

STUART MILL: O EMPIRISMO E O PROBLEMA PARA FUNDAMENTAÇÃO DA MATEMÁTICA

STUART MILL: IL PROBLEMA DELL'EMPIRISMO PER LA FONDATEZZA DELLA MATEMATICA

Antonio Marcos FRANCISCO

Doutorando em Educação na UFSCar (Universidade Federal de São Carlos) Professor no Curso de Pedagogia da Universidade do Estado de Minas Gerais (UEMG) - Campus Poços de Caldas e Professor (PEB3A) da Secretaria Estadual de Educação de Minas Gerais.
E-mail: antonio.marcos@uemg.br

RESUMO

Este artigo analisa a teoria empirista de Stuart Mill na obra *A System of Logic – Ratiocinative and Inductive*, com o objetivo de discutir a fundamentação do conceito de número. O método indutivo de Mill tem como escopo fundamentar todos os processos sensoriais de abstração das ciências empíricas em perfeita conformidade com fatos ocorridos no mundo real para validação dos juízos, isso vale também para proposições lógicas e os objetos de investigação da matemática: os números. Assim, este artigo pretende se ocupar das concepções empiristas de Mill e das refutações apresentadas a elas por Frege em sua filosofia da matemática, a fim de expor as tensões entre os dois pensadores do século XIX.

PALAVRAS-CHAVE

Stuart Mill, Frege, empirismo, lógica, matemática.

RIASSUNTO

Questo articolo propone un'analisi della teoria empirista di Stuart Mill nell'opera *A System of Logic – Ratiocinative and Inductive*, per discutere il fondamento del concetto di numero. Il metodo induttivo di Mill mira a basare tutti i processi di astrazione sensoriale delle scienze empiriche in perfetta conformità con fatti accaduti nel mondo reale per la convalida dei giudizi, la stessa teoria deve fondare le proposizioni logiche e gli oggetti di indagine della matematica: i numeri. Dunque, per esporre le tensioni tra i due pensatori del XIX secolo, questo articolo mira a discutere la teoria empirista di Mill e le obiezioni che Frege le presenta nella sua filosofia della matematica.

PAROLE CHIAVE

Stuart Mill, Frege, empirismo, logica, matematica.

INTRODUÇÃO

As teorias epistemológicas são aprofundadas ou contestadas teoricamente com o decorrer da história, assim, para a escrita deste artigo serão considerado dois pensadores do século XIX, Stuart Mill e Gottlob Frege, com teorias que apresentam diferentes concepções de investigação do

conhecimento e da verdade. Stuart Mill na introdução de seu escrito lógico, *A System of Logic – Ratiocinative and Inductive*, defende, para todos os juízos lógicos, que somente através da indução atingimos uma conclusão válida, conseqüentemente, a partir deste exame de percepções e inferências, busca uma ciência que funda a validação dos pensamentos nas observações dos fatos físicos, ou seja, uma perfeita conformidade entre a teoria (pensamento) e o fenômeno (fato). As leis lógicas apresentadas nos escritos de Mill se alicerçam principalmente em suas discussões na obra *A System of Logic*, dividido em seis livros, mas de modo não muito aprofundado, apenas os quatro primeiros serão considerados, já que os últimos visam a aplicação das leis lógicas a leis morais. Em seu primeiro livro, discute a referência dos nomes, o sentido das proposições e os estados da consciência; no Livro II, preocupa-se principalmente com descrições do raciocínio: inferência e deduções. Em seguida, no Livro III, apresenta a descrição do processo indutivo; no Livro IV, a linguagem é compreendida como um dos processos auxiliares da indução e como um instrumento de comunicação que possibilita a partilha do conhecimento científico. Assim, discutiremos os argumentos de Mill sobre esses temas – sua tese de que os fenômenos são tudo o que conhecemos sensitivamente e seus requisitos de uma linguagem como auxiliar desse processo mental.

Frege, no entanto, com seu programa logicista, investiga uma epistemologia que fundamente as ciências formais, se distanciando e refutando tentativas de associar a matemática a qualquer estrutura da realidade. Sua crítica ao empirismo expõe a compreensão nebulosa milliana caracterizada de modo específico nas fundamentações do conceito de número através do método indutivo. As investigações de Frege, ao contrário de Mill, não se preocupam com as representações mentais dos objetos empíricos, mas com um sistema formal.

A hipótese é que essas questões defendidas no empirismo de Stuart Mill apresentam algumas implicações não só para as concepções matemáticas, principalmente de Gottlob Frege, mas também para teorias lógicas e semânticas. As críticas de Frege, em seu artigo *Die Grundlagen der Arithmetik*, às teses lógicas e matemáticas de Mill, são bastante opositivas e até mesmo irônicas. No entanto, também é possível encontrar elementos embrionários nos trabalhos de Mill que servirão de base para o desenvolvimento da teoria semântica de Frege. O principal elemento, são os conceitos *denotação* e *conotação* na teoria semântica de Mill, postos em relação paralela com a teoria semântica fregeana da distinção entre *sentido* e *referência*, que será apenas citada e sem análises mais aprofundadas sobre o tema. Portanto, o objetivo é expor o empirismo de Mill e como ele pode ser um problema para os matemáticos do século XIX.

