A NOÇÃO DE VARIÁVEL NO CONTEXTO HISTÓRICO DE DESENVOLVIMENTO DA ÁLGEBRA

João Cláudio Brandemberg – UFPA – brand@ufpa.br
Tatiana Lopes de Miranda – UFPA – tati_lomi@hotmail.com

RESUMO

Apresentamos, neste artigo, nosso estudo no campo da História da Matemática referente à Álgebra, em específico, o desenvolvimento da noção de variável ao longo da sua evolução conceitual. A investigação que realizamos concentrou-se em três períodos ou fases históricas da linguagem algébrica, a saber, os períodos retórico, sincopado e simbólico.

Buscamos identificar como as noções de variável incógnita, padrão generalizador e parâmetro surgiram e auxiliaram na construção e consolidação da Álgebra como um importante campo de estudo da matemática.

Palavras-chave: História da Matemática. História da Álgebra. Noção de Variável. Simbolismo Algébrico.

INTRODUÇÃO

A ideia de variável tem recebido considerável atenção na comunidade de pesquisa em Educação Matemática, tanto que os estudos sobre este assunto mostram que a variável representa um desafio para os alunos iniciantes em Álgebra, pois apresenta um conceito multifacetado que, no contexto de ensino, encontra-se em um meio estático sem que haja a alternação entre os significados que a variável pode assumir.

Este conceito multifacetado de variável abrange todas as definições oriundas de seus usos na matemática. Por exemplo, a variável pode ser um símbolo representativo de qualquer elemento de um conjunto que surge da necessidade de generalização de uma regra, pode ser a representação de um valor desconhecido momentaneamente e único e pode ser algo que varia continuamente, ou seja, pode significar padrões de generalização, incógnitas ou relações funcionais.

Segundo Fossa (2012, p.24) a principal discussão sobre o conceito de variável gira em torno de dois sentidos da palavra que foram confundidos: o sintático e o semântico. O autor afirma que, sintaticamente, a variável é uma letra que tem certos papéis específicos no formalismo algébrico. Semanticamente, a variável é aquilo que a letra representa, o que frequentemente é uma quantidade mensurável ou uma quantidade variável.

Procuramos, por meio de um estudo da História da Álgebra, identificar como três noções de variável (incógnita, padrão generalizador e parâmetro) surgiram e se firmaram, de modo a consolidar conceitualmente a Álgebra como uma área importante da Matemática. Nosso locus de investigação foi determinado e definido por três períodos classificados de acordo com a evolução da linguagem algébrica, a saber, os períodos retórico, sincopado e simbólico.

O LOCUS INVESTIGATIVO: Os períodos evolutivos da linguagem algébrica.

O PERÍODO RETÓRICO

Conforme nossa leitura do desenvolvimento histórico da Álgebra baseada na evolução de sua linguagem, o período inicial é conhecido como retórico, o qual recebe este nome devido à utilização somente de palavras da linguagem usual de cada civilização que apresentava conhecimento algébrico.

A linguagem retórica era o primeiro passo para criação de uma linguagem matemática, assim como afirmam Lima & Moisés (2000, p.27- 28), "A linguagem Matemática através de palavras é o primeiro passo da criação da linguagem especificamente matemática para a qual são escolhidas as palavras que mais direta e claramente expressam movimentos matemáticos".

O pensamento algébrico era expresso sem fazer uso dos símbolos e abreviações que utilizamos hoje. Todos os passos relativos aos esquemas operatórios sobre números e equações eram descritos em linguagem corrente. O pensamento algébrico expresso pela linguagem retórica foi característico dos povos mesopotâmicos, hindus, árabes e egípcios.

Os povos da antiguidade que citamos acima desenvolveram a noção de variável como incógnita ou valor desconhecido, que se caracterizava pela necessidade prática de interpretar situações de modo pragmático, ou seja, absoluto e objetivo, que procurava de forma intuitiva igualar duas quantidades, com a finalidade de encontrar o valor da quantidade desconhecida. Os métodos utilizados, em sua maior parte, estavam ligados a ideias aritméticas e não tinham como preocupação a busca por soluções gerais. A forma como apresentavam as técnicas de resolução, baseadas em vários casos particulares, justificava-se em muitos devido à noção de número como quantidade absoluta e mensurável que, apesar de em alguns casos ser desconhecida, está relacionada com as "coisas" que são conhecidas, tornando a determinação da quantidade desconhecida possível.

