações conexas a um tópico específico, com vistas à resolução de uma questão investigativa.

Seguindo a abordagem metodológica proposta por Mossulin e Medeiros (2023), esta RSL adotou um protocolo estruturado, que engloba os seguintes componentes:

- i) pergunta orientadora;
- ii) questões específicas de pesquisa;
- iii) desenvolvimento das *strings* de busca;
- iv) critérios para inclusão e exclusão;
- v) delimitação do escopo para a busca de documentos;
- vi) apresentação detalhada dos resultados;
- vii) uma análise subsequente.

No que se refere ao procedimento de elaboração desta RSL, a empreitada teve seu início com a escrutinação dos títulos, seguida pela apreciação dos resumos das pesquisas previamente selecionadas. Posteriormente, erigiu-se uma minuciosa averiguação dos trabalhos que ostentam alinhamento direto com os objetivos delineados para a investigação. Adicionalmente, é pertinente ressaltar que a restrição temporal se afigurou como um critério norteador, haja vista a necessidade de angariar informações concernentes a tópicos de proeminente relevância, florescidos nos últimos quinquênios.

Para rastrear as pesquisas relacionadas à Geometria Fractal e suas abordagens pedagógicas no âmbito do Ensino Médio, foram considerados os seguintes descritores: “Geometria Fractal” e “ensino e aprendizagem”. Ao conferir enfoque aos programas de pós-graduação *stricto sensu*, bem como a busca prospectiva de trabalhos redigidos em Língua Portuguesa, optou-se pelo “Portal de Periódicos da CAPES”, com acesso via CAFE, e pelo Repositório do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

A pesquisa considerou o intervalo temporal compreendido entre 2018 e 2023, o que culminou na identificação de um conjunto de oitenta estudos. Dentre estes, apenas as dissertações foram consideradas como pertinentes para o propósito deste artigo, visto que

o referido portal não propiciou resultados quanto aos estudos do período temporal em análise. Na Plataforma de Periódicos da CAPES, foram identificados quatro estudos relacionados à Geometria Fractal no ensino. No entanto, esses trabalhos foram descartados por não atenderem aos critérios de inclusão estabelecidos, como a ausência de foco no Ensino Médio, a falta de descrição de metodologias aplicadas ou por serem revisões teóricas sem propostas didáticas específicas. Por outro lado, no PROFMAT, uma busca preliminar albergou a identificação de 21 trabalhos correlacionados ao tema. Todavia, tão somente nove dentre esses foram considerados congruentes com os propósitos da presente pesquisa.

No Quadro 1, é apresentado o resumo das buscas realizadas nas bases de dados que foram consideradas naquele momento.

Quadro 1 – Resultado global da busca da RSL

Plataformas	Trabalhos encontrados sobre todos os temas	Trabalhos incluídos analisados na íntegra
CAPES	80	0
PROFMAT	21	9
Total	101	9

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Assim, por meio da análise dos resumos dos trabalhos em questão, foram identificados nove estudos, os quais ajudam a constituir as análises deste artigo. No Quadro 2, são detalhados os critérios de inclusão e exclusão adotados para os estudos previamente selecionados, conforme parte do protocolo.

Quadro 2 – Critérios de inclusão e exclusão

Critérios de Inclusão	Critérios de Exclusão
<ol style="list-style-type: none"> 1. Trabalhos completos sobre o tema desta pesquisa 2. Dissertações 3. Geometria fractal 4. Geometria fractal – ensino e aprendizagem 5. Geometria fractal – Educação básica 6. Trabalhos em português 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Trabalhos duplicados 2. Trabalhos em outras línguas 3. Trabalhos resumidos 4. Trabalhos excluídos por não indicar, no título, resumo ou palavras-chave, a relação com a abordagem de fractais na educação básica

Fonte: Elaborado pelos autores (2024).

No Quadro 3, estão listados os trabalhos escolhidos após a aplicação dos critérios de inclusão e exclusão, cada um identificado no formato "En", em que n é o número sequencial correspondente no quadro. São apresentados detalhes, como título, assunto e tipo de trabalho ("D" para dissertação, "T" para tese e "A" para artigo), nomes dos autores, ano de publicação e o repositório de origem.

Quadro 3 – Referências e resultado global da busca da RSL

ID	Título	Tipo	Ano	Autores	Site/ Repositório
E1	A Geometria Fractal para o Ensino de diversos tópicos de matemática no Ensino Médio	D	2022	Soraia Perez de Souza	PROFMAT – UNESP
E2	A geometria fractal no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de probabilidade geométrica	D	2021	Sandro Luiz Rosa Able	PROFMAT – UTFPR
E3	Modelagem matemática, geometria fractal e geogebra: proposta de atividades para ensinar conteúdos matemáticos do Ensino Médio	D	2021	Márcio André Santa Brígida Lima	PROFMAT – UFPA
E4	Geometria Fractal e atividades para o ensino de matemática: degraus fractais e esponja de menger	D	2020	Marcus Vinícius Oliveira Lopes da Silva	PROFMAT – UFBA

