BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

e-ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v10i30.9910

AS TERNAS PITAGÓRICAS E SUA RELAÇÃO COM OS NÚMEROS CONGRUENTES: POSSIBILIDADES DE USO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

THE PYTHAGOREAN TRIPLES AND THEIR RELATIONSHIP WITH CONGRUENT NUMBERS: POSSIBILITIES OF USING THE HISTORY OF MATHEMATICS IN THE CLASSROOM

Inocêncio Fernandes Balieiro Filho[1]; Jaime Edmundo Apaza Rodriguez[2]; Edson Donizete de Carvalho[3]

RESUMO

Neste artigo, por meio de uma revisão histórica, estabelecemos uma discussão sobre dois problemas clássicos e paralelos: as ternas pitagóricas e os números congruentes. Em diferentes momentos históricos, foi possível encontrarmos referências às ternas pitagóricas e aos números congruentes. O primeiro registro histórico de algumas ternas aparece na tabuleta babilônica Plimpton 322. Em seguida, nos textos do *Sulvasutras*, vemos que Baudhayana, Manava, Apastamba e Katyayana já conheciam o teorema de Pitágoras e obtiveram algumas ternas mediante o teorema da diagonal. Por meio dos relatos de Proclus, conhecemos os procedimentos de Pitágoras e Platão que possibilitaram gerar algumas ternas e a solução para gerar todas as ternas aparece em *Os elementos* de Euclides. Na *Aritmética* de Diofanto encontramos o primeiro exemplo de ternas em números racionais. Os primeiros estudos sobre as ternas pitagóricas e triângulos racionais aparecem nos estudos de Brahmagupta, cujos resultados são reconsiderados por Mahavira, Bhaskara II e Karavinda Swami. Nas investigações de al-Khazin sobre ternas primitivas encontramos uma parametrização para gerá-las. Fermat estabeleceu que a área de um triângulo retângulo cujos lados são inteiros não é um quadrado racional e, em 1983, Tunnell determinou uma solução parcial para o problema dos números congruentes. Os resultados obtidos por meio da revisão histórica sobre o tema nos permitiu construir um material que pode ser

[1] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Professor assistente-doutor do Departamento de Matemática da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (UNESP), Ilha Solteira, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Alameda Rio de Janeiro, 266, Centro, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil, CEP: 15.385-000. E-mail: inocencio.balieiro@unesp.br

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-4012-959x.

[2] Doutor em Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Professor assistente-doutor do Departamento de Matemática da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (UNESP), Ilha Solteira, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Passeio Jaú, 308, Zona Sul, Ilha Solteira, SP, CEP: 15.385-000. E-mail: jaime.rodriguez@unesp.br

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1359-9898.

[3] Doutor em Engenharia Elétrica (UNICAMP). Professor Assistente Doutor do Departamento de Matemática da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (UNESP), Ilha Solteira, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Cassimiro de Abreu, 161, Nova Ilha, Ilha Solteira, SP, CEP: 15.385-000. E-mail: edson.donizete@unesp.br

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-1016-7632.

utilizado como um subsídio para o uso da História da Matemática em sala de aula, em diferentes níveis de ensino.
Palavras-chave: Ternas pitagóricas; Equação diofantina; Triângulos racionais; Números congruentes.

ABSTRACT

In this work, through a historical review, we establish a discussion about two classic and parallel problems: the Pythagorean tenderness and the congruent numbers. In different historical moments, it was possible to find references to Pythagorean triples and congruent numbers. The first historical record of some triples appears in the Babylonian tablet Plimpton 322. Then, in the texts of the Sulvasutras, we see that Baudhayana, Manava, Apastamba and Katyayana already knew the Pythagorean Theorem and obtained some triples through the diagonal theorem. Through Proclus' reports, we know the procedures of Pythagoras and Plato that made it possible to generate some triples and the solution to generate all triples appears in Euclid's' work, The Elements. In Diophantus' Arithmetic we find the first example of triples in rational numbers. The first studies on Pythagorean triples and rational triangles appear in Brahmagupta's studies, whose results are reconsidered by Mahavira, Bhaskara II and Karavinda Swami. In al-Khazin's investigations on primitive triplets we found a parameterization to generate them. Fermat established that the area of a right triangle whose sides are integers is not a rational square and, in 1983, Tunnell determines a partial solution to the problem of congruent numbers. The results obtained through the historical review on the subject allowed us to build a material that can be used as a subsidy for the use of the History of Mathematics in the classroom, at different levels of education.
Keywords: Pythagorean triple; Diophantine equation; Rational triangles; Congruent numbers.

Introdução

Alguns problemas relacionados às equações diofantinas são antigos e, ainda atualmente, temas de pesquisas em variadas áreas da Matemática, em especial, a Geometria Algébrica e sua ramificação com a Geometria Aritmética. Tais problemas podem ser caracterizados como: desprovidos de solução, com soluções parciais e com soluções diversas. Um desses problemas envolve as denominadas ternas pitagóricas, que estão intimamente relacionadas com o problema dos números congruentes, isto é, encontrar números naturais que representam áreas de triângulos retângulos, cujos lados têm para medidas os números racionais.

O delineamento desse problema, na História da Matemática, apareceu nos escritos de Diofanto (200 E.C. – 284 E.C.), Brahmagupta (598 – 670) e al-Khazin (900 – 971). Também Fibonacci (1170 – 1250) expõe um exemplo para aquele problema e Fermat (1601 – 1665) demonstra que a área de um triângulo retângulo racional não é um quadrado; entretanto, nos séculos que se seguiram, as pesquisas sobre o problema continuaram e, em 1983, Tunnell (1950) engendra uma resposta conjectural para o problema dos números congruentes. Em seu teorema, Tunnell estabelece uma resposta quase completa para esse problema antigo, fornecendo um teste simples para determinar quando um dado inteiro positivo n representa ou não a área de algum triângulo retângulo cujos lados têm para medidas os números racionais.

Considerando a necessidade da inclusão de uma dimensão histórica no ensino de Matemática, enfatizada por diversos pesquisadores da Educação Matemática, como Katz (2000) e Barbin (2002) que apontam que a História da Matemática possibilita uma melhor compreensão de conceitos e teorias matemáticas e, consequentemente, tem potencial para mudar a compreensão do professor sobre a Matemática e influenciar sua prática, neste artigo, por meio de uma revisão histórica, busca-se estabelecer uma discussão sobre dois problemas clássicos e paralelos: as ternas pitagóricas e os números congruentes e, com isso, apontar as potencialidades do desenvolvimento histórico desses problemas como fonte de material para o ensino de Matemática em sala de aula, em diferentes níveis.

Os resultados aqui apresentados foram obtidos por meio de uma pesquisa histórica de cunho qualitativo, do tipo bibliográfico descrito em Balieiro (2017), com as seguintes etapas: 1. Levantamento bibliográfico, para o levantamento dos documentos relacionados com a temática de estudo; 2. Documentação para a identificação de fontes primárias (textos originais) e secundárias (textos sobre o tema investigado, produzidos por outros autores); 3. Leitura de reconhecimento para obter uma visão global do tema e identificar se os textos selecionados, de fato, apresentam as informações procuradas; 3. Leitura seletiva para escolher o que será utilizado e excluir o que não é necessário ao tema pesquisado; 4. Leitura reflexiva que tem como objetivo diferenciar no material selecionado as ideias diretrizes e as ideias secundárias, buscando a compreensão delas; 5. Leitura interpretativa para relacionar as ideias apresentadas pelos autores estudados com o objeto de pesquisa, para a redação do texto.

Dessa forma, após a realização das etapas descritas, considerando os textos estudados, evidenciamos os trabalhos, de diferentes momentos históricos, em que foi possível encontrarmos referências às ternas pitagóricas e aos números congruentes. Com isso, esperamos que o material apresentado possa ser utilizado como um subsídio para o uso da História da Matemática no ensino de Matemática.