Em algumas civilizações específicas, tais como os mesopotâmicos e os egípcios, desenvolveu-se a noção de variável como incógnita ou valor desconhecido, tendo a resolução de problemas como característica principal desta noção. A resolução de problemas neste contexto surgiu da necessidade prática de interpretar situações de ordem política e social como, por exemplo, questões de produtividade dos povos e cobranças de impostos. Observa-se aqui que a noção de variável como incógnita dava a álgebra um caráter pragmático, ou seja, absoluto e o mais objetivo possível, e procurava, de forma intuitiva, igualar duas quantidades com a finalidade de encontrar o valor da quantidade desconhecida. A busca por soluções relacionava-se a equações particulares para resolver problemas específicos. Os métodos utilizados, em sua maior parte, estavam ligados a ideias aritméticas e não tinham como preocupação a busca por soluções gerais para esses tipos de equações (lineares e quadráticas). A forma como apresentavam suas técnicas de resolução, baseadas em vários casos particulares, pode ser justificada devido à noção de número como quantidade absoluta e mensurável que, apesar de em alguns casos ser desconhecida, está relacionada com as "coisas" que são conhecidas, tornando a determinação da quantidade desconhecida possível.

Outras civilizações, tais como os hindus e os chineses, também desenvolveram a noção de variável como incógnita; contudo, eles trabalhavam tanto com equações originárias de ordem prática, quanto em situações que recaiam em interpretações e manipulações geométricas, dando à noção de variável um caráter mais generalizador ao buscar formas canônicas de resolução. No sentido de variável como padrão generalizador, a equação estava relacionada a aspectos estruturais com propriedades e características bastante definidas, operando sobre ela mesma, com finalidade de encontrar soluções gerais. Os chineses, por exemplo, nos seus métodos apresentam substituições, aproximações e, embora também utilizassem a linguagem retórica, eles desenvolveram um conhecimento matemático muito sofisticado que envolvia sucessões finitas, a utilização do zero, do hoje conhecido triângulo de Pascal, coeficientes binomiais e métodos de interpolação.

O PERÍODO SINCOPADO

Entende - se como período sincopado o momento histórico de transição da linguagem algébrica, que deixava de usar exclusivamente a linguagem usual de uma determinada civilização para começar a ter uma simbologia própria. A linguagem sincopada, sob o ponto de vista da História da Matemática Europeia apareceu nos trabalhos de Diofanto de Alexandria (250 a. C.). Neste estágio da linguagem algébrica, observam -se palavras que aparecem continuamente nas resoluções de problemas. Estas palavras começaram a ser abreviadas para representar as estruturas comuns nas resoluções de problemas. A difusão da linguagem sincopada coincidiu com o surgimento da imprensa.

Esta linguagem sincopada da Álgebra, que apareceu na obra Arhitmetica de Diofanto, trata de um sistema simbólico baseado na abreviação, o que permitiu que diversas áreas do conhecimento utilizassem a Álgebra como ferramenta, possibilitando que se pensasse em um possível "formalismo simbólico". O período da linguagem sincopada foi marcado pela criação de símbolos, de modo que organizasse o pensamento algébrico de forma conexa, retirando elementos da experiência, tal como diz Whitehead (1987) para criar significados e estruturas próprias da Álgebra.

A linguagem algébrica utilizada por Diofanto, de acordo com Derbyshire (2006) parece primitiva aos nossos olhos, mas era muito sofisticada em seu tempo. Utilizava o sistema grego "alfabético" para escrever os números. Isto funcionou tomando o alfabeto grego comum de 24 cartas e aumentando-o com três letras obsoletas para dar um total de 27 símbolos. Estes foram divididos em três grupos de nove cada. As primeiras nove letras deste alfabeto representavam os dígitos de 1 a 9, o segundo, as dezenas de 10 a 90 e o terceiro, as centenas 100 - 900. Os gregos não tinham símbolo para zero.

Segundo Derbyshire (2006), no que se refere à escrita da variável, Diofanto, com a sua notação, não poderia representar mais do que um valor desconhecido, ou seja, ele teria o x, mas não teria o y ou o z na mesma equação, o que era um grande obstáculo para equações indeterminadas. Contudo, tal obstáculo não impediu que Diofanto apresentasse soluções para este tipo de equação.