E5	A mobilização da Geometria Fractal como ferramenta para o estudo de probabilidade no ensino médio	D	2020	Diego de Oliveira Cosim	PROFMAT – UEMS
E6	Uma proposta de abordagem da Geometria Fractal na educação básica	D	2019	Marcelo Correia Lisboa	PROFMAT – UFT
E7	A Geometria Fractal e a contextualização de conteúdos no Ensino Fundamental: uma experiência em sala de aula	D	2019	Daniel Possetti	PROFMAT – UFMS
E8	A Geometria Fractal no ensino médio: teoria e prática da Geometria Fractal no ensino médio	D	2019	Sérgio Nóbrega de Oliveira	PROFMAT – UNIRIO
E9	Conhecendo a Geometria Fractal a partir de conceitos básicos da geometria euclidiana plana	D	2019	Marcos Antonio Lima	PROFMAT – UFSC

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

3 Resultados e Discussão

Com o intuito de embasar a análise presente desta RSL, delineou-se a seguinte pergunta norteadora: De que maneira a Geometria Fractal é objeto de abordagem no âmbito do Ensino Médio, com especial destaque às estratégias inerentes ao processo de ensino e aprendizagem? Para tanto, são propostos interrogativos enumerados no Quadro 4, denotados como “Qn”, em que “n” representa a numeração sequencial.

Quadro 4 – Questões de pesquisa

ID	Questão
Q1	Quais são os objetivos primordiais do estudo em análise?
Q2	De que maneira as atividades descritas no estudo foram elaboradas e conduzidas?
Q3	Quais os resultados alcançados?
Q4	Quais teorias pedagógicas são empregadas?
Q5	Quais aspectos do conhecimento matemático são explorados no estudo?

- Q6** Qual é o público-alvo identificado no estudo?
- Q7** Quais métodos foram utilizados no estudo para promover o ensino e a aprendizagem entre os alunos?
- Q8** Quais técnicas ou tecnologias foram empregadas para promover o ensino e a aprendizagem entre os alunos?

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

8

As questões Q7 e Q8 foram formuladas com base na análise da descrição fornecida na Q2, buscando obter uma compreensão mais detalhada dos métodos, técnicas e tecnologias utilizados nos estudos. O Quadro 5, conforme abordado na Q1, apresenta um mapeamento relacionado aos objetivos buscados nas pesquisas.

Quadro 5 – Objetivos primordiais analisados

Q1: Quais são os objetivos primordiais do estudo em análise?		
Cód.	Autores	Objetivos
E1	Soraia Perez de Souza	A proposta delineada visa a incorporação da Geometria Fractal como um agente motivador no ensino das grandezas geométricas euclidianas, nomeadamente, áreas e perímetros. Nesse mesmo horizonte, com a mira no enriquecimento do ensino da Matemática, vislumbra-se uma abordagem que, ao incorporar tecnologias, almeja catalisar o processo de aprendizagem. Delineia-se, ademais, a concepção e implementação de atividades concretizadas por meio da plataforma informática GeoGebra. Essas iniciativas pedagógicas desdobram-se no âmbito do Ensino Médio, com a finalidade premente de sondar e solidificar os conceitos matemáticos. Este objetivo abarca uma pluralidade de temáticas, tais como a Progressão Geométrica, Geometria, Trigonometria, Logaritmo e noções concernentes a limites, dentre outros assuntos relevantes.
E2	Sandro Luiz Rosa Able	O objetivo é mapear os trabalhos que abordam o tema da Probabilidade Geométrica, identificando suas abordagens, recursos utilizados e atividades propostas.
E3	Márcio André Santa Brígida Lima	Desenvolver e expor cinco atividades de Modelagem Matemática com desafios originados de fractais, investigadas por meio do GeoGebra, como sugestões para o ensino de conceitos matemáticos no Ensino Médio.
E4	Marcus Vinícius Oliveira Lopes da Silva	Desenvolver, de maneira direta e indireta, algumas noções da Geometria Fractal, onde todo o processo de construção dos modelos é claramente explicado por meio de figuras.

E5	Diego de Oliveira Cosim	Pesquisar como as ideias relacionadas à Geometria Fractal podem ser aplicadas no estudo de probabilidades no Ensino Médio.
E6	Marcelo Correia Lisboa	Uma proposição concernente à inserção da Geometria Fractal no âmbito da Educação Básica se delinea a partir da adoção de estratégias que amalgamam componentes fractais aos conteúdos matemáticos inerentes ao ciclo de ensino correspondente ao Ensino Médio. A intenção primordial consiste em instilar ou aprimorar determinadas concepções. O desiderato subjacente a esta iniciativa é a inserção dessa vertente geométrica de caráter inovador no contexto do Ensino Médio, endossando-o como um suporte ao processo pedagógico voltado aos conteúdos matemáticos. Dessa forma, perscruta-se que esta abordagem catalise a aquisição de conhecimento matemático, outorgando-lhe uma carga axiológica acrescida para os discentes.
E7	Daniel Possetti	A presente investigação almeja auscultar o influxo e a efetividade da incorporação da Geometria Fractal na contextualização de componentes curriculares pertinentes ao ensino do Ensino Médio. O desiderato primordial consiste em escrutinar de que maneira essa abordagem reverbera sobre a apreensão conceitual por parte dos educandos e favorece a consolidação das metodologias pedagógicas enredadas ao contexto do ambiente escolar.
E8	Sérgio Nóbrega de Oliveira	Apresentar uma proposição de atividades que se revelem como apoio em contextos usualmente permeados de complexidade quando submetidos aos métodos convencionais de instrução em ambiente educacional, além de discernirem-se do escopo da realidade. A mencionada proposição, por conseguinte, almeja evidenciar a ubiquidade dos fractais em distintos domínios, a saber, nas esferas científicas, culturais e tecnológicas, conferindo, assim, a possibilidade de uma introdução contextualizada acerca da Geometria Fractal no âmbito das vivências quotidianas dos discentes.
E9	Marcos Antonio Lima	Familiarizar-se com a Geometria Fractal a partir de conceitos fundamentais da Geometria Euclidiana Plana.

