COMPLEMENTOS DO CÁLCULO INTEGRAL:

EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO CONTEXTO HISTÓRICO

Francisco Regis Vieira Alves - IFCE - fregis@ifce.edu.br

RESUMO

Reconhecidamente, as raízes do que hodiernamente conhecemos por Geometria Algébrica - GA tem suas fontes na Grécia, se levarmos em conta que os antigos helênicos desenvolveram cálculos elaborados, recorrendo a certos procedimentos geométricos. Por outro lado, um olhar específico atinente à manipulação de equações algébricas é registrado com maior ênfase no século XVI. Destarte, vários matemáticos se detiveram ao estudo de curvas especiais relacionadas com a solução de inúmeros problemas (ZDOROV, 1980; YATES, 1947). Possivelmente o ápice de todo o processo é marcado pela introdução de um sistema de coordenadas e a descrição dessas curvas por meio de equações gerais $f(X,Y)=0$. Ora, nos referimos a certos elementos que demarcam o nascedouro da GA (VAINSENCHER, 2009). De modo particular, nesse trabalho, discutiremos a abordagem e alguns exemplos particulares presentes na obra portuguesa de Albuquerque (1937), intitulada Geometria e Análise: teoria geral das curvas algébricas e complementos do cálculo integral. Evidenciaremos, todavia, determinados argumentos clássicos e propriedades, num contexto histórico, que admitem uma ressignificação com origem na tecnologia. Para tanto, trazemos uma discussão relativa à aplicação ao cálculo integral. Com efeito, restringir-nos-emos a algumas integrais do tipo $\int f(x,\sqrt{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}dx$ envolvendo uma função $f(x,y)$ em y que está relacionada com x pela expressão $y^2=X=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$.

Por intermédio da tecnologia, mostraremos algumas aplicações que possibilitam uma interpretação gráfico-geométrica originada neste modelo. Deste modo, mediante o quadro atual de avanço da GA, resgatamos um olhar de interpretação qualitativa de certos fenômenos a partir da visualização de complexas entidades conceituais (ALVES, 2013).

Palavras-chave: Cálculo, Historia da Matemática, Curvas Algébricas, Geogebra.

INTRODUÇÃO

No livro intitulado Curvas Algébricas Planas, Vainsencher (2009, p. 114) explica a possibilidade de aplicamos determinadas características de certa classe de curvas algébricas (curvas racionais) ao cálculo de integrais. Em linguagem atual, o referido problema pode ser descrito por meio da definição de função algébrica.

De fato, dizemos que a função $y=\varphi(x)$ definida e contínua numa vizinhança do ponto $x_0\in IR$ (ou C) é algébrica se existir um polinômio não-constante f tal que $f(x,\varphi(x))=0$ no domínio de φ. Ademais, se tomamos f irredutível, então o polinômio fica determinado, a menos de um fator constante e dizemos, pois, que f é equação de φ. Ou ainda, φ é definida por $f(X,Y)=0$. Eis a questão que buscaremos abordar e evidenciar seu contexto histórico: Sob que condições, a integral $\int\varphi(x)dx$ é exprimível como funções ele-mentares?

Antes de fornecermos maiores detalhes relativos ao trato formal deste problema, faremos uma breve incursão histórica relativa ao contexto da Geometria Algébrica.

Contexto histórico da Geometria Algébrica

Nos séculos XIX e XX, devido ao grande desenvolvimento do Cálculo, impulsionou-se o estudo de novas funções transcendentes. Neste sentido, Albuquerque (1937, p. 43) menciona que "o aparecimento de novas integrações fez surgirem novas funções transcendentes". Um pouco mais adiante, o mesmo autor, menciona o caso da "determinação de áreas e comprimentos de arcos de curvas que dependem de integrais, a grande maioria dos quais não se calculam por meio de funções elementares".

No trecho de seu livro intitulado "Complementos de Cálculo Integral", este autor discute integrais do tipo $\int f(x,\sqrt{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}dx$ relacionando a expressão do integrando a uma curva algébrica do tipo $y^2=X=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$

Por outro lado, discutiremos a situação particular de integrais da seguinte forma $\int f(x,\sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}dx$, quando o polinômio X for do quarto grau.

Nesta situação, lidamos com integrais elípticas que permitem uma profusão de aplicações em várias áreas da Matemática. Registramos, na literatura, os primeiros estudos relativos à classe de integrais elípticas em 1655, por John Wallis, com a análise do arco e da elipse. Neste sentido, John Wallis (1616-1703) e Isaac Newton (1643-1727) publicaram um tratado sobre expansão de séries infinitas para comprimento de arco e a elipse. Apenas nos anos de 1700, sabemos que Legendre desenvolveu o estudo de funções elípticas com aplicações imediatas em Física.