STUART MILL: A LÓGICA COMO CIÊNCIA E COMO ARTE DO RACIOCÍNIO

“Mill é um nominalista no sentido contemporâneo: pois rejeita entidades abstratas”.

(Skorupski, 2006, p. 50).

A tentativa de Stuart Mill de estabelecer uma relação da lógica com os fatos físicos surge com a intenção de retirá-la totalmente do campo da arte e rejeitar entidades puramente abstratas. Influenciado possivelmente pelas afirmações de Richard Whately (1853, § 1, p. 01.), citado por Stuart Mill (1981, Livro I, § 2) como o pensador que analisa a lógica como arte, mas que deve ser acompanhada também de uma definição científica – “A lógica, no sentido mais amplo e aconselhável que foram pensados empregar o nome, pode ser considerada como a Ciência e como a Arte do raciocínio”. Assim descrita, foi uma motivação, para Mill, em suas investigações lógicas, já que seus fundamentos se estruturam em inquirições empíricas para organização e validação das premissas das proposições.

Mill encontra no método empírico a possibilidade de fundamentar a lógica e a matemática como áreas de conhecimento *a posteriori*, diferentemente de Kant, a fim de torná-las uma área de conceituação e fundamentação totalmente perceptiva, ou seja, um método empírico aplicável a qualquer área de conhecimento. Assim, proposições lógicas e matemáticas sempre se relacionam a entidades concretas e, conseqüentemente, pertencem ao campo de investigação baseado na experiência de fatos ou acontecimentos reais. Portanto, a partir do empirismo, Mill encontra o terreno fértil para definir a lógica não apenas como a *arte* do raciocínio¹, mas também como a ciência que prescreve ou determina as regras de inferência de fatos perceptíveis. A lógica, nesse sentido – fundada em seu modelo epistemológico – descreve ou apresenta o sistema desses procedimentos mentais, assim, Mill a classifica como *arte*, pois prescreve as leis lógicas; e como *ciência*, uma vez que descreve como ocorre as relações entre os fenômenos ou objetos que geram as abstrações mentais através das percepções sensoriais. A lógica não é diferente de todas as outras

¹ Mill se refere, na introdução do Livro I, ao termo usado por filósofos gregos clássicos associado à retórica ou autores da lógica de Port-Royal. Cf. MILL, 1981, p. 6.

ciências e, como tal, deve ter as sensações perceptivas como uma de suas fundamentações. Dessa forma, integra seu empirismo às definições, aos axiomas e às leis da natureza, ou melhor, todas as leis lógicas são determinadas ou prescritas pelas leis da natureza que governam o mundo e são o princípio de toda indução, para Mill (1974, Livro II, cap. III, § 2):

“[...] as proposições gerais, sejam chamadas de definições, axiomas ou leis da natureza, que estabelecemos no início de nossos raciocínios, são meramente declarações resumidas, em um tipo de abreviação, dos fatos particulares [...]”.

A posição lógica milliana classifica as premissas dedutivas associando-as também a fatos particulares, ou seja, a um agregado de fatos particulares. Relacionando a teoria empírica com a lógica, Mill afirma que: o fato 1 ou lei da natureza, perceptível e possível de ser asserido, é determinado e prescrito pela percepção que nos leva a organizar a inferência de todos os fatos universais através do método indutivo e, assim, estabelecer as leis lógicas confiáveis em um raciocínio. Deste modo, para Mill (1974, Livro II, cap. III, § 4), “toda inferência é de particulares a particulares” e as proposições universais devem ser definidas como fatos particulares coletados pela indução. Portanto, a lógica é uma arte do raciocínio acompanhada das experiências sensoriais.

OS PROCESSOS AUXILIARES DA INDUÇÃO

No livro IV de *A System of Logic*, Mill (1974, Livro III, cap. I, § 1) dedica toda sua análise aos pressupostos de raciocínio necessários no processo indutivo e afirma: “toda inferência e, com certeza, todas as evidências e todas as descobertas não evidentes, consistem em indução e na interpretação de induções; que todo nosso conhecimento não intuitivo provém exclusivamente dessa fonte”, uma vez que fornecem o conhecimento primário de todos os nossos processos mentais cognitivos. Nesse sentido, a indução é a extensão do reconhecimento da verdade de fatos particulares a todos os fatos pertencentes a mesma classe. Assim, as proposições gerais ou universais como: “Os animais mamíferos são vertebrados”, apresentam apenas uma extensão de percepções particulares que constituem os processos de inferência de uma indução.