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Na questão Q1, constata-se que, nos trabalhos E1 e E4, a proposta consiste em familiarizar os alunos com a Geometria Fractal a partir de conceitos elementares da Geometria Euclidiana Plana, preconizando a adoção do tema das formas fractais como uma mola propulsora para a exploração e aplicação de conteúdos geométricos fundamentais.

Nos estudos E2, E6 e E8, os autores refletem acerca das características gerais dos fractais e seu grau de inserção em contextos tecnológicos. O escopo dessas investigações é incitar os alunos a perceberem a relevância do estudo dos fractais e, por meio da construção destes, identificarem os atributos e aplicações dos fractais no cotidiano.

No tocante aos estudos E3, E5 e E7, delineiam-se uma série de atividades voltadas para o ensino de probabilidade e progressões geométricas, valendo-se da construção de fractais no ambiente proporcionado pelo *software* GeoGebra.

No estudo E9, a abordagem se concentra em investigar como as concepções ligadas à Geometria Fractal podem ser efetivamente amalgamadas no ensino de probabilidades no âmbito do Ensino Médio. Além disso, há a sugestão de que se incorpore esta nova perspectiva geométrica ao currículo do Ensino Médio como um instrumento facilitador no processo de instrução de conceitos matemáticos, com a finalidade de robustecer a compreensão matemática e dotá-la de um viés mais significativo aos discentes.

Similarmente ao Quadro 5, o Quadro 6 apresenta uma descrição metodológica associada ao desenvolvimento das atividades (Q2), contemplando ainda uma coluna de autoria que viabiliza uma identificação mais precisa da pesquisa conduzida.

Quadro 6 – Descrição metodológica citada no estudo

Q2: De que maneira as atividades descritas no estudo foram elaboradas e conduzidas?		
ID	Autor	Descrição das Metodologias
E1	Soraia Perez de Souza	Submete-se à consideração a elaboração de atividades informáticas, destinadas ao cerne do ambiente de ensino correspondente ao ensino médio. Essas atividades ostentam a finalidade de escrutinar concepções matemáticas de diversa índole, abarcando, por conseguinte, Progressão Geométrica, Geometria, Trigonometria, Logaritmo, além de noções relacionadas a limites, entre outros tópicos.
E2	Sandro Luiz Rosa Able	A teoria dos três momentos pedagógicos de Delizoicov e Angotti (1990) é empregada como referência metodológica para a elaboração da sequência.

E3	Márcio André Santa Brígida Lima	Nesse contexto, o emprego do <i>software</i> GeoGebra ostentou o desiderato de catalisar a visualização e experimentação, redundando na elaboração de modelos matemáticos que espelham a geometria subjacente aos fractais. Nessa trajetória, procedeu-se à conceituação de alguns princípios matemáticos.
E4	Marcus Vinícius Oliveira Lopes da Silva	Atividades didáticas foram concebidas com o intuito de serem efetuadas no âmbito das aulas de matemática, abarcando o Ensino Médio. O processo teve início com a análise aprofundada da Geometria Fractal, contemplando seus preceitos históricos e conceituais. Posteriormente, foram minuciosamente exploradas as aplicações dessa geometria em outros domínios científicos, bem como em atividades voltadas ao ensino da matemática.
E5	Diego de Oliveira Cosim	A pesquisa foi conduzida em duas fases distintas: uma fase inicial de pesquisa bibliográfica e uma segunda fase de pesquisa de campo.
E6	Marcelo Correia Lisboa	Essa proposta implica na implementação de ações que incorporam elementos da Geometria Fractal em conteúdos matemáticos do ensino médio, com o objetivo de introduzir ou consolidar conceitos.
E7	Daniel Possetti	Para avaliar o potencial dessas atividades como recurso didático, conduziu-se uma pesquisa que envolveu a realização de atividades sobre Geometria Fractal com os alunos do nono ano do Ensino Fundamental em uma escola de Birigui-SP, no ano de 2018.
E8	Sérgio Nóbrega de Oliveira	Diversas fontes de pesquisa foram empregadas ao longo do trabalho, com destaque para o livro "Descobrindo a Geometria Fractal" do professor Ruy Madsen Barbosa, que serviu como a principal fonte de referência.
E9	Marcos Antonio Lima	Foi adotada uma abordagem intrínseca desses conceitos, incluindo alguns de seus axiomas, proporcionando, assim, um entendimento mais aprofundado para os alunos, especialmente os do ensino médio, na construção de fractais.

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

No Quadro 7, estão contidos os resultados obtidos que puderam ser identificados nos estudos. Observou-se que todos os textos configuram propostas de trabalho já implementadas, o que os torna aplicáveis ao objetivo da questão.

Quadro 7 – Principais metodologias e ferramentas citadas no estudo

Q3: Quais os resultados alcançados? Foram identificadas alternativas ou sugestões adicionais?

