A TRIGONOMETRIA NO SÉCULO XV: outra demonstração da lei dos senos

Ana Carolina Costa Pereira - Universidade Estadual do Ceará - UECE
carolina.pereira@uece.br

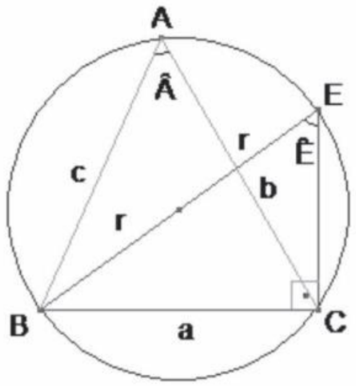
Johann Müller Regiomontanus (1436-1476) não é uma figurinha conhecida entre alunos e professores do Ensino Fundamental e Médio como, por exemplo, Leonard da Vinci (1452-1519) e Nicolau Copérnico (1473-1543), seus contemporâneos, mas ele contribuiu de forma espetacular para a independência da Trigonometria que, até o século XV, era vinculada a Astronomia.

Em suas obra mais importante, escrita por volta de 1464 e publicada postumamente, em 1533, De Triangulis Omnimodis Libri Quinque (Cinco Livros sobre Todos os Tipos de Triângulos), Regiomontanus apresenta a primeira exposição europeia sistemática de Trigonometria Plana e Esférica, uma tentativa importante de tratamento da Trigonometria de modo independente da Astronomia. Um fato importante a ressaltar é que esse trabalho influenciou os matemáticos e astrônomos Nicolaus Copérnico (1473–1543) e Georg Joachim von Lauchen Réticos (1514 – 1574). Ambos tiveram em mãos alguns trabalhos de Regiomontanus (ZELLER, 1944).

Essa coleção está dividida em cinco livros: os dois primeiros abordam a Trigonometria Plana, sendo dedicadas 57 páginas a eles; os três últimos livros, a Trigonometria Esférica, elemento mais importante para o estudo da Astronomia, numa extensão de 74 páginas. O que Regiomontanus apresenta em seus livros, na sua maioria, são conceitos ligados a Trigonometria estudada no Ensino Fundamental e Médio, porém com um estilo euclidiano, colocando uma ênfase forte ao método-dedutivo. Basicamente, cada livro inicia com definições e axiomas, seguindo-se os teoremas e suas demonstrações.

Dentre os conceitos estudados encontramos a Lei dos Senos que nos Livros Didáticos de Matemática, é exposto como uma propriedade trigonométrica num triângulo qualquer.

Lei dos Senos: Em um triângulo qualquer, a razão entre cada lado e o seno do ângulo oposto é igual e constante a medida do diâmetro da circunferência circunscrita.



Para a demonstração dessa lei os autores de Livros Didáticos utilizam a definição de seno no triângulo retângulo.

Demonstração:

Seja um triângulo ABC qualquer inscrito em uma circunferência de raio r onde, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Trace-se pelo vértice B o diâmetro da circunferência que toca o ponto E, ou seja, $\overline{BE} = 2r$. Liga-se o segmento $\overline{EC}$ que pelo teorema de Thales: Todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo, o ΔBCE é retângulo em C e o ângulo Â≅Ê pois ambos estão sob o mesmo arco $\widehat{BC}$.

$$sen\hat{A} = sen\hat{E} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$$

$$sen\hat{A} = \frac{a}{2r} \rightarrow 2r = \frac{a}{sen\hat{A}}$$

Fazendo o mesmo processo para os vértices A e C encontra-se:

$$2r = \frac{b}{sen\hat{B}} \;\; e \;\; 2r = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

Logo, $$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} = 2r$$

Na história da Matemática, esse "Teorema" ou "Lei", está exposto na obra De Triangulis, em que Regiomontanus trata-o tanto na Trigonometria Plana quanto na Trigonometria Esférica. No que se refere a Trigonometria Plana encontramos no segundo livro, teorema 1 essa Lei dos Senos: Em todo triângulo retilíneo a razão de um lado para com o outro lado é a mesma que o seno do ângulo oposto ao lado para com o seno do ângulo oposto ao outro lado (PEREIRA, 2010, p. 164-165).