Ternas pitagóricas no período babilônico

Os babilônios estavam familiarizados com diversos conteúdos de matemática elementar. Segundo Katz (2009), o conteúdo da tabuleta de argila Plimpton 322, do período de Hamurabi, apresenta algumas ternas pitagóricas: $(120, 119, 169)$; $(3456, 3367, 4825)$; $(4800, 4601, 6649)$; $(13.500, 12.709, 18.541)$; $(72, 65, 97)$; $(360, 319, 481)$; $(2700, 2291, 3541)$; $(960, 799, 1249)$; $(600, 481, 769)$; $(6480, 4961, 8161)$; $(60, 45, 75)$; $(2400, 1679, 2929)$; $(240, 161, 289)$; $(2700, 1771, 3229)$ e $(90, 56, 106)$. Observamos nessas quinze ternas em números naturais um dos problemas mais antigos em Teoria Elementar dos Números, a saber: encontrar todos os triângulos retângulos cujos lados têm para medidas os números naturais, ou seja, encontrar todas as soluções (x, y, z) que satisfazem a denominada equação pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$.

O teorema da diagonal no *Sulvasutra* e as ternas no período indiano antigo

Os sacerdotes eruditos védicos Baudhayana (800 A.E.C.), Manava (750 A.E.C.), Apastamba (600 A.E.C.) e Katyayana (200 A.E.C.) conheciam o teorema denominado de Pitágoras e obtiveram algumas ternas "pitagóricas" por meio do teorema da diagonal. Esses resultados aparecem no *Sulvasutra* ou *Sulbasutra*, cujos conteúdos evidenciam uma preocupação com a arquitetura da arena destinada à prática ritualística védica, que inclui as formas geométricas e as medidas dos vários elementos associados com esse local sagrado. O termo *Sulvasutra* significa teoria da mensuração ou geometria e *sutra* significa um conjunto de regras para a construção de altares.

Segundo Divakaran (2018), o teorema da diagonal é resultado do teorema conhecido como de Pitágoras. No *Sulvasutra* não existe a denominação de teorema da diagonal, mas em textos posteriores, conforme Divakaran (2018), os geômetras se referem a ele com esse nome. O teorema da diagonal, no *Sulvasutra*, "é usado para construir triângulos retângulos semelhantes em que as formas mais complicadas do altar são decompostas, como um meio de aumentar suas áreas." (Divakaran, 2018, p. 46).

O teorema da diagonal está descrito no capítulo 1, no sutra (trecho) 12 de Baudhayana, da seguinte forma: "As áreas (dos quadrados) produzidas separadamente pelo comprimento e largura de um retângulo são iguais à área (do quadrado) produzida pela diagonal." (Divakaran, 2018, p. 46). No sutra 13 de Baudhayana encontram-se as ternas diagonais: "Isso é observado em retângulos cujos lados têm para medidas os números 3 e 4, 12 e 5, 15 e 8, 7 e 24, 12 e 35, 15 e 36." (Divakaran, 2018, p. 46).

Desse modo, Baudhayana conhecia as consecutivas ternas: $(3,4,5)$, $(5, 12, 13)$, $(7, 24, 25)$ e $(15, 36, 39)$, $(8, 15, 17)$ e $(12, 35, 37)$. Por fim, constatamos que Manava, no capítulo 11, no sutra 17 e Apastamba, no capítulo 1, no sutra 2, estabelecem que:

> A propriedade de escala era conhecida dos autores de *Sulvasutra*: Apastamba (em 1.2, antes da enunciação do teorema geométrico), tem um procedimento para aumentar áreas de triângulos que depende de escala e, explicitamente, Manava (11.17) diz: Os lados (de um triângulo retângulo) são construídos com 3, 4 e 5. Os dos outros são construídos multiplicando (esses números) pelas (quantidades) desejadas, conforme podem exigir a (construção de) altares; isso sempre foi prescrito por antigos professores (Divakaran, 2018, p. 47).

Diante do exposto fica evidente que os "matemáticos" védicos Baudhayana, Manava e Apastamba conheciam o denominado teorema de Pitágoras, estabeleceram algumas ternas e que, mediante uma terna primitiva, podiam construir outras ternas.

Sobre as ternas pitagóricas nos períodos clássico e helenístico grego

A história mais antiga sobre a Matemática Grega foi escrita por Eudemo de Rodes (350 A.E.C. – 290 A.E.C.), discípulo de Aristóteles de Estagira (384 A.E.C. – 322 A.E.C.). De fato, nós a conhecemos sob os títulos: História da Aritmética, História da Astronomia e História da Geometria escritas por Eudemo; em vários relatos, os conteúdos desse último trabalho foram citados por Proclus de Lício (411 – 485) em seu tratado "Comentários sobre o primeiro livro de *Os elementos* de Euclides". De sorte que, nesse compêndio de Proclus (1992), por meio da História da Geometria de Eudemo, conhecemos Pitágoras de Samos (569 A.E.C. – 475 A.E.C.), como aquele que transformou, examinou e estudou a geometria e a aritmética grega.

Entretanto, as contribuições matemáticas e filosóficas de Pitágoras são difíceis de identificar, uma vez que ele não nos deixou algum escrito, mas lhe são creditadas algumas das descobertas da escola pitagórica. Consoante Proclus (1992), uma das contribuições da escola pitagórica é a importância estabelecida à noção de "número" e sua interconexão com as figuras geométricas que lhes sinalizaram um desenvolvimento de uma "matemática" inspirada na teoria dos números figurados: representação de números naturais mediante configurações geométricas de seixos discretos para esboçar triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos etc. Por isso, atualmente, afirmamos que um número figurado é um número natural que pode ser representado em um plano mediante um padrão geométrico regular e discreto de pontos igualmente espaçados.

As concepções pitagóricas influenciaram algumas das concepções filosóficas de Platão e, consequentemente, a ciência e a filosofia grega posteriores até Proclus. Por exemplo, Proclus outorga a Pitágoras o famoso teorema que relaciona os três lados de um triângulo retângulo; além disso, atribui-lhe o método de encontrar triângulos retângulos mediante três números m, $\frac{m^2-1}{2}$ e $\frac{m^2+1}{2}$, onde $m \in N$, com $m \geq 3$ e m um número ímpar, que satisfazem a equação: $m^2 + \left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2$ conhecida como *fórmula de Pitágoras* para gerar ternas. Segundo Proclus (1992):

> Certos métodos foram transmitidos para encontrar tais triângulos retângulos, um deles atribuído a Platão, o outro a Pitágoras. O método de Pitágoras começa com números ímpares, postulando um determinado número ímpar sendo o menor dos dois lados do triângulo retângulo que contém o ângulo reto, tomando seu quadrado, subtraindo um deles e postulando metade dessa diferença o maior dos lados que contêm o ângulo reto; então, adicionando um àquele quadrado, obtém o lado restante, o qual subtende o ângulo reto. Por exemplo, considere três, eleve ao quadrado, subtraia um de nove, considere a metade de oito, ou seja, quatro, depois adicione um àquele quadrado, considere a metade de dez e obtém cinco; e assim é encontrado o triângulo retângulo com lados três, quatro e cinco (Proclus, 1992, p. 340).

Proclus atribui a Platão de Atenas (427 A.E.C. – 347 A.E.C.) o método de encontrar triângulos retângulos mediante três números $2m$, $m^2 - 1$ e $m^2 + 1$, onde $m \in N$, com $m \geq 2$ e m um número par ou um número ímpar, que satisfazem a equação: $(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$ conhecida como fórmula de Platão para gerar ternas. Proclus (1992) nos explica a fórmula:

> O método platônico procede de números pares. Ele considera um determinado número par como um dos lados que contém o ângulo reto, divide-o em dois e eleva ao quadrado a metade, e subtrai um desse quadrado e obtém o outro lado que contém o ângulo reto, em seguida, adiciona um àquele quadrado e obtém o lado que subtende ao ângulo reto. Por exemplo, considere quatro, divide-o pela metade e eleve ao quadrado essa metade, ou seja, dois, obtendo quatro; em seguida, subtraindo um, obtém três e adicionando um obtém cinco, e assim construiu o mesmo triângulo que foi alcançado pelo outro método. Uma vez que o quadrado desse número é igual ao quadrado de três e ao quadrado de quatro considerados juntos (Proclus, 1992, p. 340).