ID	Autor	Descrição das Metodologias e Ferramentas
E1	Soraia Perez de Souza	O <i>software</i> GeoGebra foi utilizado para elaborar atividades destinadas ao ambiente da sala de aula do ensino médio, com o intuito de promover o desenvolvimento de conceitos matemáticos.
E2	Sandro Luiz Rosa Able	A teoria dos Três Momentos Pedagógicos de Delizoicov e Angotti (1990) é empregada como ferramenta metodológica na elaboração da sequência. As atividades são concebidas levando em conta o uso de materiais didáticos manipuláveis para a construção dos fractais.
E3	Marcio Andre Santa Brigida Lima	Foi empregado o <i>software</i> GeoGebra para auxiliar na visualização e experimentação, resultando na obtenção de modelos matemáticos observados na geometria dos fractais.
E4	Marcus Vinícius Oliveira Lopes da Silva	Foram concebidas atividades didáticas com vistas à sua implementação em aulas de matemática, dirigidas ao ciclo final do Ensino Fundamental e ao ensino médio. Além disso, procedeu-se à análise histórica e conceitual da geometria em contextos interdisciplinares, com enfoque particular nas propriedades geométricas subjacentes às estruturas fractais.
E5	Diego de Oliveira Cosim	A investigação se desdobrou em duas etapas claramente delineadas: um prelúdio de pesquisa bibliográfica precedendo uma subsequente incursão no terreno da investigação empírica. Na fase preliminar, a exposição conceitual e a exemplificação da aplicabilidade da Geometria Fractal foram expostas meticulosamente, abordando, por conseguinte, as distintivas características de algumas tipologias de fractais regulares, em um esforço por discernir as propriedades peculiares inerentes à dimensão fractal. Na etapa subsequente, atividades concernentes à Geometria Fractal foram implementadas junto a uma turma constituída por 23 discentes do terceiro ano do Ensino Médio, com o desiderato de estabelecer cálculos pertinentes à probabilidade geométrica.
E6	Marcelo Correia Lisboa	Por meio de pesquisas bibliográficas e exploratórias, com base principalmente em obras de autores como Boyer (1996), Valente (1999), Pavanello (1993), Barbosa (2005), Janos (2008) e Smole e Diniz (2016), buscou-se traçar a trajetória histórica.
E7	Daniel Possetti	Elaborou-se uma pesquisa bibliográfica e realizaram-se atividades que abordaram a Geometria Fractal no contexto dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, no ano de 2018.
E8	Sérgio Nóbrega de Oliveira	O trabalho foi principalmente embasado no livro "Descobrimos a Geometria Fractal" do professor Ruy Madsen Barbosa, servindo como fonte de referência central.
E9	Marcos Antonio Lima	Explorar os conceitos iniciais da Geometria Fractal a partir dos fundamentos da Geometria Euclidiana Plana. A abordagem intrínseca desses conceitos foi realizada, incluindo a exploração de alguns de seus axiomas.

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Ao considerar os desdobramentos dos resultados obtidos na abordagem de Q3, é viável discernir uma plêiade de cenários distintos. Os trabalhos intitulados E1 e E9 são predominantemente voltados à revisão bibliográfica, ao passo que E5 e E7 empreenderam uma abordagem apoiada na utilização do *software* GeoGebra, almejando, assim, facilitar a visualização e experimentação, resultando na concretização de modelos matemáticos que capturam as essências da Geometria Fractal.

Por outro prisma, os estudos sob a designação E2 e E4 incorporaram o método de pesquisa de campo em sua metodologia, enquanto E6 adotou como instrumento metodológico para a conformação da sequência pedagógica a teoria dos Três Momentos Pedagógicos delineada por Delizoicov e Angotti (1990). De forma correlata, E8 baseou-se sobre investigações de natureza histórica e conceitual no âmbito da geometria, explorando suas conexões interdisciplinares. A indagação sobre as estruturas fractais foi sistematicamente examinada, com um destaque notório para a fonte primordial E3, dentre outras fontes referenciadas. Não obstante, merece destaque a adoção da obra “Descobrimos a Geometria Fractal”, de Ruy Madsen Barbosa, como uma fonte primordial nesse processo de análise e construção conceitual.

Quadro 8 – Teorias Pedagógicas

Q4: Quais teorias pedagógicas são empregadas?

ID	Teoria Pedagógica	Descrição
E3	Aprendizagem Centrada na Pessoa (Carl Rogers)	A proposta pedagógica prioriza o papel do docente como facilitador da jornada educacional, em vez de mero transmissor do conhecimento. Nesse novo paradigma, o professor atua como mentor, orientando os alunos na compreensão da vida como um processo de constante transformação. Assim, estimula-se a iniciativa do educando em explorar seu próprio acervo cognitivo, reconhecendo sua contínua evolução como indivíduo (Rogers, 1969).
E1, E8	Sociointeracionismo (Vygotsky)	O desenvolvimento e a aquisição do conhecimento pelo indivíduo ocorrem por meio de suas interações com seus pares. Assim, o progresso psicológico transita do domínio interpsicológico, relacionado às relações interpessoais, para o âmbito intrapsicológico, referindo-se ao processo internalizado na esfera mental do sujeito (Vygotsky, 1984).