Adrien-Marie Legendre (1752-1833) foi responsável, por meio da publicação da obra intitulada Memoires de l'Acadmie Francaise em 1786, baseado em arcos elípticos. Um pouco mais tarde, ele apresentou, à academia de Ciências, outro trabalho intitulado Mémoire sur fonctions eliptique transcedant. Assim, o trabalho e as ideias promovidas e disseminadas por insignes matemáticos proporcionou uma contribuição na constituição de uma área de investigação matemática, hodiernamente conhecida como Geometria Algébrica. Na próxima seção, assinalar-se-ão elementos atinentes ao contexto de curvas algébricas.

Complementos do Cálculo

Logo no início da seção relativa aos complementos do Cálculo, Albuquerque (1937, p. 78) diz que as funções são separadas em duas grandes classes: algébricas e transcendentes. Na figura 1, trazemos um pequeno trecho em que o mesmo apresenta uma definição introdutória.

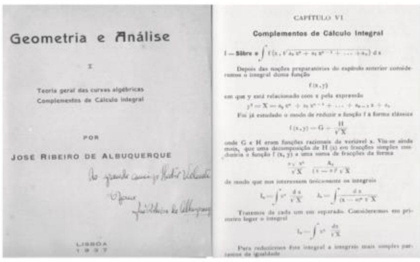
No sentido mais geral, diz-se que uma grandeza y é função algébrica de x, quando ela satisfaz a uma equação

F (x, y) = 0

racional em relação à incógnita y, e à variável independente x, que aparece nos coeficientes de y.

Figura 1. Albuquerque (1937, p. 78-79) descreve uma classe de funções do seu interesse relacionadas com os complementos do Cálculo.

Logo na figura 2, assinalamos a capa do compendio escrito José Ribeiro de Albuquerque. Vale assinalar o capítulo VI da referida obra, em que este autor aborda o tópico relativo aos complementos de Cálculo. Ora, o caráter abstracionista se revela ao leitor de modo irrefutável. Nossa intenção, doravante, caracterizar-se-á na interpretação gráfico-geométrica de algumas integrais particulares discutidas no capítulo VI.


Geometria e Análise
I
Teoria geral das curvas algébricas
Complementos de Cálculo Integral
POR
JOSÉ RIBEIRO DE ALBUQUERQUE
LISBOA
1937

CAPÍTULO VI
Complementos de Cálculo Integral

Figura 2. Livro de edição portuguesa que marca a contribuição de elementos remontam os primórdios da Geometria Algébrica

Tecnologia e Historia da Matemática: alguns exemplos

Retomando o problema indicado logo na introdução desse escrito (ver fig. 2), vamos considerar a seguinte integral $\int \frac{\varphi(x)}{x+1}dx$, onde $\varphi(x)$ é definida por meio da curva algébrica $Y^2 - X^2 + X^3 = 0$.

Ora, Vainsencher (2009, p. 115) promove a seguinte indicação $(x(T), y(T)) = (T^2-1, T(T^2-1))$. Segue que: $\int \frac{\varphi(x(T))}{x(T)+1}dT = \int \frac{(T(T^2-1))}{T^2-1+1}2TdT =$

$$= 2\int (T^2-1)dT = 2\left(\frac{T^3}{3} - T\right) \therefore \int \frac{\varphi(x)}{x+1}dx = 2\left(\frac{T^3}{3} - T\right).$$

Não obstante, usamos ainda que $\frac{y(T)}{x(T)} = \frac{T(T^2-1)}{T^2-1} = T \therefore \frac{\varphi(x)}{x} = T$.

Finalmente, escrevemos: $\int \frac{\varphi(x)}{x+1}dx = \frac{2}{3}\left(\frac{\varphi(x)^3}{x^3} - 3\frac{\varphi(x)}{x}\right)$.

Reparemos que $Y^2 = X^2 - X^3 \rightarrow \begin{cases} Y(x) = \sqrt{X^2 - X^3} \\ Y(x) - \sqrt{X^2 - X^3} \end{cases}$.

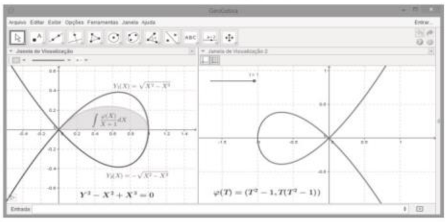


Figura 3. Visualização da curva em coordenadas cartesianas e sua parametrização.

Albuquerque (1937, p. 100) comenta o seguinte exemplo de integral $I = \int \frac{dx}{x\left[\sqrt[5]{x^5+\sqrt{x^5+x^6}} + \sqrt[5]{x^5-\sqrt{x^5+x^6}}\right]}$.