A indução, certamente, é a operação do espírito pela qual inferimos que, aquilo que sabemos ser verdadeiro em um ou vários casos particulares, será verdadeiro em todos os casos que se assemelham ao primeiro sob certas relações verificáveis. Em outras palavras, a indução é o procedimento pelo qual concluímos que o que é verdadeiro de certos indivíduos de uma classe é verdadeiro em toda a classe, o que é verdadeiro algumas vezes, será sempre em circunstâncias semelhantes (1974, Livro III, cap. II, § 4).

A indução surge como único procedimento mental seguro, nas teses de Mill, para a obtenção da verdade. Mas, a indução implica em uma série de pressupostos, ou seja, operações mentais auxiliares como: a observação e a descrição; a abstração ou formação dos conceitos e a linguagem. A indução é definida a partir desses processos necessariamente pressupostos e, a observação é o fundamental, entre todos os outros, até mesmo para os pensamentos lógicos. Assim, sendo a ciência lógica, para Mill (1974, Livro IV, cap. III), também derivada de uma investigação dos objetos perceptíveis, segue os mesmos passos que qualquer outra área de conhecimento científico, ou seja, são validas apenas as conclusões que partem de premissas com raciocínio investigativo *indutivo*. Apesar de, em certos casos, as premissas partirem de deduções, estas devem ter como etapa anterior uma indução. O método dedutivo, “supõe um processo prévio de observação ou experiência” (MILL, Livro III, cap. X, § 1), ou seja, o conhecimento é *a posteriori* e todo o suposto conhecimento *a priori*, não baseado na experiência, trata-se de procedimentos mentais de inferências que não possibilitam o alcance da verdade. Assim, em todos os pensamentos científicos, o que inclui a lógica e a matemática, o método indutivo é o único eficaz para provas ou demonstrações da validade dos argumentos.

A indução não sendo mais que a extensão de uma classe de casos, de algo que foi observado como verdadeiro em certas instâncias individuais de classe; tem reivindicado para ela como primeiro lugar das operações auxiliares: a observação. Este não é, no entanto, o lugar para estabelecer regras para fazer bons observadores; nem é da competência da lógica fazê-lo, mas da arte da educação intelectual. Devemos tratar da observação apenas em sua conexão com o problema apropriado da lógica, a estimativa de provas. Devemos considerar, não como ou o que observar, mas em que condições a observação deve ser de confiança; para que o fato, supostamente observado, possa ser considerado como verdadeiro (MILL, Livro IV, cap. I, § 1).

Se observamos um objeto ou uma pessoa podemos ter diferentes percepções sensoriais reais como: cores, sons etc. e inferências corretas dessas percepções. Mas uma inferência, para Mill, está sempre mesclada às observações e pode levar alguém a compreender as sensações provocadas pelos sentidos como um erro de percepção. Mesmo sendo as sensações naturais e verdadeiras, a inferência pode ser equivocada, fato que ocorre em processos mentais de alucinação, perturbações ou simplesmente por enganos no ato da observação. Alguém ao sair a procura de seu animal de estimação, por exemplo, pode cometer o engano ao observar um filhote de coelho de pelo amarelo claro no canto de seu quintal como seu gato de estimação. Sua percepção do tamanho, forma e da cor do pelo do animal são corretas, “apenas a inferência foi mal fundada” (MILL, Livro IV, cap. I, § 2), sendo necessário, para Mill, distinguir uma inferência daquilo que é realmente percebido.

Ao contrário da observação que sempre está associada a um objeto em particular, a descrição não limita sua conexão a uma única percepção. Um paciente enfermo, por exemplo, que apresenta diferentes aparências de uma doença viral é interrogado por um médico que busca determinar a causa do problema a partir de respostas descritivas obtidas e da análise dos sintomas: aumento da temperatura do corpo, dor de cabeça, manchas na pele, dores no músculo e nas articulações. Comparando ainda exames realizados e todos esses sintomas apresentados com inúmeros casos de diferentes pacientes tratados cotidianamente e contaminados pelo *Aedes aegypti*; o médico conclui sua hipótese de contaminação viral e, assim, descarta, outras causas possíveis. A inferência das observações particulares e os processos de comparação prévia de todas as descrições corporais e estatísticas são processos mentais lógicos de indução. Nesse sentido, o processo mental de *observação* e *descrição* são pressupostos auxiliares da indução.

A linguagem, para Stuart Mill, como um sistema de representação dos objetos perceptíveis, também desempenha um papel de importância auxiliar na indução e na formulação das proposições em asserções lógicas, uma vez que a abstração ou formação dos conceitos, frutos do trabalho da *observação* e *comparação*, viabiliza que ocorra as inferências ou pensamentos seguros e expressos pelos sentidos da linguagem. Possibilitam, ainda, a presença dos objetos abstraídos pela percepção ou observação sempre que esses se dissipam de nossos sentidos. Ou seja, os nomes possibilitam a abstração dos objetos e o processo de inferência, já que esses, os objetos, nunca estão a todo momento em nosso campo perceptível (MILL, 1974, Livro IV).