E4	Construcionismo (Papert)	O método de instrução proposto visa atingir o ápice da aprendizagem com a mínima interferência no processo educativo. Sua base teórica fundamenta-se na premissa de que as crianças florescem de maneira mais eficaz ao desvelarem, por si próprias, o conhecimento particular que lhes é imprescindível, como preconizado por Papert (2008).
E2, E5	Construtivismo (Piaget)	A proposta fomenta o engajamento ativo do discente em seu próprio itinerário educacional por meio de metodologias que abrangem a experimentação, a investigação coletiva, o estímulo ao questionamento e o aprimoramento do pensamento lógico, entre outras abordagens (Piaget, 1973).
E6	Teoria dos Três Momentos Pedagógicos (Delizoicov e Angotti)	Inicia-se com a problematização, seguida pela organização e aplicação do conhecimento (Delizoicov e Angotti, 1990).
E9	Teoria dos registros representação semiótica (Raymond Duval)	Sustenta que os registros externos representam uma ferramenta para facilitar a construção da aprendizagem (Durval, 1993).
E7	Teoria de Van Hiele	O modelo propõe que os alunos progridam através de uma sequência de níveis de compreensão de conceitos à medida que desenvolvem suas habilidades em geometria (Van Hiele, 1986).

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

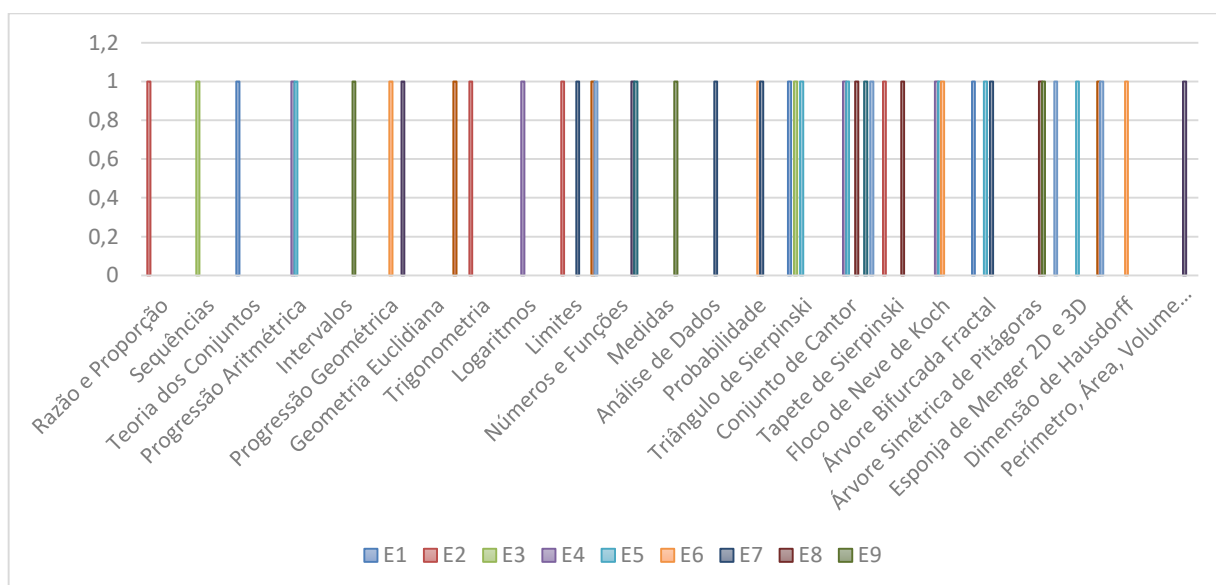
A problemática Q4 suscita a análise das bases teóricas pedagógicas subjacentes nas pesquisas objeto de escrutínio. Constata-se que o estudo E3 se alicerça na doutrina da Aprendizagem Centrada na Pessoa, advinda da perspectiva de Carl Rogers. Por sua vez, E1 e E8 encontram seu alicerce na corrente do Sociointeracionismo, conforme delineado por Vygotsky. Emerge o Construtivismo, consoante as premissas delineadas por Papert, no estudo E4. Nos trabalhos E2, E5 e E7, perfila-se a proposição de uma participação ativa dos discentes em seu próprio percurso educacional, enveredando pelas trilhas da experimentação, da pesquisa coletiva, do estímulo à dúvida e do desenvolvimento do raciocínio, reflexo da abordagem construtivista de Piaget.

O estudo E6 se embrenha na exploração da Teoria dos Três Momentos Pedagógicos, concebida por Delizoicov e Angotti (1990), ao passo que o E9 abraça a abordagem da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, concebida por Raymond Duval.

O Gráfico 1 apresenta a distribuição dos conteúdos matemáticos relacionados à Geometria Fractal nos estudos analisados. Trata-se de um gráfico de barras, no qual o eixo x representa os diferentes conteúdos abordados, e o eixo y indica a frequência com que esses conteúdos aparecem nas pesquisas. Observa-se que o conjunto de Cantor é o fractal mais recorrente, citado em cinco ocasiões, seguido pelo triângulo de Sierpinski, presente em quatro estudos. Outros fractais, como a árvore bifurcada, árvore pitagórica, floco de neve de Koch e esponja de Menger, aparecem em pelo menos três instâncias cada.

Além dos fractais, conceitos matemáticos complementares também foram identificados. A progressão geométrica é mencionada em seis estudos, limites aparecem quatro vezes e probabilidade em duas ocasiões. A dimensão Hausdorff e os cálculos de perímetro, área e volume fractal são citados ao menos uma vez cada. Esse panorama sugere que, embora os estudos sobre Geometria Fractal priorizem certos fractais específicos, há também um esforço em conectar esses elementos a conteúdos matemáticos fundamentais.