O primeiro tratado extenso escrito de Geometria Grega apareceu por volta de 300 A.E.C. e, felizmente, foi preservado à posteridade. Esse trabalho, conhecido pelo título

Os elementos, compõe-se de treze livros (⍰⍰⍰⍰⍰⍰⍰) ou capítulos que foram confeccionados por Euclides de Alexandria (325 A.E.C. – 265 A.E.C.).

Em relação àquelas fórmulas, propostas por Pitágoras e Platão, afirmamos que se completam, porém nenhuma delas fornece uma solução geral para o estabelecimento de todas as ternas. Com efeito, tal solução geral pode ser obtida pelo lema 1, para a proposição 29, do livro X, de *Os elementos* de Euclides, a saber: Achar dois números quadrados, de modo a também o composto deles ser um quadrado.

> Fiquem expostos os dois números AB, BC, e sejam ou pares ou ímpares. E como, tanto caso um par seja subtraído de um par quanto caso tanto um ímpar, de um ímpar, o resto é par [Livro IX, Prop. 24] e [Livro IX, Prop. 26], portanto, o resto AC é par. Fique cortado o AC em dois no D. E sejam também os AB, BC ou planos semelhantes ou quadrados, que são também, eles mesmos, planos semelhantes; portanto, o dos AB, BC, com o quadrado sobre [o] CD, é igual ao quadrado sobre o BD [Livro II, Prop. 6]. E o dos AB, BC é um quadrado, porque foi provado que, caso dois planos semelhantes, tendo sido multiplicados entre si, façam algum, o produzido é um quadrado [Livro IX, Prop. 1]. Portanto, foram achados dois números quadrados, tanto o dos AB, BC quanto o sobre o CD, que tendo sido compostos, fazem o quadrado sobre o BD. E é evidente que foram achados de novo dois quadrados, tanto o sobre o BD quanto o sobre o CD, de modo que o excesso deles, o pelos AB, BC, ser um quadrado, quando os AB, BC sejam planos semelhantes. Mas, quando não sejam planos semelhantes, foram achados dois quadrados, tanto o sobre o BD quanto o sobre o DC, dos quais o excesso, o pelos AB, BC, não é um quadrado; o que era preciso provar (Euclides, 2009, p. 381-382).

Para demonstrar esse lema 1, o geômetra alexandrino utiliza, nesta ordem, a proposição 24, do livro IX – Euclides (2009, p. 344): “Caso de um número par um par seja subtraído, o restante será par”; a proposição 26, do livro IX – Euclides (2009, p. 344): “Caso de um número ímpar um ímpar seja subtraído, o restante será par”; a proposição 6, do livro II – Euclides (2009, p. 140): “Caso uma linha reta seja cortada em duas, e seja adicionada a ela alguma reta sobre uma reta, o retângulo contido pela reta toda junto com a adicionada e pela adicionada, com o quadrado sobre a metade, é igual ao quadrado sobre a composta tanto da metade quanto da adicionada”; ou seja, cuja interpretação algébrica é: $x(x-b)=\left(x-\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$; e, por fim, a proposição 1, do livro IX – Euclides (2009, p. 325): “Caso dois números planos semelhantes, tendo um multiplicado o outro, façam algum, o produzido será um quadrado”.

Cumpre-nos, neste parágrafo, incluir alguns comentários sobre o significado de números planos semelhantes que aparecem da demonstração do lema 1, para a proposição 29, do livro X. E assim se pronuncia Euclides (2009, p. 270), no livro VII, na definição

22: "Números planos e sólidos semelhantes são os que têm os lados em proporção". Com o recurso de um exemplo, esse conceito ficará evidente – os números naturais 18 e 8 são números planos semelhantes; o número 18, em especial, representa um retângulo cujos lados têm para medidas os números 3 e 6 e o número 8, particularmente, representa um retângulo cujos lados têm para medidas os números 2 e 4. Logo, os lados desses retângulos, com medidas 6 e 4 são proporcionais. E, ainda, para ilustrar aquela proposição 1, do livro IX, considere 18 e 8 os dois números planos semelhantes; assim, temos $18 \times 8 = 144 = 12^2$. Portanto, o produto desses dois números planos semelhantes é um quadrado.

Para explicitar a demonstração do lema 1, para a proposição 29, do livro X, isto é, achar dois números quadrados, de modo a também o composto deles ser um quadrado, passemos a estudar separadamente, os trechos importantes daquela apresentação de Euclides e, para isso, com algumas modificações, seguiremos as explicações de Duvillié (1999):

1. Em conformidade com a demonstração de Euclides, temos que $\underline{AB} > \underline{BC}$, $\underline{AB}$ e $\underline{BC}$ são simultaneamente números pares ou ímpares e $\underline{AC} = \underline{AB} - \underline{BC}$ tem a mesma paridade que $\underline{AB}$ e $\underline{BC}$; 2. Euclides considera os números $\underline{AB}$ e $\underline{BC}$ como números planos semelhantes (quadrados), quer dizer, números naturais da forma $mp \times np$ e $mq \times nq$, com $q > p$; 3. Neste caso, podemos representá-los por retângulos, a saber: se um retângulo cujos lados têm para medidas os números naturais m e n, então sua área é expressa por $m \times n$; assim, se um retângulo cujos lados têm para medidas os números naturais mp e np, então sua área tem como medida $\underline{BC} = mp \times np = mnp^2$; e, também, se um retângulo cujos lados têm para medidas os números naturais mq e nq, então sua área tem como medida $\underline{AB} = mq \times nq = mnq^2$; 4. $\underline{AB} \times \underline{BC} = m^2n^2p^2q^2$; 5. $\left(\underline{CD}\right)^2 = \left(\frac{\underline{AC}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\underline{AB}-\underline{BC}}{2}\right)^2 = \left(\frac{mnq^2-mnp^2}{2}\right)^2 = \frac{m^2n^2q^2-2m^2n^2p^2q^2+m^2n^2p^4}{4}$; 6. $\left(\underline{DB}\right)^2 = \left(\underline{BC} - \underline{CD}\right)^2 = \left(mnp^2 + \frac{mnq^2-mnp^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{mnq^2+mnp^2}{2}\right)^2$; 7. $\left(\underline{AB} \times \underline{BC}\right) + \left(\underline{CD}\right)^2 = m^2n^2p^2q^2 + \frac{m^2n^2q^4-2m^2n^2p^2q^2+m^2n^2p^4}{4}$; 8. $\left(\underline{AB} \times \underline{BC}\right) + \left(\underline{CD}\right)^2 = \frac{m^2n^2q^4+2m^2n^2p^2q^2+m^2n^2p^4}{4} = \left(\frac{mnq^2+mnp^2}{2}\right)^2$; 9. Logo, ao compararmos as expressões das linhas (8) e (6), temos $\left(\underline{AB} \times \underline{BC}\right) + \left(\underline{CD}\right)^2 = \left(\underline{DB}\right)^2$; 10. Portanto, essa última equação

da linha 9 escreveremos da seguinte forma: $(mnpq)^2 + \left(\frac{mnq^2-mnp^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{mnq^2+mnp^2}{2}\right)^2$.

Na equação da linha 10, ao substituir $p = 1$ e ao dividi-la, em ambos os membros da igualdade, por mn, obtemos a fórmula de Pitágoras: $q^2 + \left(\frac{q^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{q^2+1}{2}\right)^2$ onde $q \in N$, com $q \geq 3$ e q um número ímpar. E ao multiplicar essa última equação, em ambos os membros da igualdade por 4, obtemos a fórmula de Platão: $(2q)^2 + (q^2-1)^2 = (q^2+1)^2$ onde $q \in N$, com $q \geq 2$. Por fim, ao multiplicar aquela equação da linha 10, em ambos os lados da igualdade por $\frac{4}{(mn)^2}$, obtemos a fórmula de Euclides: $(2pq)^2 + (q^2-p^2)^2 = (q^2+p^2)^2$, onde $q \in N$, com $q > p \geq 1$. Dessa maneira, por meio do lema 1, Euclides demonstrou uma fórmula que pode ser facilmente usada para encontrar todas as soluções que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = z^2$.