Portanto, o procedimento mental lógico, fruto da aplicação do método indutivo, pressupõe diferentes processos mentais de inferência ou de operações auxiliares. Todas as discussões lógicas, para Mill, exigem, também como processo auxiliar da indução, uma análise semântica, visto que a ausência dos objetos no campo sensitivo é suprida pelos sentidos das palavras.

A LINGUAGEM: AUXILIAR NA INDUÇÃO E NA INVESTIGAÇÃO DA VERDADE

Para Mill (1974, Livro IV, cap. V, § 4), o lógico, prevendo as variações que os nomes podem apresentar naturalmente “como obra de todos os homens juntos” pode, mesmo assim, formular,

determinar e evitar essas variações de sentido das palavras para que mantenham a significação nas mais diversificadas aplicações de nomes singulares ou gerais² da linguagem.

Não é necessário acrescentar que, quando a inferência indutiva é de qualquer natureza, exceto a mais direta e óbvia - quando exige várias observações e experiências em condições diversas e suas comparações - é impossível prosseguir um passo sem a memória artificial das palavras (MILL, Livro IV, cap. III, § 3).

A linguagem torna-se, assim, mais importante para a comunicação e memorização ou recordação dos fatos do que para o próprio processo de raciocínio indutivo, sem a lembrança do fato que representa o significado do sinal A ou B, não é possível os processos de operações mentais de significação. Porém, o nome geral A ou B em um silogismo, por exemplo, não representa um número ilimitado de fatos, mas apenas um conjunto de objetos ou fatos particulares, pois nomes gerais: homem, animal, célula entre outros, em uma inferência, devem ter os fatos classificados em todas as ocorrências gerais com particularidade.

Essa uniformidade, portanto, pode ser determinada para todas as inferências; e se, sendo verificada, pode ser lembrada e servirá como uma fórmula, em casos particulares, para todas as inferências que a experiência anterior garanta. Mas só podemos garantir a sua lembrança, ou nos dar a possibilidade de levar em nossa memória qualquer número considerável de fatos uniformes, registrando-os através de sinais permanentes; que (sendo, da natureza do caso, sinais não de um fato individual, mas de uma uniformidade, isto é, de um número indefinido de fatos semelhantes uns aos outros) são sinais gerais; universais; nomes gerais e proposições gerais (MILL, Livro IV, cap. III, § 3).

Assim, a linguagem (nomes, números e proposições) é, nos processos auxiliares da indução, uma representação ou lembrança mental do conjunto de fatos formadores de uma uniformidade no processo da indução. O matemático Gottlob Frege encontrará nessas teses de Mill problemas para a conceituação dos números cardinais em suas investigações matemáticas, visto que sua significação é determinada por percepções de objetos e as verdades de proposições matemáticas não podem ser definidas, comprovadas ou explicadas com base em leis lógicas associadas a processos mentais psicológicos e empíricos. Como compreender os números a partir do principal argumento empírico de que a causa não é senão o antecedente uniforme e o efeito meramente o conseqüente – “O antecedente invariável é denominado a causa; o invariável conseqüente, o efeito” (MILL, Livro III, Cap. V, § 2), ou seja, como definir, comprovar e explicar que o número 1 nada mais é do que a causa imutável do número 2 (um objeto somado a outro) e o número 2 nada mais do

² Cf. MILL, 1974, Livro I, cap. II, § 3 e Livro IV, cap. V, § 4.

que o efeito imutável do número 1. E o número 0? Seria efeito de qual número inteiro? Ou, ainda, com base na tese de Mill, como a percepção de dois seixos pode ser a definição e a referência do número 2, e não uma definição perceptiva de dois objetos com características próprias de algum mineral? As investigações lógicas de Frege voltam-se constantemente para as explicações epistemológicas e semânticas da linguagem natural, a fim de discutir não somente o problema de as provas lógicas serem atribuídas aos processos mentais, mas também ao princípio da indução de Mill.

CONSIDERAÇÕES SOBRE AS IMPLICAÇÕES DO EMPIRISMO DE MILL NA FILOSOFIA DA MATEMÁTICA DE FREGE

O ponto central das principais investigações de Frege é matemático e as dificuldades levantadas pelas concepções empíricas de Mill repercutem negativamente em seu projeto de fundamentação da aritmética³. Assim, Frege defende uma de suas principais teses de oposição na definição de número no escrito *Grundlagen der Arithmetik*, pois o método indutivo aplica-se não só à ciência mas também à matemática – “[...] Mill desenvolve sua ciência da lógica indutiva e sua explicação da lógica e da matemática como ciências indutivas” (SKORUPSKI, 2006, p. 8). Os números, para Frege, não podem ser definidos por raciocínios indutivos ou método empírico, pois não são percepções de objetos físicos, ou seja, os pensamentos matemáticos da aritmética não são dados pelo processo auxiliar da observação ou percepção. Em seu artigo *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege rejeita uma teoria epistemológica baseada na experiência, pois, para ele, há um “preconceito de que todo saber seja empírico” (FREGE, 1953, §7). Essas são teses que o levam a arquitetar um diálogo com o empirismo de Stuart Mill.