Observamos que a integral I pode ser relacionada com a seguinte curva $Y^5 - 2X^5 + 3XY = 0$. Ora, o autor explica, sem maiores detalhes, que, resolvendo a equação anterior, podemos inferir: $y = \sqrt[5]{x^5 + \sqrt{x^5 + x^6}} + \sqrt[5]{x^5 - \sqrt{x^5 + x^6}}$. Neste caso, escrevemos então: $(x(T), y(T)) = (\frac{3T}{2-T^5}, \frac{3T^2}{2-T^5})$ e com tal parametrização, podemos inferir que satisfaz a equação $Y^5 - 2X^5 + 3XY = 0$.

Ademais, um pouco mais adiante, Albuquerque (1937, p. 102), comenta que "a cúbica considerada é unicursal porque possui um ponto duplo na origem". E, a partir da parametrização, ele indica: $I = \int \frac{dx}{x\left[\sqrt[5]{x^5+\sqrt{x^5+x^6}} + \sqrt[5]{x^5-\sqrt{x^5+x^6}}\right]} = \frac{2}{3}\int\left(1+\frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{2}{3}\left(t - \frac{1}{2t^2}\right) + C$ e, por fim, sua primitiva $I = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt[5]{-1+\sqrt{x^5+x^6}} + \sqrt[5]{-1-\sqrt{x^5+x^6}}\right)$.

Logo adiante, divisamos o comportamento gráfico-geométrico da curva algébrica associada $Y^5 - 2X^5 + 3XY = 0$. Ao lado direito, na figura 4, registramos certas limitações do software GeoGebra no sentido de exibir o traço desta equação.

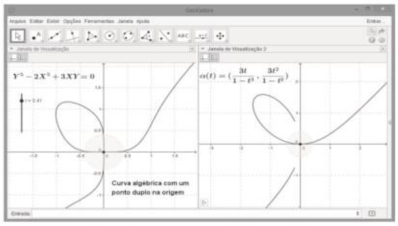


Figura 4. Visualização das propriedades gráfico-geométricas indicadas e discutidas por Albuquerque (1937).

Com o software Geogebra, podemos inspecionar e analisar o comportamento estranho das retas tangentes nas vizinhanças da origem. Com efeito, indicamos seu comportamento gráfico-geométrico nas figuras 4 e 5. Ao lado direito, divisamos sua parametrização.

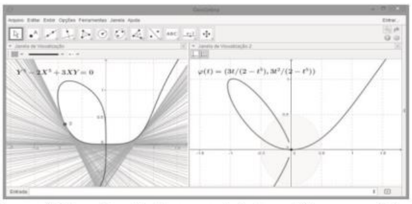


Figura 4. Visualização das propriedades gráfico-geométricas indicadas e discutidas por Albuquerque (1937).

DISCUSSÕES FINAIS

Neste trabalho, buscamos enfatizar, com o arrimo da tecnologia, determinados modelos matemáticos conhecidos, há décadas, no ramo de estudo da Geometria Algébrica. De modo particular, damos ênfase ao estudo desenvolvido por Albuquerque (1937). Assinalamos em sua obra, o trato e a abordagem de certos tópicos relacionados ao tópico de curvas algébricas que detêm enorme aplicação. Em nosso caso, discutimos algumas de suas aplicações ao Cálculo Integral com vistas à descrição de integrais elípticas e eulerianas. Tais integrais são abordadas ainda em tempos atuais, contudo, sob a égide de uma perspectiva eminentemente algebrizante e estrutural. Daí, com arrimo nas figuras anteriores, assinalamos aspectos de ordem intuitiva, mormente àqueles de ordem perceptual do estudante (Alves, 2013a, 2013b).

REFERÊNCIAS

Alves, Francisco, R. V. (2013a). A noção de integral generalizada: sua exploração apoiada na tecnologia num contexto histórico. Anais do VI HTEM, São Carlos: Editora Universitária, 1-8. Disponível em: ifce.academia.edu/RegisFrancisco.

Alves, Francisco, R. V. (2013b). A noção de integral generalizada: sua exploração apoiada na tecnologia num contexto histórico. Anais do VI HTEM, São Carlos: Editora Universitária, 1-8. Disponível em: ifce.academia.edu/RegisFrancisco.

Albuquerque, J. R. (1937). Geometria e Análise: teoria geral das curvas algébricas e complementos do cálculo integral. Lisboa: Editora Universitária.

Rosen, Kenneth, H. (2008). Elliptic curves, Number theory ans Crypthografy. Second Edition, New York: Chapman Hall.

Yates, R. C. (1947). A Handbook on Curves and properties. Michigan: An Arbor.

Vainsencher, Irael. (2009). Introdução às Curvas Algébricas. Rio de Janeiro: IMPA.

Zdorov, Yu, A. (1980). Remarkable curves. Moscow: MIR