Em continuidade, faremos a seguinte pergunta: há uma relação da equação $x^2 + y^2 = z^2$ e suas soluções com alguns dos problemas estudados por Diofanto? A resposta para essa indagação é sim! Diofanto de Alexandria (200 E.C. – 284 E.C.) é um dos estudiosos da antiguidade cujo nome é mencionado pelos matemáticos contemporâneos, especialmente, no contexto da Teoria dos Números e da Geometria Algébrica. Infelizmente, sobre a vida de Diofanto sabemos apenas que viveu em Alexandria – o centro da atividade científica, filosófica e matemática grega durante vários séculos (323 A.E.C. – 642 E.C.). Em relação ao seu trabalho matemático, conhecido pelo nome de *Aritmética*, sabe-se que sua influência ultrapassou os limites do tempo. O matemático Diofanto escreveu no final da sua introdução à sua *Aritmética* que, para elaboração dos conteúdos, seu tratado será dividido em treze livros (⍰⍰⍰⍰⍰⍰⍰) ou capítulos. Atualmente conhecemos somente sete livros, os quais compreendem os livros I a III (em grego) e IV a VII (em árabe).

Ainda na introdução da *Aritmética*, Diofanto (1926) define os termos matemáticos que serão empregados em sua obra e descreve-os como sinais abreviativos para denotar as diferentes potências das quantidades desconhecidas, a saber: $\Delta^{\Upsilon} = x^2$, $K^{\Upsilon} = x^3$, $\Delta^{\Upsilon}\Delta = x^4$, $\Delta K^{\Upsilon} = x^5$ e $K^{\Upsilon}K = x^6$, a própria quantidade desconhecida $\varsigma = x$ (*arithmos*) e as unidades M^o (*monas*).

Com essas considerações preliminares, analisaremos o problema VIII, do livro II, da *Aritmética* de Diofanto, que propõe dividir um quadrado proposto ($16 = 4^2$) em dois quadrados:

> Dividir um quadrado proposto em dois quadrados. Então, propomos dividir 16 em dois quadrados [1]. Vamos considerar que o primeiro número é 1 quadrado de *arithmos* [2]. Assim, o outro número será de 16 unidades menos 1 quadrado de *arithmos*. É necessário, portanto, que 16 unidades menos 1 quadrado de *arithmos* sejam iguais a um quadrado [3]. Formemos o quadrado de uma quantidade qualquer de *arithmos* diminuída de tantas unidades quantas as que possuem a raiz de 16 unidades [4]. Que seja o quadrado de 2 *arithmos* menos 4 unidades. Então, esse quadrado será 4 quadrados de *arithmos* mais 16 unidades menos 16 *arithmos* [5]. Igualemos a 16 unidades menos 1 quadrado de *arithmos*; adicionamos em ambos os lados os termos negativos, e subtraímos os semelhantes dos semelhantes [6]. Segue-se que 5 quadrados de *arithmos* são iguais a 16 *arithmos*, e o *arithmos* torna-se 16/5 [7]. Portanto, um dos números será 256/25 e o outro será 144/25 [8]. Logo, esses dois números adicionados formam 400/25, isto é, 16 unidades, e cada um deles é um quadrado [9] (Diofanto, 1926, p. 53-54).

Na sequência, em notação moderna, seguindo os números indicados nos colchetes naquela citação, estabeleceremos a solução e o método utilizado por Diofanto. Assim, elucidamos, separadamente, cada uma dessas etapas: [1] Dividir 16 em dois quadrados. [2] Considere o primeiro quadrado, ou seja, x^2; então o outro quadrado será $16 - x^2$; [3] deve-se, portanto, fazer $16 - x^2 = q$ um quadrado. [4] Formemos um quadrado com esta configuração $(qx - 4)^2$, na qual q um inteiro positivo e 4 a raiz de 16; [5] por exemplo, seja o lado do quadrado $2x - 4$ e o quadrado desse lado $4x^2 + 16 - 16x$. [6] Assim, $4x^2 + 16 - 16x = 16 - x^2$. Adicione, nessa igualdade, em ambos os lados, o termo $x^2 + 16x$ e subtraia 16. [7] Logo, $5x^2 = 16x$ e dividindo-a, em ambos os lados por $5x$, obtemos $x = 16/5$. [8] e [9] Por isso, um número será $x^2 = 256/25$ e o outro número será $16 - x^2 = 144/25$, que ao adicioná-los temos como soma $400/25$ ou 16. Portanto, cada um deles é um quadrado: $\frac{256}{25} = \left(\frac{16}{5}\right)^2$ e $\frac{144}{25} = \left(\frac{12}{5}\right)^2$, que constituem uma solução $\left(\frac{16}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{400}{25} = 16$ do problema de Diofanto.

O problema VIII, do livro II de Diofanto, pode ser enunciado como se segue: encontrar os valores de x e y que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 16$; desse modo, as soluções dessa equação relacionam-se com as ternas (x, y, z). De acordo com as ponderações sobre o método apresentado por Diofanto que acabamos de fazer no parágrafo anterior, podemos expressá-lo de forma geral. Com efeito, ao considerar $z =$

1, na equação $x^2 + y^2 = z^2$, temos $x^2 + y^2 = 1$; nesta equação, excluindo os casos triviais, temos que $x \neq 0$; assim, repetindo a ideia de Diofanto, escrevemos y da seguinte forma: $y = 1 - mx$, onde $m \in Q$; em seguida, substituindo-o em $x^2 + y^2 = 1$ temos $x^2 + (1 - mx)^2 = 1$. Logo, $x^2 + 1 - 2mx + m^2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2(m^2 + 1) = 2mx \Leftrightarrow x = \frac{2m}{1+m^2}$; e, então, ao substituí-lo, nesta equação $y = 1 - mx$, temos $y = 1 - m\left(\frac{2m}{1+m^2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1-m^2}{1+m^2}$.

Portanto, temos para os valores de x e y um conjunto infinito de soluções racionais que satisfaz a equação $x^2 + y^2 = 1$. Além disso, se substituirmos m por $\frac{q}{p}$, onde $q, p \in Z$ e $(p, q) = 1$, isto é, com p e q são relativamente primos, temos $x = \frac{2m}{1+m^2} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{2q}{p}}{1+\frac{q^2}{p^2}} \Leftrightarrow x = \frac{2pq}{p^2+q^2}$ e $y = \frac{1-m^2}{1+m^2} \Leftrightarrow y = \frac{1-\frac{q^2}{p^2}}{1+\frac{q^2}{p^2}} \Leftrightarrow y = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$ e, em seguida, ao multiplicarmos x, y e z por $p^2 + q^2$, temos $x = 2pq$, $y = p^2 - q^2$ e $z = p^2 + q^2$. Portanto, temos para os valores de x, y e z um conjunto infinito de soluções inteiras que satisfaz a equação $x^2 + y^2 = 1$. Em resumo, com essas reflexões, também, exprimimos a fórmula de Euclides.

As ternas pitagóricas e os triângulos racionais no período indiano clássico e depois

Em linhas anteriores constatamos que, desde o período dos *Sulvasutras*, os eruditos védicos conheciam já o teorema de Pitágoras e algumas das propriedades de triângulos retângulos. Em conformidade com Joseph (2016), Brahmagupta (598 – 670) foi o primeiro matemático a estudar propriedades de triângulos retângulos racionais. Assim, ao considerar esses triângulos retângulos cujos catetos têm para medidas os números racionais a e b, e a hipotenusa tem para medida o número racional positivo c e a área um número racional positivo, conforme Joseph (2016), Brahmagupta obteve como solução para esse problema as seguintes relações: $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$ e $c = m^2 + n^2$ onde $m, n \in Q_+^*$, com $m > n$. Por exemplo, quando $m = 2$ e $n = 1$ obtemos a terna $(4, 3, 5)$, se $m = 4$ e $n = 3$, a terna $(24, 7, 25)$ e se $m = 6$ e $n = 3$ a terna $(36, 27, 45)$. E, por exemplo, se $m = \frac{1}{2}$ e $n = \frac{1}{3}$ obtemos a terna $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{36}, \frac{13}{36}\right)$ que satisfaz a equação $a^2 + b^2 = c^2$ e cuja medida de área desse triângulo retângulo é $\frac{195}{2592}$.