§ 7. Deve-se pensar que as fórmulas numéricas são sintéticas ou analíticas, a posteriori ou a priori, dependendo das leis gerais que são suporte de sua demonstração. John Stuart Mill tem, contudo, outra opinião. Na verdade, de início ele parece, como Leibniz, pretender fundamentar a ciência sobre definições, pois define os números singulares como este; mas seu preconceito de que todo saber é empírico, por outro lado, arruína imediatamente a concepção correta. Ele informa que estas definições não estão em sentido lógico, que elas

³ “[...] a ciência nem sequer decidiu se um número é um grupo de coisas ou uma figura desenhada com giz num quadro negro por uma mão humana, se é algo mental, de modo que cabe à psicologia informar-nos da sua origem ou se é uma construção lógica, se é criada e pode eventualmente perecer ou se é eterna. Isso não é um escândalo?” Cf. Frege, 1984c, p. 249.

não apenas estipulam o significado de uma expressão, mas também afirmam um fato observado. Onde no mundo estaria o fato observado ou, como Mill também diz, o fato físico na definição do número 777864? De toda a riqueza dos fatos físicos que surge aqui antes de nós, Mill nos nomeia apenas um, o que deve ser asserido na definição do número 3. Segundo ele, este fato consiste em existirem coleções de objetos que, podendo produzir nos sentidos uma impressão o^2o , podem ser separadas em duas partes, como segue: $oo o$. Que bom pois que nem tudo no mundo esteja firmemente alinhavado; neste caso não poderíamos proceder a esta separação, e $2 + 1$ não seriam 3! Que pena Mill não ter descrito também os fatos físicos que fundamentam os números 0 e 1! (Frege, 1953, §7).

A demonstração da fórmula numérica de Mill⁴ não descarta a abstração de percepções mentais de objetos, ou seja, três, em uma das possíveis definições, sempre será a percepção do fato um somado a outros dois fatos observados: $1 + 2$ (fato 1 + o agregado de objetos do fato 2). A definição dos números são induções apresentadas pela inferência da soma da percepção dos objetos. Mill investiga a origem das generalizações da experiência perceptível e sua validade, a fim de aplicá-las a todos os domínios do conhecimento humano. Isso conduz a aritmética a ser uma ciência definida por uma posição epistemológica empírica e os significados de cada proposição lógica obtidos pelas percepções dos objetos. O processo de raciocínio, com valor para o conhecimento humano, possui envoltura apenas com as relações estabelecidas pelas expressões que representam fatos. Raciocinar é relacionar um fato com outro e o significado de uma expressão da linguagem é um fato e os números também são signos cujo significado são determinados ou estabelecidos por fatos (MILL, Livro II, cap. VI, § 2).

Frege, portanto, preocupa-se em seus escritos com a fundamentação dos conceitos da aritmética a partir de definições lógicas, mas uma lógica que não seja associada às regras de inferência de sensações e relação entre fatos. Assim, apresenta, explicitamente em alguns de seus escritos, um distanciamento bastante enfático para definições matemáticas e lógicas presentes nos trabalhos de Mill, pois atingem sua investigação e o avanço em seu projeto de elaborar aplicações de inferências lógicas em proposições da aritmética (FREGE, 1982). Expõe essas críticas às teses millianas, principalmente, a fim de associar o pensamento aritmético não a fatos ou percepções empíricas que representem os números, ou seja, defini-los sem qualquer associação com objetos físicos originários de sua significação. Mas, sim, a partir de outra concepção que possa considerar o

⁴ “Podemos chamar a proposição: “Três é dois e um”, se quisermos, como uma definição do número três, e afirmar que a aritmética é uma ciência fundada em definições, como tem sido afirmado da geometria. Mas são definições no sentido geométrico, não no lógico; afirmando não apenas o significado de um termo, mas junto com ele um fato observado”. Cf. MILL, 1974, Livro II, cap. VI, § 2.

número como um objeto abstrato. Dito de outro modo, com um novo conceito de objeto, os números adquirem significado saturado em cálculos matemáticos, descartando a referência de percepções sensoriais dos objetos (FREGE, 1979, pp. 87-117).