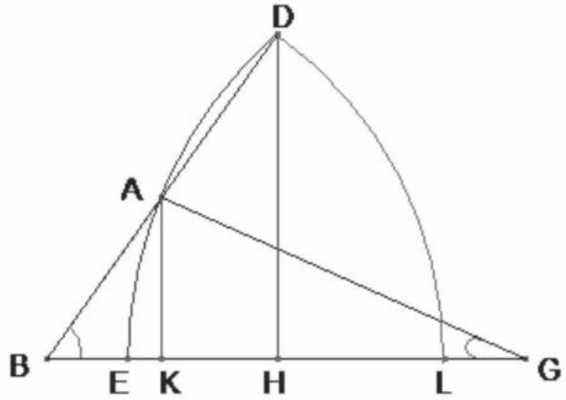
Esquematizando...
Como dissemos, o seno de um ângulo é o seno do arco subtendido aquele ângulo. Além do mais, esses senos devem ser relacionados por um, e o mesmo raio do círculo, ou por vários [raios] iguais. Assim, se o ΔABG é um triângulo retilíneo, então a razão do lado AB para com lado AG é a mesma que o seno do $\angle AGB$ para o seno do $\angle ABG$; similarmente, a razão do lado AB para com lado BG é a mesma que o seno do $\angle AGB$ para o seno do $\angle BAG$.

Demonstração
Se o ΔABG é um triângulo retângulo, a prova será direta pelo Teorema 28 do Primeiro Livro dos Triângulos. Entretanto, se o triângulo não for retângulo, os dois lados AB e AG são iguais, os dois ângulos opostos aos lados também iguais e conseguintemente seus senos serão iguais. Assim dos dois lados dele é estabelecido que nossa proposição é verificada. Mas se [um dos dois lados] é maior que o outro – por exemplo, se AG é maior – então traçaremos por BA um segmento até o ponto D, até toda [a linha] BD seja igual ao lado AG. Então, ao redor dos dois pontos B e G como centros, dois círculos iguais são entendidos para ser traçados com os comprimentos das linhas BD e GA como raios [respectivamente]. As circunferências destes círculos interceptam a base do triângulo nos pontos L e E, tal que o arco DL subtende ao $\angle DBL$, ou ABG, e o arco AE subtende ao ângulo $\angle AGE$ ou AGB. Finalmente duas perpendiculares AK e DH, dos dois pontos A e D, interceptam a base. Agora é evidente que DH é o seno reto do $\angle ABG$ e AK é o seno reto do $\angle AGB$. Além disso, pela Proposição 4 do Livro VI dos Elementos de Euclides[1], a razão de AB para BD, e consequentemente para AG, é a mesma de AK para DH. Assim, a afirmação da proposição é verdadeira. (Grifo nosso)

Fica claro que Regiomontanus no início do enunciado do teorema nos diz que "o seno de um ângulo é o seno do arco subtendido aquele ângulo", ou seja, ele relaciona com o raio do círculo que está sendo estudado. Em seguida, expõe uma propriedade importante que conhecemos por lei dos senos: Em todo triângulo qualquer a razão entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto a este é constante, ou seja, é a mesma seja qual for o lado escolhido. Tomando a figura do teorema 1 a lei dos senos seguiria:

$$\frac{sen A\hat{B}G}{AG} = \frac{sen A\hat{G}B}{AB} = \frac{sen B\hat{A}G}{BG}$$

Para a demonstração ele analisa os dois possíveis casos, quando o triângulo for retângulo e quando o triângulo for qualquer. Para o primeiro caso o teorema 28 do primeiro livro resolve o problema. Para o caso em que o triângulo é qualquer ele ainda divide em dois subcasos: triângulo isósceles e triângulo escaleno, onde segue acima suas demonstrações.



O que difere a demonstração atual e a do século XV é justamente a forma como está definido o seno de um ângulo. O conceito de seno, como usado na obra, *é uma perpendicular traçada de uma extremidade de um arco de um círculo para o diâmetro que foi traçado pela outra extremidade do arco.* Na demonstração acima podemos ver com clareza essa definição na conclusão da prova: Agora é evidente que DH é o seno reto do $\angle DBG$ e AK é o seno reto do $\angle AGB$.
Nosso intuito aqui não é fazer com que o professor trabalhe a Lei dos Senos sob o ponto de vista histórico, mas sim, possibilitar outras formas de apresentação de uma demonstração que poderá levar o aluno a construir outros conceitos que foram se desenvolvendo ao logo da História da Matemática.

REFERÊNCIAS

PEREIRA, A. C. C. A Obra "De Triangulis Omnimodis Libri Quinque" de Johann Müller Regiomontanus (1436 – 1476): uma contribuição para o desenvolvimento da Trigonometria. 2010. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, Natal, RN, 2010.

ZELLER, M. C. The development of trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus. Ann Arbor: University of Michigan doctoral dissertation, 1944.

[1]Proposição 4.VI: Os lados à volta dos ângulos iguais dos triângulos equiláteros estão em proporção, e os que se estendem sob os ângulos iguais são homólogos.
[2]Teorema 28: Quando a razão de dois lados de um triângulo retângulo é conhecida, seus ângulos podem ser calculados (PEREIRA, 2010, p.123).