Ainda sobre esse assunto, Srinivasiengar (1988) afirma que Brahmagupta também apresentou algumas modificações em relação ao problema exposto acima e, o historiador, destaca que Mahavira (800 – 870), Bhaskara II (1114 – 1185) e o comentador Karavinda Swami forneceram soluções para aquele problema:

> (a) Dado o lado a ou b, para construir o triângulo retângulo cujos lados têm para medidas os números racionais. A solução de Brahmagupta é: a, $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{m}-m\right)$ e $\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{m}+m\right)$, onde m é um número racional diferente de zero. Mahavira e Bhaskara fornecem a solução: a, $\left(\frac{2n}{n^2-1}\right)a$ e $\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)a$, ao passo que Karavinda Swami fornece a solução: a, $\left(\frac{n^2+2n}{2n+2}\right)a$ e $\left(\frac{n^2+2n+2}{2n+2}\right)a$. Essas soluções são simples transformações do resultado de Brahmagupta. Se substituirmos $m=\left(\frac{n-1}{n+1}\right)a$ no resultado de Brahmagupta, obteremos a solução de Mahavira-Bhaskara, e se substituirmos $m=\frac{a}{n+1}$ no resultado de Brahmagupta, obteremos a solução de Karavinda Swami. (b) Dado o lado c da hipotenusa, para construir o triângulo retângulo cujos lados têm para medidas os números racionais positivos. Podemos mencionar isso aqui, embora Brahmagupta não trate desse problema. Mahavira estabelece a solução: c, $\left(\frac{2mn}{m^2+n^2}\right)c$ e $\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)c$, ao passo que Bhaskara estabelece a solução: c, $\left(\frac{2p}{p^2+1}\right)c$ e $\left(\frac{p^2-1}{p^2+1}\right)c$. Essa solução segue prontamente da solução de Mahavira, substituindo $\frac{m}{n}=p$. Ambos os problemas (a) e (b) são facilmente adaptados das soluções gerais: $a=m^2-n^2$, $b=2mn$ e $c=m^2+n^2$. Dividindo ambas por $\frac{a}{2mn}$, e depois substituindo $\frac{an}{m}=p$, obtemos a solução em (a). Dividindo por m^2+n^2 obtemos a solução em (b). Dickson [teórico dos números e historiador] evidentemente não tinha conhecimento dos tratados de Mahavira e Brahmagupta, quando atribuiu os resultados de (a) e (b) a Leonardo de Fibonacci (1202) e a Viète (1580) (Srinivasiengar, 1988, p. 60-61).

Portanto, ao finalizar essas considerações, afirmamos que os matemáticos indianos Brahmagupta, Mahavira e Bhaskara II e o comentador Karavinda Swami obtiveram soluções gerais para o problema dos triângulos retângulos racionais (triângulos retângulos com lados racionais) e vislumbramos o início dos problemas relacionados com os números congruentes.

Neste ponto, faremos uma momentânea interrupção histórica, para definirmos ternas primitivas. Por exemplo, a terna $(3,4,5)$ tem a propriedade de que $(3,4,5)=1$, isto é, 3, 4 e 5 são pares relativamente primos, os quais, nessa ordem, satisfazem a equação $x^2+y^2=z^2$; e se multiplicarmos uma solução x, y e z por qualquer número $d \in N$, com $d>1$, também essa nova terna dx, dy e dz é uma solução daquela equação pitagórica. Consequentemente, limitamos nossa discussão às ternas primitivas. Cabe, porém, salientar que nenhuma das fórmulas (Pitágoras ou Platão) gera todas as ternas pitagóricas primitivas; por exemplo, a terna $(5, 12, 13)$ não é gerada por alguma dessas fórmulas.

Sobre as ternas pitagóricas no período dourado Islâmico

A história da Matemática Islâmica começa com a formação do Império Abássida por volta de 760 e com a fundação de Bagdá, a nova capital. Segundo Katz (2009), no final do século VIII, astrônomos indianos foram recebidos na corte dessa nova capital e algumas obras astronômicas foram traduzidas do sânscrito para o árabe. Conforme o autor, no início do século IX, os califas estabeleceram em Bagdá a Bayt al-Hikma (Casa da Sabedoria), uma espécie de academia científica e introduziram nesse mundo islâmico, por diferentes maneiras, vários tratados científicos escritos em sânscrito, pérsia, siríaco e grego que foram traduzidos por eruditos islâmicos associados à Casa da Sabedoria sob o patrocínio do califa de Bagdá. Nesse cenário, encontramos o matemático e astrônomo Abu Jafar Muhammad ibn al-Husan al-Khazin (900 – 971) que viveu em Khorasan, no leste do Irã.

O matemático persa al-Khazin demonstra três lemas com o intuito de estabelecer uma proposição relacionada às ternas primitivas. Para uma análise dos lemas e da proposição consideramos as pesquisas de Rashed (1994). Primeiramente, este enfatiza que na demonstração do lema, al-Khazin, utiliza segmentos de reta e a proposição 22, do livro IX, de *Os elementos*, que diz o seguinte:

> **Lema 1.** Não existe qualquer par de números inteiros ímpares quadrados cuja soma é um quadrado.
> Demonstração. Seja (a, b) um par de números inteiros ímpares quadrados tais que $a + b = c$, onde c é um quadrado (1). Sejam $a = x^2$, $b = y^2$ e $c = z^2$. Assim, (1) é escrito como $x^2 + y^2 = z^2$. Como a e b são números ímpares, temos que c é um número par; logo, x e y são números ímpares e z é um número par. De (1), deduzimos $x^2 = z^2 - y^2 = (z + y)(z - y) = (z - y)^2 + 2y(z - y)$. (2) No entanto $(z - y)$ é um número ímpar, logo $z - y = 2p + 1$. Por outro lado, $x^2 = [x + (z - y)][x - (z - y)] + (z - y)^2$. (3)
> De (2) e (3) deduzimos $2y(z - y) = [x + (z - y)][x - (z - y)]$. Assumimos $z - y = 2p + 1$, então $x + (z - y)$ é um número par e $x - (z - y)$ é um número par; o segundo membro é divisível por 4; mas, no primeiro membro, $y(z - y)$ é um número ímpar. Portanto, a igualdade é impossível. Daqui a conclusão (Rashed, 1994, p. 210-211).

No lema 2, al-Khazin, demonstra que $x^2 + y^2 = 2^m(1 + 2^{2p})$ nunca será um quadrado. O historiador ressalta que, al-Khazin, o demonstrou usando segmentos de reta e para concluí-lo emprega implicitamente a proposição 24, do livro VIII, de *Os elementos* de Euclides.

> **Lema 2.** É impossível que os lados de dois quadrados, cuja soma é um quadrado, ser sempre par.
> Demonstração. Assumimos $x = 2^m$ e $y = 2^n$ com $m < n$. Se $p = n - m$, então $\frac{x}{y} = \frac{1}{2^p}$, de onde deduzimos $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{2^{2p}}$ e $\frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+2^{2p}}$. Mas, $1 + 2^{2p}$ não é um quadrado [já que dois quadrados nunca são consecutivos]; portanto, também, $x^2 + y^2$ não é um quadrado (Rashed, 1994, p. 211-212).

O historiador evidencia que a identidade estabelecida no lema 3 é verificada para a ímpar e b par, e para a e b pares, utilizando a proposição 8, do livro II, de *Os elementos* de Euclides. Com essas considerações exporemos o terceiro lema de al-Khazin, segundo Rashed (1994, p. 212): "*Lema 3.* $(a + b)^2 = b^2 + 4\frac{a}{2}\left(b + \frac{a}{2}\right)$".