Segundo Wussing (1998), o caráter algébrico da obra de Diofanto corresponde a uma elevada técnica de transformações de equações, que inclui a substituição com variáveis auxiliares, algo que posteriormente fundamentaria a matemática do período moderno. Ele resolve equações cúbicas e quárticas com um único termo desconhecido; sistemas de equações simultâneas em dois, três, quatro incógnitas, e um problema equivalente a um sistema de oito equações em 12 incógnitas. Diofanto tinha a noção de variável como incógnita e expressava seus métodos de resolução por meio de propriedades gerais, indicando um conhecimento da noção de variável como padrão generalizador. Uma das grandes contribuições do trabalho de Diofanto foi a tentativa sofisticada para o período de expressar o pensamento algébrico, de modo coerente, através de uma simbologia própria.

O PERÍODO SIMBÓLICO

Na História da Álgebra, o período simbólico é conhecido como o momento de consolidação da notação algébrica, dando à álgebra uma linguagem simbólica própria. A notação tinha como objetivo definir simbolicamente a variável, permitindo a escrita de equações e suas propriedades em regras gerais. Os objetos das operações matemáticas se tornaram as próprias expressões algébricas. O símbolo específico liberou a álgebra da escravidão do verbo e das ambiguidades da linguagem comum usada no cotidiano da sociedade.

Mais tarde, a linguagem algébrica se libertou de determinadas variações. Os significados se tornaram independentes dos símbolos que antes figuravam, tornando o acesso da Álgebra ao abstrato mais fácil e proporcionando uma modificação conceitual, na qual a Matemática passou a ser usada como ferramenta para outras ciências.

A linguagem simbólica se desenvolveu com mais intensidade na Europa, no período do Renascimento. A Álgebra estava passando por um período de estruturação linguística, em que símbolos específicos começaram a surgir para substituir as palavras usadas em abreviações da linguagem sincopada. Foi neste momento, por exemplo, em que surgiram os primeiros registros dos siem que apareceram, os primeiros registros dos sinais de "+" e "-", que mais tarde viriam a se tornar símbolos para operações aritméticas.

Um dos maiores matemáticos a contribuir para o desenvolvimento da linguagem simbólica foi François Viète (1540-1603). Ele não utilizou simbolismos em todos os seus estudos de álgebra; no entanto, ele deu o passo inicial para que a linguagem simbólica surgisse, dando a Álgebra uma representação linguística própria. Segundo Wussing (1998, p. 191), com o simbolismo de Viète, a álgebra ganhou certa maturidade, a qual é entendida como primeira etapa do desenvolvimento da linguagem simbólica da Álgebra. O autor afirma que, no período da Revolução Industrial, ocorreu uma segunda etapa de desenvolvimento da linguagem simbólica algébrica. O matemático Leonhard Euler (1707-1783) é um dos grandes representantes da Matemática, no inicio deste período. Em seus trabalhos, publicados entre as décadas de 1740 e 1770, Euler criou inúmeros símbolos que muito contribuíram para o desenvolvimento de vários ramos da Matemática, em particular, o Cálculo, a Teoria dos Números e a Álgebra. Segundo Euler (1972), a Álgebra se define como a ciência que nos permite determinar quantidades desconhecidas por meio de outras que conhecemos.

> O principal objeto da Álgebra e também de todos os outros ramos da Matemática, é determinar o valor de quantidades ainda não conhecidas. Isto é obtido, se considerarmos atentamente as condições dadas, as quais são expressas por números conhecidos. Por esta razão a Álgebra pode ser definida como, a Ciência que nos permite determinar quantidades desconhecidas por meio de outras que são conhecidas. (EULER, 1972, p.186).

Para Euler (1972, p. 187), "Em Álgebra, quando temos uma questão para resolver, nós representamos o número procurado por uma das últimas letras do alfabeto, e então consideramos de que modo com as condições dadas, podemos formar uma igualdade entre as duas quantidades". Observamos, aqui, uma sistematização na forma de representação simbólica.