É somente, muitas vezes, com um grande esforço intelectual, que se prolonga por séculos, que conseguimos alcançar o conhecimento de um conceito em sua pureza, livrando-o dos acúmulos irrelevantes que o afetavam aos olhos do espírito. Então o que dizer daqueles que, ao invés de avançar neste trabalho, que não parece ainda realizado, desprezam-no e dirigem-se ao quarto das crianças ou retrocedem-se aos remotos períodos imagináveis da evolução humana, para lá descobrir, como John Stuart Mill, algo como uma aritmética de pães e seixos! Resta apenas atribuir ao sabor do pão um significado particular para o conceito de número (Frege, 1953, p. XIX).

Frege discute vários fragmentos dos escritos de Mill, não só em oposição a sua definição de números, mas também como símbolo de uma corrente de pensamento que analisa todo significado de palavras e sentenças ou até mesmo de números como abstrações de objetos – “ $1^1 = 1$ não enuncia nada da Lua, nem do Sol, nem do Saara, nem do pico de Tenerife; pois qual poderia ser o sentido de um tal enunciado?” (FREGE, 1953, p. XII – XXIII). “ 1^1 ” no exemplo de Frege supõe uma sugestão, em deixar ainda mais vaga, a possibilidade de os números terem como sentido e definição os objetos perceptíveis, pois como demonstrar uma indução para o número 1^1 . Frege reforça a crítica ao empirismo de Mill, apresentando o problema que nenhum objeto perceptível elevado a outro objeto perceptível seria igual a 1.

Se realmente a definição de cada número individual afirma um fato físico particular, então nunca se poderia ser capaz suficientemente de admirar, pelo seu conhecimento da natureza, um homem que calcule com números de nove dígitos. Porém, talvez Mill não pretenda ir tão longe a ponto de manter que todos esses fatos tenham que ser observados de modo particular, mas pensa que seja suficiente derivar através da indução uma lei geral em que todos sejam incluídos juntos (FREGE, 1953, § 7).

Se a tese empírica é assumida, conseqüentemente, a significação dos números torna-se irregular? Se a significação dos números é determinada pelas propriedades do objeto que denota, e temos uma variedade infinita de conotação para os números, como eliminar a irregularidade da significação? Frege (1953, § 103) questiona se isso não suscita significados “estranhos para a aritmética”. Os números podem ser aplicados a diferentes fatos, ora para a soma de objetos da química, ora para objetos da física entre outros, como saber que o enunciado “2” é igual ao enunciado “ $1 + 1$ ”, já que a definição do número é determinada pelo objeto. Caso a igualdade seja aplicada ao objeto denotado como explicá-la em enunciados como $2 + 1 = 3$, se alguém pode denotar para o número 2: seixos; estrela para o número 1 e planetas para o número 3. Assim, dois seixos mais uma estrela são iguais a 3 planetas. No entanto, a possibilidade irregular de significação em

enunciados de igualdade em operações numéricas seria um equívoco e não é a questão, pois o signo matemático, apesar de apresentar diferentes significações e se referir a diferentes objetos, denota o mesmo agregado de objetos nesses enunciados. Nesse sentido, a igualdade não está no nível dos atributos dos objetos agregados pela inferência de diferentes percepções, mas na igualdade do agregado de objetos obtidos pela indução.

A expressão “dois seixos” e um seixo” e a expressão “três seixos” se referem, de fato, a mesma agregação de objetos, mas de modo algum representam o mesmo fato físico. São nomes dos mesmos objetos, mas destes objetos em dois estados diferentes. **Embora denotem a mesma coisa, sua conotação é diferente** [grifo nosso]. Três seixos em duas partes separadas e três seixos em uma parcela não causam a mesma impressão em nossos sentidos; e a afirmação de que os mesmos seixos podem, por uma alteração de lugar e ordenação, produzir um conjunto de sensações ou outra, embora seja uma proposição muito familiar, não é idêntica. É uma verdade atingida pela experiência inicial e constante: uma verdade indutiva; e tais verdades são a base da ciência do Número (MILL 1974, Livro II, Cap. VI, § 2).

As inferências de igualdade matemática em uma classe de objeto estão no simples fato de reorganizar a distribuição do número de objetos pertencentes a esse agregado. “ $2 + 1 = 3$ ” e “ $1 + 1 + 1 = 3$ ” são diferentes *conotações* que *denotam* o mesmo fato – a igualdade dos objetos de uma agregação – todavia representam diferentes percepções ou propriedades da agregação desses objetos, logo há uma diferença na conotação (significação). Podemos ter diferentes organização de signos, “ $2 + 1$ ” e “ $1 + 1 + 1$ ”, para conotar os diferentes atributos do objeto ou diferentes percepções, no entanto a denotação dos objetos perceptíveis agregados é a mesma – 3. O problema para Frege, está no fato de ora a conotação atribuir um significado ao número 2 ora outro significado, já que o objeto de referência do signo matemático é determinado pela sua conotação ou atributos. Associando, assim, toda a “ciência do Número” aos processos de inferências indutivas.