Em relação à proposição 1, Rashed (1994) elucida algumas questões: a primeira explicação é que al-Khazin, implicitamente, usa várias proposições (9, 24 e 26 do livro VIII e 2 do livro IX) de *Os elementos* de Euclides em sua análise. Por conseguinte, afirmamos que esse tratado euclidiano constituía uma fonte comum para os matemáticos daquela época. A segunda explicação, em conformidade com Rashed (1994), é que al-Khazin não fornece a síntese dessa proposição. De fato, ela foi exposta quando discorremos sobre a fórmula de Euclides, ou seja, essa síntese, aparecesse no lema 1, para a proposição 29, do livro X, de *Os elementos* de Euclides: Achar dois números quadrados, de modo a também o composto deles ser um quadrado.

Assim, segundo Rashed (1994), se combinarmos a análise de al-Khazin com a síntese de Euclides, teremos as seguintes condições que são equivalentes: (a) $x^2 + y^2 = z^2$ e (b) existe um par de números inteiros (p, q) tais que $0 < q < p$, $(p, q) = 1$ e p e q têm paridades opostas, tais que $x = 2pq$, $y = p^2 - q^2$ e $z = p^2 + q^2$. Desse modo, o lema 1 (síntese) de Euclides quer dizer que (b) implica (a); e a proposição (análise) de al-Khazin que dizer que (a) implica (b). Diante dessas explanações exporemos a proposição de al-Khazin que fixa um procedimento para obter ternas primitivas.

> **Proposição 1.** Encontre dois números quadrados, um par e o outro ímpar, relativamente primos, cuja soma é um quadrado. O que significa: encontre ternas pitagóricas primitivas.
> Análise. Suponha que esses números existam. Sejam x, y dois números tais que x é par e y ímpar, e que: $x^2 + y^2 = z^2$. (1) O conjunto $t = z - y$, t é par, uma vez que y e z são ímpares, e expressamos $z = \left(y + \frac{t}{2}\right) + \frac{t}{2}$. (2) De acordo

> com o lema 3, temos: $z^2 = y^2 + 4\left(y + \frac{t}{2}\right)\frac{t}{2}$ e, por isso, $x^2 = 4\left(y + \frac{t}{2}\right)\frac{t}{2}$; logo, $\left(y + \frac{t}{2}\right)\frac{t}{2}$ é um quadrado e, também, $\frac{\left(y+\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}$. Escreveremos $\frac{\left(y+\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} = \frac{p^2}{q^2}$ com $p > q$ e $(p,q) = 1$, p e q têm paridades diferentes de acordo com (2). Portanto, $y = p^2 - q^2$, $x = 2pq$ e $z = p^2 + q^2$ (Rashed, 1994, p. 211-212).

Nessa perspectiva, atualmente, enunciamos o imediato lema analítico: Suponha que (x, y, z) seja uma solução de $x^2 + y^2 = z^2$ em que x é um número inteiro positivo par. Então existem inteiros positivos p e q, com $q < p$, relativamente primos e de paridade oposta tais que $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$ e $z = m^2 + n^2$. Em continuidade, exprimimos o seguinte lema sintético: Se $x = 2pq,\ y = p^2 - q^2\ e\ z = p^2 + q^2$, então (x, y, z) é uma solução de $x^2 + y^2 = z^2$. Se, além disso, $q < p$, $(p, q) = 1$ e p e q têm paridade oposta, então (x, y, z) é uma solução. Assim, ao combinarmos esses dois lemas, obtemos uma caracterização elegante das ternas pitagóricos primitivas que expomos mediante o seguinte teorema: Sejam $x,\ y\ e\ z$ inteiros positivos, em que x é um número inteiro par. A terna (x, y, z) é uma terna pitagórica primitiva se, e somente se, existem números inteiros positivos relativamente primos p e q com paridade diferente, tais que $x = 2pq,\ y = p^2 - q^2$ e $z = p^2 + q^2$ com $q < p$.

E, logo a seguir, julgamos conveniente explicitar que, na prática, com o intuito de catalogar todas as soluções primitivas da equação $x^2 + y^2 = z^2$, tomamos os valores sucessivos de $p \in N$, com $p > 1$ e, depois, para cada um desses valores, tomamos aqueles números q que são relativamente primos com p, menores do que p e par sempre que p for ímpar.

Em seguida, para obter todas as soluções em números naturais da equação $x^2 + y^2 = z^2$, devemos multiplicar sucessivamente cada uma das soluções (x, y, z) primitivas pelos números naturais $\{\,2, 3, 4, 5, \cdots\}$. Entretanto, ao consideramos todas essas soluções obtidas, não obtemos todas as soluções da equação $x^2 + y^2 = z^2$, por exemplo, não obtemos pela parametrização $x = 2pq,\ y = p^2 - q^2\ e\ z = p^2 + q^2$ a solução $(12, 9, 15)$ àquela equação.

De fato, não existem números $p, q \in N$ com $q < p$ para os quais $15 = p^2 + q^2$; pois nenhum dos números $15 - 1^2 = 14$, $15 - 2^2 = 11$, $15 - 3^2 = 6$ é o quadrado de um número natural. Em síntese, todas as soluções da equação $x^2 + y^2 = z^2$ são estabelecidas pela seguinte parametrização $x = 2pqr,\quad y = (p^2 - q^2)r$ e $z =$

$(p^2 + q^2)r$, onde p, q e $r \in N$ com $q < p$. Portanto, dessa última parametrização, para $p = 2$, $q = 1$ e $r = 3$, fornece a solução $(12, 9, 15)$.

As ternas pitagóricas e os números congruentes com Fibonacci e Fermat

Os primeiros problemas e questões sobre triângulos retângulos racionais surgem com Diofanto, no livro VI, em sua *Aritmética*. Entretanto, Brahmagupta, foi o primeiro a estudar triângulos retângulos racionais cujos lados têm por medidas números racionais e têm por área um número racional. Diante desse resultado, apresenta-se a subsequente conjectura: existem triângulos retângulos cujos lados têm por medidas números racionais e têm por área números naturais?

Em relação à suposição exposta acima, Leonardo Fibonacci (1170 – 1250), na ocasião de sua estada em Pisa, foi instigado pelo erudito João de Palermo (? – 1240), da corte do Imperador Frederico II (1194 – 1250), a estudar problemas associados àquela conjectura. A indagação de João de Palermo aparece no prefácio de *Liber Quadratorum* (Livro dos quadrados), de Fibonacci, composto em 1225, como se pode ler a seguir:

> Depois de ser levado para Pisa pelo Mestre Domênico aos pés de sua majestade celestial, o mais glorioso príncipe, Senhor F., eu conheci o Mestre João de Palermo; ele me propôs uma questão que lhe ocorrera, pertencendo não menos à Geometria do que à Aritmética: encontrar um número quadrado do qual, quando cinco é adicionado ou subtraído, resulta sempre um número quadrado. (...) Quando ouvi recentemente de um relato de Pisa e outro da Corte Imperial de que sua sublime majestade se dignou a ler o livro [*Livro de Cálculo*] que compus sobre os números, e que lhe agradou ouvir várias sutilezas relativas à geometria e aos números, lembrei-me da questão que me foi proposta na vossa corte pelo vosso filósofo. Eu assumi o assunto e comecei a compor em sua honra esta obra que desejo chamar de *O Livro dos Quadrados*. Eu vim para pedir indulgência se em algum lugar contiver algo mais ou menos que certo ou necessário; para lembrar tudo e não se enganar com coisa alguma é mais divino do que humano; e ninguém está isento de culpa nem é circunspecto em toda parte (Fibonacci, 1987, p. 3).