Gráfico 1 – Conteúdos matemáticos abordados nos estudos

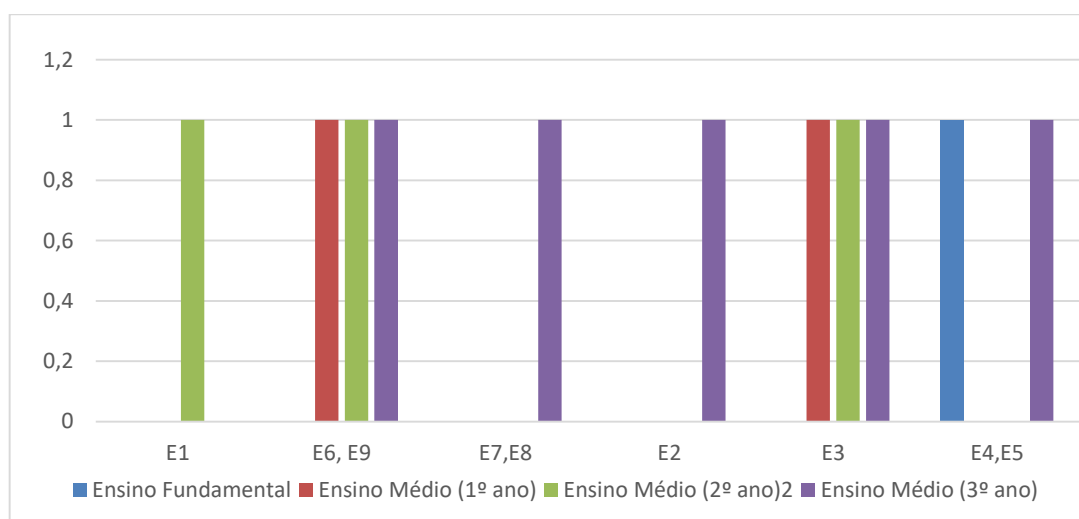


Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

A inquirição Q5 converge sua atenção para os conteúdos de natureza matemática que permeiam as investigações, com foco nas atividades ligadas à Geometria Fractal que se inserem no âmbito do currículo pedagógico. No que se refere ao público-alvo, o escrutínio em análise é ilustrado de forma sumarizada no Gráfico 2, o qual revela que, dentre os nove estudos escrutinados, apenas um se dedica aos elementos abordados no ciclo educacional denominado Ensino Fundamental. Por conseguinte, os demais oito trabalhos voltam-se à instrução de discentes matriculados no ciclo subsequente, a saber, o Ensino Médio.

O Gráfico 2 utiliza um gráfico de setores para representar a distribuição do público-alvo dos estudos analisados. No eixo percentual, observa-se que apenas um dos nove estudos se concentra no Ensino Fundamental, enquanto os outros oito se dedicam ao Ensino Médio. Entre esses, o estudo E4 é o único que explora diretamente o contexto do Ensino Fundamental II.

Gráfico 2 – Público-alvo dos estudos



Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

No Ensino Médio, os estudos se dividem conforme a série dos estudantes. As pesquisas E6, E9 e E3 abrangem alunos do primeiro, segundo e terceiro anos, respectivamente, enquanto E7, E8, E2 e E5 focalizam exclusivamente estudantes do terceiro ano. Esse dado sugere uma predominância de investigações voltadas para alunos em fases mais avançadas da escolarização, possivelmente devido à complexidade dos conceitos associados à Geometria Fractal.

Na demanda Q6, delinea-se o perfil da audiência objeto de estudo nas pesquisas em questão. Somente o estudo E4 dirigiu sua atenção diretamente ao contexto do Ensino Fundamental II, ao passo que as demais pesquisas se direcionaram ao âmbito do Ensino Médio. Neste particular, destaca-se que as pesquisas E6, E9 e E3 abrangeram os alunos do primeiro, segundo e terceiro anos do Ensino Médio, ao passo que as pesquisas E7, E8, E2 e E5 se restringiram aos estudantes do último ano.

No que se refere à descrição da metodologia adotada nos trabalhos examinados, o Quadro 7 evidencia que em cinco deles, constatou-se a aplicação de oficinas tanto teóricas quanto práticas. Entretanto, nos demais quatro estudos, prevaleceu a implementação de proposições de oficinas ainda não concretizadas.

Quadro 9 – Métodos utilizados no estudo

Q7: Quais métodos foram utilizados no estudo para promover o ensino e a aprendizagem entre os alunos?	
Estudos	Tipo de trabalho
E2, E3, E5 e E7	Oficinas teóricas e práticas
E1, E4, E6, E8 e E9	Desenvolvimento de propostas de oficinas práticas não executadas.

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

No Quadro 9, assim como no Quadro 8, são expostos pormenores acerca das técnicas e tecnologias adotadas nos estudos, tal como delimitado na questão Q2 e evidenciado na questão Q8. É notável, neste quadro, a incorporação de uma variedade de recursos didáticos, englobando não apenas materiais manipulativos, mas também a

aplicação do *software* GeoGebra, que favorece o estabelecimento das relações geométricas.

Quadro 10 – Quanto às técnicas/tecnologias utilizadas no estudo

Q8: Quais técnicas ou tecnologias foram empregadas para promover o ensino e a aprendizagem entre os alunos?