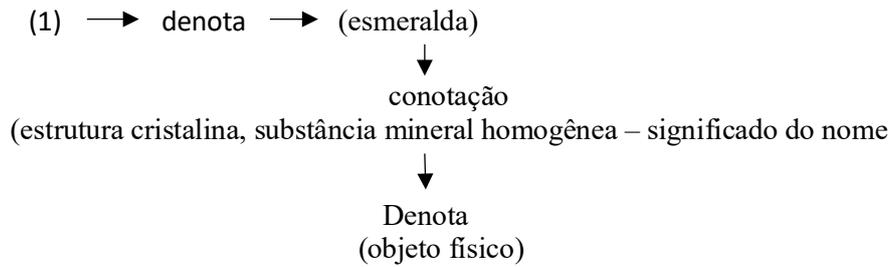
A preocupação de Frege, com a definição dos números, deixa pressuposto que sua investigação da linguagem tem como objetivo especificamente a resolução desse problema apresentado pelo empirismo de Mill. No entanto, Mill deixa uma distinção que necessita ser enfatizada: o significado dos nomes gerais não é o objeto *denotado*, mas a *conotação*, isto é, a associação de uma ou várias propriedades para denotar o objeto físico.

Um nome geral indica atributos e denota cada objeto que possui esses atributos. Atributos são propriedades das coisas, não ideias dessas propriedades. A maioria dos nomes singulares também denota atributos; o que não é o caso de nomes próprios – “Dartmouth”, “Tully”, “Cicero” etc. que denotam um objeto, mas não atribuem nenhum atributo. Seu significado, isto é, sua contribuição para a significação de proposições, é determinado por sua denotação. Uma linguagem também pode conter nomes não conotativos de atributos – nomes “abstratos”, como “brancura”, ou “branco” usados abstratamente – e, nesse caso, também o significado é determinado por denotação (SKORUPSKI, 2006, p. 36).

A linguagem, para Mill (1974, livro IV, Cap. IV, § 3), como um processo auxiliar da indução é um artifício para guardar as memórias de nossos processos mentais perceptivos, ou melhor, toda a sequência de experiências e deduções cuja significação dos nomes representam o objeto ausente no momento da inferência indutiva, assim, os nomes singulares e nomes gerais devem sempre denotar um objeto singular, o primeiro um objeto determinado; o segundo um agregado de objetos individuais também determinados pela indução. Neste último caso, a designação do objeto é indireta, pois a denotação ou designação sempre será mediada pela sua conotação, ou seja, pelo atributo do objeto que constitui seu sentido. Sendo assim, a significação ou atributos do objeto são mediadoras da relação entre nome e objeto empírico. O mesmo não se mantém para nomes abstratos, pois sua referência, com o objeto, é direta, já representam o próprio atributo ou sentido do objeto. No entanto, essas expressões de igualdade de fatos que se referem a dois agregados de objetos, expõem uma relação que introduz um outro problema no nível da linguagem. A referência do signo numérico, que podemos assumir como um nome geral, também é determinada pela sua conotação, as propriedades dos objetos observáveis sugerem uma característica singular, pois se relacionam como um agregado de objetos idênticos indicados pelos numerais. Se o nome geral “esmeralda” denota o objeto mineral sólido determinado pelos atributos de: substância mineral homogênea, estrutura cristalina, inorgânica entre outros, temos:



Diferentemente, a relação de conotação dos signos números é duplamente indireta, já que é mediada por uma metalinguagem, ou seja, um signo numérico denota um nome genérico com a conotação de um objeto. No esquema abaixo, o signo numérico e o nome genérico repousam no mesmo nível:



Para eliminar a metalinguagem, ou seja, para que a denotação se estabeleça apenas nos processos mentais ou abstratos, é necessário a percepção do objeto ou agregado de objetos no espaço. O que nem sempre é possível pela ausência de objetos perceptíveis ou pela quantidade de signos numéricos que denotam o objeto, isto é, um numeral com dezenas de dígitos pode denotar um agregado de objetos impossível de ser representado mentalmente. A linguagem (sinal) cumpre sua função de representar o objeto ausente da percepção no momento do raciocínio (pensamento). Um sinal numérico será relacionado ao nome geral que representa um agregado de esmeraldas, por exemplo, sempre que esse conjunto de objetos estiver ausente da percepção no momento do pensamento.