Na proposição 14, do *Liber Quadratorum*, Fibonacci (1987) enuncia e demonstra, por meio de segmentos de reta, a seguinte afirmação: Encontre um número que adicionado a um número quadrado e subtraído de um número quadrado resulta sempre em um número quadrado. Em notação moderna, para sua demonstração: é necessário encontrar três números quadrados x^2, y^2 e z^2 e um número natural k, que Fibonacci denomina de número congruente (*congruum*), ou seja, $x^2 + k = y^2$ e $y^2 + k = z^2$.

Em outros termos, segundo Fibonacci, significa que x^2, $x^2 + k$ e $x^2 + 2k$ ou $x^2 - k$, x^2 e $x^2 + k$ é uma progressão aritmética de quadrados com 3 termos. Na proposição 15, Fibonacci (1987, p. 74) expõe e demonstra que: Se algum número congruente e seus quadrados congruentes forem multiplicados por outro quadrado, o número formado pelo produto do número congruente e do quadrado será um número congruente; os quadrados restantes serão congruentes com esse número congruente. Em notação atual representa que: se multiplicarmos ambos os membros das equações daquela proposição 14 por um número quadrado q^2, então obteremos $(xq)^2 + kq^2 = (yq)^2$ e $(yq)^2 + kq^2 = (zq)^2$. Logo, kq^2 é um número congruente para (xq), (yq) e (zq).

Na proposição 16, Fibonacci (1987) apresenta e resolve o seguinte problema: Desejo encontrar um número congruente que seja um múltiplo quadrado de cinco. Assim, segundo os comentários do tradutor L. E. Sigler, em notação moderna, Fibonacci deseja encontrar um número congruente que seja um múltiplo quadrado de 5. Para isso, em sua demonstração, ele escolhe n e m de modo que $4nm(n - m)(n + m)$ seja um múltiplo quadrado de 5. Em seguida, escolha $n = 5$ e $m = 4$ os quais torna $n + m$ um número ímpar e substitui-os naquela equação obtendo 720. Logo, $720 = 144 \times 5 = 12^2 \times 5$, um múltiplo quadrado de 5. Por fim, na proposição 17, Fibonacci (1987, p. 77) exibe e resolve o problema proposto por João de Palermo:

> Eu desejo encontrar um número quadrado que aumentado ou diminuído em cinco produz um número quadrado.
> Tome um número congruente, um múltiplo quadrado de cinco; um desses será 720, do qual a quinta parte é 144, pela qual dividem 720 e os quadrados congruentes, dos quais o primeiro é 961, o segundo é 1681 e o terceiro certamente é 2401. A raiz do primeiro quadrado é 31, do segundo é 41 e do terceiro é 49. Há para o primeiro quadrado $6\frac{97}{144}$, com raiz $2\frac{7}{12}$, que resulta da divisão de 31 pela raiz de 144, que é 12, e há para o segundo, que é o quadrado procurado, $11\frac{97}{144}$, com raiz $3\frac{5}{12}$, que resulta da divisão de 41 por 12, e há para o último quadrado $16\frac{97}{144}$ com raiz $4\frac{1}{12}$ (Fibonacci, 1987, p. 77-78).

Para explicitar essa demonstração, em notação moderna, com algumas alterações seguiremos os comentários do tradutor, L. E. Sigler, do tratado de Fibonacci. Para encontrar essas soluções em números racionais, ele escolhe n e m de forma que o número congruente seja um múltiplo quadrado de 5; cuja escolha $n = 5$ e $m = 4$ estabeleceu a solução da proposição 16. De sorte que, mediante aquela proposição 14, temos $n = 5$, $m = 4$, $n + m = 9$ (número ímpar), $n - m = 1$ e $4nm(n - m)(n + m) = 2n(n -$

$m)2m(n+m) = 2m(n-m)2n(n+m)$. Por isso, temos $2n(n-m) = 10$, $2m(n-m) = 8$, $2n(n+m) = 90$ e $2m(n+m) = 72$. Por conseguinte, obtemos $(1/2)[2m(n+m) - 2n(n-m)] = (1/2)(62) = 31$, $(1/2)[2m(n+m) + 2n(n-m)] = (1/2)(82) = 41$ e $(1/2)[2n(n+m) + 2m(n-m)] = (1/2)(98) = 49$.

Logo, substituindo esses valores nas equações $x^2 + k = y^2$ e $y^2 + k = z^2$ da proposição 14 e para $k = 720$ da proposição 16, obtemos $31^2 + 720 = 41^2$ e $41^2 + 720 = 49^2$. Portanto, dividindo-as por 144 ou 12^2, obtemos a solução $\left(\frac{31}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{41}{12}\right)^2$ e $\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2$. Em conclusão, isso equivale a encontrar inteiros x, y, z e q, tais que $y^2 - x^2 = z^2 - y^2 = 5q^2$ e isso, por sua vez, se reduz a encontrar um triângulo retângulo com lados racionais $\frac{z+x}{q}$, $\frac{z-x}{q}$ e $\frac{2y}{q}$ e área 5.

Assim, em 1225, Fibonacci, ao substituir $x = \frac{31}{12}$, $y = \frac{41}{12}$ e $z = \frac{49}{12}$ naquelas ternas, encontrou um triângulo retângulo de lados com medidas $3/2$, $20/3$ e $41/6$ e cuja área é 5. Por conseguinte, formula-se a imediata pergunta: É possível que cada número natural n possa ser representado como a área de um triângulo retângulo cujos lados têm por medidas números racionais?

A *Aritmética*, de Diofanto, tornou-se totalmente acessível aos matemáticos europeus quando Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1581 – 1638) publicou, em 1621, o texto grego original, juntamente com uma tradução latina contendo notas e comentários. Por isso, que essa obra é citada por Pierre de Fermat (1601 – 1665) quando enuncia a seguinte proposição:

> Problema 20 de Bachet sobre Diofanto, VI, 26.
> Bachet. – Encontre um triângulo retângulo cuja área seja um número dado.
> A área de um triângulo rectângulo em números não pode ser um quadrado. Vou demonstrar esse teorema que descobri; além disto, não o encontrei sem uma penosa e laboriosa meditação; mas, este tipo de demonstração conduzirá a um progresso maravilhoso na ciência dos números.
> Se a área de um triângulo fosse um quadrado, haveriam dois quadrados cuja diferença seria um quadrado; daqui resulta que também se teriam dois quadrados cuja soma e diferença seriam quadrados. Por conseguinte, um teria um número quadrado, soma de um quadrado e o duplo de um quadrado, com a condição de que a soma dos dois quadrados, que servem para compô-lo, fosse também um quadrado. Mas se um número quadrado é a soma de um quadrado e do dobro de um quadrado, sua raiz é também soma de um quadrado e do dobro de um quadrado, o que eu posso provar sem dificuldade. Daí se conclui que essa raiz é a soma dos dois lados do ângulo reto de um triângulo retângulo, do qual um dos componentes quadrados formará a base, e o dobro do outro quadrado a altura. Este triângulo retângulo será, portanto, formado por dois

> números quadrados, cuja soma e diferença serão quadrados. Mas provar-se-á que a soma desses dois quadrados é menor do que a dos dois primeiros, cuja soma e a diferença foram também supostos serem quadrados. Portanto, se dermos dois quadrados cuja soma e a diferença sejam quadrados, daremos assim, em números inteiros, dois quadrados gozando da mesma propriedade e cuja soma é menor. Por esse mesmo raciocínio, teremos então uma outra soma menor do que aquela deduzida da primeira e, continuando indefinidamente, encontraremos sempre números inteiros cada vez menores que satisfazem as mesmas condições. Mas isso é impossível, já que para um número inteiro dado, não pode haver uma infinidade de números inteiros que sejam menores.
> A margem é demasiada estreita para receber a demonstração completa e com todos seus desenvolvimentos. Pelo mesmo processo, eu descobri e demonstrei que não há número triangular algum, exceto a unidade, que é um biquadrado (Fermat, III, p. 271-272).