Estudos	Técnicas/Tecnologias utilizadas
E3	Réguas e compasso
E2, E4 e E8	Materiais manipuláveis
E7	Origami
E5 e E7	Cartões
E4 e E6	Bricolagem
E3, E5 e E7	<i>Software</i> (GeoGebra)
E5 e E7	Fotografia

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Em cinco dos nove estudos, foram concebidas oficinas realizadas durante o turno regular ou complementar dos estudantes, com o emprego do *software* GeoGebra em três deles (E3, E5 e E7). Além disso, vários desses estudos incorporaram a utilização de materiais manipulativos e a aplicação da bricolagem como parte de suas metodologias.

Dentre os nove estudos submetidos à análise, todos se caracterizavam como dissertações disponibilizadas no repositório do PROFMAT, uma vez que não foi possível identificar dissertações correspondentes ao período estudado no Portal de Periódicos da CAPES. A partir dos desdobramentos apresentados nas pesquisas, evidencia-se a eficácia da utilização da Geometria Fractal em sua função, promovendo a exploração de sua relação com a geometria euclidiana e outros elementos matemáticos. Conforme Mossulin e Medeiros (2023), a investigação dos fractais capacita os estudantes a alcançarem uma esfera superior de motivação, além de apurar a percepção estética. Entretanto, é relevante ressaltar que certos conceitos mais abstratos, como a dimensão fractal, demandam um período de intervenção mais extenso e podem requerer uma base sólida em matemática, o que varia conforme os distintos níveis de escolaridade.

Emerge a possibilidade de notar que a utilização de uma ampla gama de conteúdos matemáticos pode desempenhar um papel facilitador no processo de instrução-aprendizagem em relação à Geometria Fractal, notadamente por sua consonância com as competências e habilidades matemáticas preconizadas pela BNCC. Os autores examinados demonstraram um zelo particular na integração de teorias pedagógicas em suas abordagens, englobando correntes como o construtivismo e o interacionismo, bem como a teoria de Rogers (1969), que enfatiza a aprendizagem centrada no estudante, e a teoria dos registros de representação semiótica, desenvolvida por Duval (1993).

Devido à facilidade intrínseca à abordagem da Geometria Fractal, é possível verificar uma preferência notável por fractais como o conjunto de Cantor e o Triângulo de Sierpinski, além da curva de Peano e a curva de Hilbert, entre outros. Vale ressaltar a crescente utilização de recursos tecnológicos, notadamente o *software* GeoGebra, em conjunto com materiais manipulativos e elementos relacionados à bricolagem. Não obstante, subsiste um vasto leque de possibilidades a ser explorado no contexto deste tema, incluindo a aplicação de aplicativos e jogos, bem como a programação mediante ferramentas como o Scratch e a construção de fractais em ambientes destinados ao processo de ensino e aprendizagem.

4 Considerações finais

A presente revisão sistemática permitiu mapear diversas abordagens pedagógicas que exploram a Geometria Fractal no Ensino Médio, destacando sua relevância para o ensino da Matemática. Os estudos analisados demonstraram que o uso de metodologias ativas, especialmente aquelas que incorporam recursos tecnológicos como o GeoGebra, potencializa a visualização e compreensão dos conceitos fractais, tornando o aprendizado mais dinâmico e acessível.

Apesar do avanço no uso de ferramentas computacionais, identificou-se uma lacuna no que se refere à integração do ensino de programação no contexto da Geometria Fractal. Poucos trabalhos analisados propuseram atividades que envolvam

linguagem de programação para a modelagem fractal, o que sugere uma oportunidade para pesquisas futuras. O uso de ambientes como Scratch e Python pode oferecer novas possibilidades para que os alunos explorem a criação e manipulação de fractais de maneira interativa e investigativa.

Além disso, a interdisciplinaridade se mostrou um aspecto relevante, visto que a Geometria Fractal possui aplicações em diversas áreas do conhecimento. No entanto, a maioria dos estudos analisados ainda se restringe à Matemática, o que reforça a necessidade de mais investigações que promovam conexões com disciplinas como Física, Biologia e Ciências da Computação.

Por fim, conclui-se que a inserção da Geometria Fractal no Ensino Médio apresenta um grande potencial para enriquecer o ensino da Matemática, desde que acompanhada de estratégias bem planejadas e adaptadas à realidade dos alunos. Futuros estudos podem aprofundar a investigação sobre novas metodologias, a formação docente e o impacto do ensino de programação como um recurso complementar na aprendizagem dos fractais.

Referências

ABLE, Sandro Luiz Rosa. **A geometria fractal no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de probabilidade geométrica**. Dissertação (mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Pato Branco, 2021. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/proformat_tcc.php?id1=6353&id2=171054167. Acesso em 22 de fev. 2024.

ALVES, Renata Lopes; BARRÉRE, Eduardo. Geometria Fractal em Sala de Aula: Uma Revisão Sistemática Envolvendo a Taxonomia de Bloom. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 36, p. 1-20, 2021. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/13049/10043>. Acesso em 18 de fev. 2024.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3ª. Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). **Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no contexto escolar**: possibilidades. Disponível em:

<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/193-tecnologias-digitais-da-informacao-e-comunicacao-no-contexto-escolar-possibilidades>. Acesso em: 15 jan. 2024.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Diário Oficial da União: Brasília: MEC/CEF, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 15 jan. 2024.