Portanto, Frege refutou a tarefa atribuída ao empirismo de investigar os processos mentais como determinantes das leis da natureza, da matemática e da lógica, mas em discordância a Mill, apresenta, na verdade, uma restrição à aplicação da indução na definição dos números naturais, pois não nega a importância da observação empírica nas investigações científicas. Também, possivelmente, a teoria da denotação e conotação de Mill, provocou uma preocupação maior para a sua distinção semântica entre sentido e referência. É importante também observar que um método indutivo universal de investigação da verdade ou do conhecimento se apresenta como o objetivo principal de Mill, o que para Frege, é impossível para objetos abstratos como os da matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As investigações da linguagem, nos estudos filosóficos de Frege, produzem argumentos importantes para o fundamento de suas teses lógicas e matemáticas. Em seus trabalhos encontramos investigações que buscam a modificação da lógica, substituindo a linguagem natural aristotélica por fórmulas simbólicas semelhantes a sinais matemáticos utilizados em cálculos, a fim de alcançar rigorosidade na sequência inferencial. Mill, por outro lado, estava preocupado com os

processos mentais lógicos, ou seja, como pensamos sobre o mundo externo e como a linguagem pode ser auxiliar dos processos indutivos na ausência da percepção dos objetos. Essas investigações de Mill e de Frege sobre a linguagem os conduziram a formular uma teoria semântica similar, como segue no esquema:



Para referência de objetos da química e da física, por exemplo, podemos afirmar que Frege e Mill estariam de acordo que “H₂O” e “água” designam o mesmo objeto. Porém, para os números Frege poderia admitir que $2 + 3$ e 5 têm o mesmo conteúdo, ou seja, a referência é a mesma. No entanto, para Mill, o agregado de objetos da primeira expressão matemática é diferente do segundo caso, e as percepções desses dois diferentes agregados devem ser consideradas a referência do sinal numérico. Portanto, Frege não assume a tese empirista milliana de que não se deve reconhecer algo como objeto a não ser que seja através da percepção.

Frege apresentou, portanto, uma teoria semântica com relação de proximidade com a proposta de Mill: para a distinção entre conotação e denotação. No entanto, em seus trabalhos há severas críticas ao empirismo de Mill, principalmente ao conceito de número. A matemática, como uma ciência formal, não deve fundamentar seu objeto principal de investigação associando-o a percepções de objetos físicos, podemos aplicá-la aos fenômenos do mundo físico, mas não fundamentar o conceito de número nessas percepções. Assim, os objetos da aritmética (os números) não são encontrados no mundo sensitivo, mas sim em um mundo metafísico, abstrato.

REFERÊNCIAS

FREGE, Gottlob. On Concept and Object. In: _____. *Posthumous Writings of Gottlob Frege*. Oxford: Blackwell, 1979a, pp. 87-117.

_____. *The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number*. Oxford: Basil Blackwell, 2^aed., 1953.

_____. *The Basic Laws of Arithmetic*. Oxford: Oxford University Press, 1982.

_____. *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Oxford: Basil Blackwell, 1980.

_____. *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*. New York: Basil Blackwell, 1984.

HAACK, S.. *Filosofia das lógicas*. Tradução Cezar Augusto Mortari e Luiz Henrique de Araújo Dutra São Paulo: Unesp, 2002.

HADDOCK, G.E.R. *A Critical Introduction To The Philosophy of Gottlob Frege*. England: Ed.: Ashgate Publishing Limited, 2006.

HUME, D. *Tratado da Natureza Humana*. Tradução Déborah Danowski. São Paulo: Edunesp, 2001.

KANT, I. *Crítica da razão pura*. Tradução de A. Morujão. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1997.

KESSLER, G. *Frege, Mill and the Foundations of Arithmetic*. *The Journal of Philosophy*, Vol. 77, Nº 2, Fev., 1980, 65-79. Disponível em: < <https://www.jstor.org/stable/2025431>>. Acesso em 03 jun. 2022.

MILL, Stuart. *A System of Logic Ratiocinative and Inductive: being a connected view of the principles of evidence and the methods of scientific investigation*. IN: ROBSON, J. M. (Ed.). *The Collected Works of John Stuart Mill*. Vol. VII. Livros I a III. Toronto: University of Toronto Press; London: Routledge and Kegan Paul, 1974.

_____. *A System of Logic Ratiocinative and Inductive: being a connected view of the principles of evidence and the methods of scientific investigation*. IN: ROBSON, J. M. (Ed.). *The Collected Works of John Stuart Mill*. Vol. VIII. Livros IV a VI. Toronto: University of Toronto Press; London: Routledge and Kegan Paul, 1974.

SKORUPSKI, J.. *John Stuart Mill*. London: Routledge, 1989.

_____. *The Cambridge Companion to Mill*. Cambridge: Cambridge University Press. TERRIER, 2006.

WHATELY, Richard. *Elements of Logic*. New York: Harper & Brothers, 1853.



FRANCISCO, Antonio Marcos. STUART MILL: O EMPIRISMO E O PROBLEMA PARA FUNDAMENTAÇÃO DA MATEMÁTICA. *Kalagatos*, Fortaleza, vol.19, n.2, 2022, eK22021, p. 01-15.

Recebido: 05/2022

Aprovado: 06/2022