Outros matemáticos de fundamental importância para o desenvolvimento da Álgebra e da noção de variável foram Niels Abel (1802-1829) e Evariste Galois (1811-1832). Segundo Kleiner (2007), os trabalhos de Abel e Galois proporcionaram uma mudança de objetivo e significado da Álgebra, a qual durante cerca de três milênios esteve relacionada à resolução de equações polinomiais até o quarto grau. Eles foram responsáveis por desenvolverem os passos iniciais da hoje conhecida teoria dos grupos, que é considerada uma segunda etapa no desenvolvimento da linguagem algébrica, marcada pelo começo do pensamento estrutural em Álgebra, o qual, segundo Brandemberg (2010), trata de um ''cálculo literal'', cujos elementos essenciais são os conjuntos, as relações e as propriedades, sendo admitida como último estágio a gênese da noção de estrutura algébrica, ou seja, os dois contribuíram para a consolidação da noção de variável como parâmetro no estudo das funções e com o estudo de estruturas.

ASPECTOS HISTÓRICOS DA NOÇÃO DE VARIÁVEL PRESENTES NOS DIAS ATUAIS

Como já discutimos, historicamente, a noção de variável passa por um longo período, marcado por diversos obstáculos, para se consolidar no campo do conhecimento algébrico. De acordo com Miranda & Brandemberg (2013), muitos desses obstáculos ainda são presentes no ambiente escolar nos dias atuais. Uma vez que os alunos, ao interpretarem situações problema, buscando um maior entendimento da Álgebra, não consolidam esta compreensão, devido a um grande obstáculo em sua interpretação, que é a tradução da linguagem usual para a linguagem matemática. Assim, como aconteceu com os povos antigos dos períodos retórico e sincopado (egípcios, mesopotâmicos e gregos), a tradução ainda está presa a princípios aritméticos que se refletem no modo como os alunos lidam com as operações ao descrever ou desenvolver equações e expressões algébricas. Muitos estudantes ainda estão presos à noção de número que eles trazem da aritmética estudada nas séries iniciais.

> [...] os alunos apresentam, muitas vezes, somente como conhecimentos prévios os conceitos básicos de aritmética e as representações numéricas. Por isso, estranham ao trabalhar com letras, elaborando, normalmente, significados inadequados para elas [...] O trabalho, nas séries iniciais, voltado unicamente para o ensino da aritmética, prejudica o ensino da álgebra, pois afeta a capacidade de abstração necessária ao trabalho algébrico desenvolvidos com expressões de caráter literal (MIRANDA & BRANDEMBERG, 2013, p.5).

Quanto ao processo de simbolização realizado pelos alunos, este nem sempre reflete, de forma clara e inequívoca, o que, de fato, os mesmos interpretam. Desta forma, como aconteceu com Diofanto, ao expor seus métodos de cálculo, ou com os egípcios, que tinham dificuldades de representar frações com numerador diferente de um, os estudantes apresentam dificuldades em representar e operar com as variáveis x, y e z em uma equação. Tal fato afeta o significado que é atribuído aos símbolos nas resoluções de problemas que envolvem a noção de variável como incógnita, a representação de regras em problemas direcionados para a noção de variável como padrão generalizador e o reconhecimento da relação entre variáveis na noção de parâmetro.

A interpretação que desvincula a Aritmética da Álgebra induz a uma compreensão restrita (fraca) da noção de variável no contexto escolar. A desarticulação do conhecimento aritmético e as invariantes pertinentes à interpretação simbólica fazem com que a Álgebra não adquira a representatividade necessária para os alunos a relacionarem com suas vidas. Na fala de Silveira (2005, p.2) "o signo matemático é "morto" na perspectiva do aluno. Na sala de aula, o professor, como leitor modelo, auxilia o aluno a dar vida a este signo "morto". Porém, a significação do signo isolado, às vezes, não adquire sentido na operação".

A noção de variável acaba por se prender ao símbolo, de maneira a não conseguir contemplar seu significado no contexto matemático. A tradução escrita da linguagem usual para a linguagem algébrica se transforma em um obstáculo de ordem epistemológica para a noção de variável, porque, como diz Wittgenstein (1987, apud Silveira, 2005), a intuição não caminha com o material morto da escrita e os símbolos universais da matemática não garantem sua significação na leitura do aluno sobre a representatividade da variável.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A história nos permitiu ver que um elemento foi fundamental para o desenvolvimento da álgebra: a linguagem. Esta, na forma de simbolismo, acarreta, na visão de Whitehead (1987), uma referência dupla entre símbolo e significado. Esta relação, ele a define como jogos de linguagem. Percebemos estes jogos no desenvolvimento da Álgebra na linguagem retórica, quando o pensamento matemático começou a ser expresso por meio da linguagem natural. No período retórico, a palavra retirada da linguagem comum estava associada ao número (objeto), representando o próprio número (objeto).