COSIM, Diego de Oliveira. **A mobilização da Geometria Fractal como ferramenta para o estudo de probabilidade no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), Nova Andradina, 2020. Disponível em: https://sca.profmatsbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5353&id2=170340443. Acesso em 20 de fev. 2024.

DELIZOICOV, Demétrio; ANGOTTI, José André. **Física**. São Paulo: Cortez. 1990.

DURVAL, Raymond. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 5, p. 35-65, 1993.

GALVÃO, Maria Cristiane Barbosa; RICARTE, Ivan Luiz Marques. Revisão Sistemática da Literatura: Conceituação, Produção e Publicação. **Revista Logeion: Filosofia da Informação**, v. 6, n. 1, p. 57-73, 2019. Disponível em: <https://revista.ibict.br/fiinf/article/view/4835>. Acesso em 15 de jan. 2024.

JANOS, Michel. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

LIMA, Marcos Antonio. **Conhecendo a Geometria Fractal a partir de conceitos básicos da Geometria Euclidiana Plana**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Florianópolis, 2019. Disponível em: https://sca.profmatsbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=4572&id2=170660073. Acesso em 22 de fev. 2024.

LIMA, Márcio André Santa Brígida. **Modelagem Matemática, Geometria Fractal e Geogebra**: proposta de atividades para ensinar conteúdos matemáticos do Ensino Médio. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Pará (UFPA), Campus Universitário de Castanhal, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Castanhal, 2021. Disponível em: https://sca.profmatsbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6018&id2=171052184. Acesso em 18 de fev. 2024.

LISBOA, Marcelo Correia. **Uma proposta de abordagem da Geometria Fractal na Educação Básica**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Tocantins (UFT),

Câmpus Universitário de Arraias - TO. Arraias, 2019. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5091&id2=171052386. Acesso em 24 de fev. 2024.

MOSSULIN, Ângela Vieira Leonel; MEDEIROS, Luciano Frontino de. O ensino de Geometria Fractal na Educação Básica: uma revisão sistemática de literatura. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 9, n. 2, p. e2004, 2023. Disponível em: <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/6397?articlesBySimilarityPage=18>. Acesso em: 14 jan. 2024.

OLIVEIRA, Sérgio Nóbrega de. **A Geometria Fractal no Ensino Médio**: teoria e prática da Geometria Fractal no Ensino Médio. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UNIRIO), Centro de Ciências Exatas e Tecnologia (CCET), Rio de Janeiro, 2019. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5022&id2=170480466. Acesso em 20 de fev. 2024.

PAPERT, Seymour. **Desafío a la mente**: Computadoras y educación. Buenos Aires: Ediciones Manantial, 2008.

PIAGET, Jean. Para onde vai a educação? 2. ed. Rio de Janeiro: José Olympio, 1973.

POSSETTI, Daniel. **A Geometria Fractal e a contextualização de conteúdos no Ensino Fundamental**: uma experiência em sala de aula. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Câmpus Universitário de Três Lagoas - MS. Três Lagoas, 2019. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5007&id2=171052019. Acesso em 22 de fev. 2024.

ROGERS, C. R. **Freedom to learn**. Columbus: Merrill, 1969.

SILVA, Marcus Vinícius Oliveira Lopes da. **Geometria Fractal e atividades para o ensino de matemática**: Degraus Fractais e Esponja de Menger. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal da Bahia (UFBA), Instituto de Matemática e Estatística, Salvador, 2020. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5716&id2=170132417. Acesso em 20 de fev. 2024.

SOUZA, Soraia Perez de. **A geometria fractal para o ensino de diversos tópicos de matemática no Ensino Médio**. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2022. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6465&id2=171055607. Acesso em 21 de fev. 2024.

VAN HIELE, Pierre M. **Structure and Insight**: A Theory of Mathematics Education. Orlando: Academic Press, 1986.

VYGOTSKY, Lev S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

ⁱ **Jairomar de Araújo Sobrinho**, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8869-6027>

Universidade Federal do Tocantins

Mestre em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Presidente do Conselho Municipal de Educação de Couto Magalhães - TO. Professor efetivo da rede municipal na cidade de Couto Magalhães – TO.

Contribuição de autoria: Produção do texto.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1118987823504258>

E-mail: jairomar.sobrinho@mail.uft.edu.br

ⁱⁱ **Hellena Christiana Fernandes Apolinário**, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9062-6610>

Universidade Federal do Tocantins

Doutora em Engenharia de Sistemas e Computação pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (2014). Professora, classe Associado I, no curso de bacharelado em Ciência da Computação da Universidade Federal do Tocantins - UFT.

Contribuição de autoria: Produção do texto.

Lattes: <http://lattes.cnpq.br/0293006338379694>

E-mail: hellena@mail.uft.edu.br

Editora responsável: Genifer Andrade

Especialista *ad hoc*: Jurema Lindote Botelho Peixoto e Vanusa Nascimento Sabino Neves.

Como citar este artigo (ABNT):

SOBRINHO, Jairomar de Araújo.; APOLINÁRIO, Hellena Christiana Fernandes. Geometria fractal no Ensino Médio: uma revisão sistemática de abordagens pedagógicas e estratégias de aprendizagem. **Rev. Pemo**, Fortaleza, v. 7, e14600, 2025. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/revpemo/article/view/14600>

Recebido em 7 de dezembro de 2024.

Aceito em 7 de março de 2025.

Publicado em 21 de julho de 2025.