A palavra representava o valor da quantidade desconhecida, com a finalidade de assegurar que ali faltava algo (o valor desconhecido), de modo a constituir um caráter pragmático e intuitivo, caracterizado pela busca de igualar quantidades para encontrar o valor desconhecido em questão.

A linguagem sincopada trouxe avanços referentes à simbologia algébrica, apresentando conceitualmente um caráter geométrico e dedutivo, concebendo a álgebra e a noção de variável não só como relações entre quantidades desconhecidas, mas também como uma relação entre grandezas (noção de parâmetro).

A notação simbólica que se faz explicita, inicialmente, nos trabalhos de Viète, onde se nota uma separação entre símbolo e significado, consolida-se em uma linguagem simbólica, principalmente, com os trabalhos de Abel e Galois, os quais ratificam a independência do símbolo dos objetos ou das grandezas que deveriam figurar, ultrapassando a representação concreta e entrando, segundo Brandemberg & Mendes (2005, p.18), no domínio da Sintaxe, marcado pelo "cálculo com regras próprias e ignorantes de qualquer sistema particular que funcione com elas (números, por exemplo)".

Desta forma, criou-se o mito de que o significado é irrelevante para a Matemática, levando a mesma a ser concebida como objeto de estudo e, não mais como ferramenta, sendo desvinculada das aplicações, tornando-se pouco compreensível aos não estudiosos da área. A linguagem simbólica representou conceitualmente a criação de um caráter estrutural para a Álgebra, com propriedades definidas em si mesmas, em busca de soluções gerais. A variável, segundo Moura & Sousa (2005, p.38), representa a escrita de movimentos da realidade, a partir da palavra e da figura, aparecem na Matemática como reflexos dos movimentos de mudança.

Consideramos, assim, que o desenvolvimento histórico do conceito de variável apresenta uma relação direta com o conceito de número e de movimento, tendo sua formalização mais geral no século XIX, com a Teoria dos Grupos. O movimento da realidade, apontado por Moura & Sousa (2005), é expresso, efetivamente, nos períodos conhecidos como retórico e sincopado. Uma mudança conceitual da noção de variável se consolidou no período simbólico. A noção de variável como incógnita é predominante na educação básica.

REFERÊNCIAS

BRANDEMBERG, J.C. Uma Análise Histórico-Epistemológica do Conceito de Grupo. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

BRANDEMBERG, J.C & MENDES, I. .A. A estrutura de grupo e o ensino da Álgebra: influências no ensino da Matemática no Brasil na segunda metade do século XX. In: I SEMINÁRIO PAULISTA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2005, São Paulo (Brasil). Diálogos Temáticos 4 - História da Matemática. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística - USP, 2005.p. 16-21.

DERBYSHIRE, J. Unknown quantity: a real and imaginary history of algebra. Washington, D.C. Joseph Henry press.2006.

EULER, L. Elements of Algebra. EUA: Springer-Verlag, 1972.

FOSSA, J. A. O ensino do conceito de variável. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2012

KLEINER, I. A history of abstract algebra. Boston/EUA. Birkhauser Boston, 2007.

LIMA, L. & MOISÉS, R. P. A variável: escrevendo o movimento. A linguagem Algébrica 1. São Paulo, SP: CEVEC/CIARTE, 2000.

MIRANDA, T.L. & BRANDEMBERG, J. C. Uma Caracterização da Álgebra no ensino fundamental: a respeito dos Conteúdos do 8º ano. Campinas, SP: SNHMat, 2013.

MOURA, A. R. L.& SOUZA, M. C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. Zetetiké: Revista semestral do Cempem, Campinas, v. 13, n. 24, p. 11-45, jul./dez. 2005.

SILVEIRA, M.R.A. A crítica ao Ensino da Matemática. Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemática. v. 2.n.3. Jul.2005/dez.2005.p.1-7.

WHITEHEAD, A. N. Simbolismo: o seu significado e efeito. Edições 70, 1987.

WUSSING, H. Lecciones de historia de las matemáticas. Siglo XXI de España Editores.1998.