Antes de explicitar a demonstração dessa proposição, cumpre-nos algumas explicações: Fermat emprega o denominado método de descida infinita, técnica que se fundamenta no princípio de boa ordem (logicamente equivalente à indução matemática) para inteiros positivos e que explora o fato de que a existência de um contraexemplo de inteiro positivo para uma afirmação sobre inteiros positivos implica que há um contraexemplo de um menor inteiro positivo. Em notação moderna, com algumas variações, acompanharemos Sally (2007) e demonstraremos que a área de um triângulo retângulo racional não é um quadrado.

Suponha que o teorema seja falso. Assim, o conjunto Ω dos triângulos retângulos primitivos com área quadrada não é vazio. Uma vez que o comprimento da hipotenusa de um elemento de Ω é a raiz quadrada de um inteiro positivo, há pelo menos um triângulo retângulo $T \in \Omega$ com hipotenusa de menor comprimento. Assim, seja $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$ a terna pitagórica primitiva correspondente com a e b inteiros positivos relativamente primos de paridade oposta e $b < a$. Logo, o triângulo retângulo T tem área $A = ab(a + b)(a - b)$.

Em seguida, usamos o fato de que A é um quadrado para construir outro elemento de Ω com hipotenusa de menor comprimento. Uma vez que A é um quadrado, e os fatores a, b, $a + b$ e $a - b$ são relativamente primos aos pares, segue-se que cada um desses fatores também deve ser um quadrado. Por isso, escrevemos $a = x^2$, $b = y^2$, $a + b = u^2$ e $a - b = v^2$, onde u e v são inteiros ímpares relativamente primos. Logo, note-se que $a = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ e o comprimento da hipotenusa de T é $x^4 + y^4$.

Além disso, temos $2y^2 = u^2 - v^2 = (u + v)(u - v)$, onde $u + v$ e $u - v$ são pares. De fato, como u e v são relativamente primos, 2 é o maior divisor comum de $u +$

v e $u - v$. Segue-se que um destes $u + v$ e $u - v$ é da forma $2r^2$ e o outro é da forma t^2, onde r e t são relativamente primos. Além disso, como $u + v + u - v = 2u = 2r^2 + t^2$, existe um inteiro positivo s tal que $t^2 = 4s^2$ e $u = r^2 + 2s^2$. Da mesma forma, segue-se que $v = \pm(r^2 - 2s^2)$ e $y = 2rs$. Consequentemente, de $a = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = r^4 + 4s^4$, deduzimos que $(r^2, 2s^2, x)$ é um triângulo retângulo primitivo com área igual ao quadrado $(rs)^2$ e com hipotenusa de comprimento x. Portanto, temos $x < x^4 + y^4$, o comprimento da hipotenusa de T, essa contradição. Assim, como corolário, temos que: 1 não é um número congruente. De modo semelhante demonstra-se que: 2 e 3 não são números congruentes.

As ternas pitagóricas, números congruentes e curvas elípticas na atualidade

O problema de determinar números congruentes está intimamente relacionado ao estudo de soluções racionais para as equações cúbicas, ou seja, uma função leva um triângulo retângulo racional de área n a um ponto racional na curva cúbica $y^2 = x^3 - n^2x$; essa relação, segundo Jerrold Bates Tunnell (1950 –), foi estabelecida por Don Bernard Zagier (1951 –). O teorema estabelece essa correspondência: Seja $n \in N$ fixo. Conforme Koblitz (1993) há uma correspondência biunívoca entre os respectivos conjuntos: $F = \{(a, b, c) \in Q^3 \mid a^2 + b^2 = c^2, ab/2 = n\}$ e $G = \{(x, y) \in Q^2 \mid y^2 = x^3 - n^2x, xy \neq 0\}$. A correspondência é fornecida por $f: F \to G$ definida por $(a, b, c) \longmapsto \left(\frac{nb}{c-a}, \frac{2n^2}{c-a}\right)$ e $g: G \to F$ definida por $(x, y) \longmapsto \left(\frac{x^2-n^2}{y}, \frac{2nx}{y}, \frac{x^2+n^2}{y}\right)$.

Assim, desse teorema, surge o corolário estabelecido por Stephens: Um número natural n é um número congruente se, e somente se, $y^2 = x^3 - n^2x$ tiver alguma solução não trivial. Neste contexto, em 1983, Tunnell demonstrou seu teorema notável: Seja n um número natural sem quadrado. Considere as condições (A) n é congruente; (B) o número de ternas de inteiros (x, y, z) que satisfazem $2x^2 + y^2 + 32z^2 = n$ é igual a duas vezes o número de ternas que satisfazem $2x^2 + y^2 + 32z^2 = n$; (C) o número de ternas de inteiros (x, y, z) que satisfazem $8x^2 + 2y^2 + 16z^2 = n$ é igual a duas vezes o número de ternas que satisfazem $8x^2 + 2y^2 + 64z^2 = n$. Então, se n é ímpar, (A) implica (B); e, se uma forma fraca da conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer é verdadeira, então (B) implica (A) e, se n é par (A) implica (C); e, se uma forma fraca da conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer é verdadeira, então (C) implica (A). A conjectura foi proposta, em 1965, por Bryan John Birch (1931 –) e Henry Peter Francis Swinnerton-Dyer (1927 – 2018), que trata do presente assunto: seja E uma curva elíptica sobre Q. Então, o posto analítico e o posto algébrico são iguais.

Considerações

O denominado teorema de Pitágoras é um dos mais belos resultados da tradição babilônica, hindu, grega e islâmica, que representa um legado cultural comum da humanidade. Como lembrança inesquecível da época escolar, seu estudo introduziu uma radical inflexão intelectual entre a prática empírica e indutiva e a argumentação lógico-dedutiva, tanto no aspecto histórico-cultural matemático como no âmbito escolar. Dessa maneira, as ternas "pitagóricas" apareceram em problemas práticos e teóricos desenvolvidos por aquela tradição assinalada, em especial, os produzidos por Euclides. Consequentemente, relacionados com aqueles assuntos, com Diofanto, surgem novos problemas e questões sobre triângulos retângulos racionais; entretanto, Brahmagupta os examinou revelando certas propriedades que lhe são pertinentes. E as pesquisas de al-Khazin estabelecem um lema analítico sobre ternas pitagóricas primitivas que juntamente com o lema sintético de Euclides estabelece uma caracterização geral sobre esse tema. Com Fibonacci iniciam-se os estudos sobre números congruentes, quando encontra um triângulo retângulo racional com área igual a cinco; e, posteriormente, Fermat demonstra que a área de um triângulo retângulo racional não é um quadrado. O problema relacionado com os números congruentes atravessa os séculos e movimenta diversas gerações de matemáticos com o propósito de encontrar uma solução geral para esse problema, todavia, encontrando, na maioria das vezes, soluções parciais. Por fim, Tunnell encontrou, mediante o estudo de curvas elípticas, um algoritmo que permite determinar quando um número natural é congruente. Porém, esse procedimento depende da conjectura Birch e Swinnerton-Dyer demonstrada parcialmente.

A abordagem desses problemas por meio da História da Matemática permite que os alunos compreendam que a Matemática envolve uma diversidade de práticas que variam de acordo com a cultura e a História e, em consequência, possam superar uma visão da Matemática como um conjunto de regras e técnicas, como preconiza a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018).

Em sala de aula, os problemas envolvendo as ternas pitagóricas e os números congruentes podem ser desenvolvidos em diferentes níveis de ensino, como no 9º ano do Ensino fundamental ao se trabalhar com as relações no triângulo retângulo ou o Teorema de Pitágoras, conforme previsto na BNCC (Brasil, 2018). No Ensino Médio, os problemas apresentados permitem o desenvolvimento do pensamento numérico, algébrico e geométrico, mas também possibilitam ao aluno entender a relação entre cada uma dessas áreas por meio da resolução numérica, algébrica e geométrica desses problemas.

O trabalho com a resolução de problemas mediante equações é apontado na BNCC como necessária para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Assim, os problemas tratados neste artigo permitem o trabalho com as equações, nos níveis de ensino Fundamental e Médio, e possibilita que sejam exploradas as relações entre Álgebra, Geometria e Grandezas e Medidas. No sétimo ano, os problemas que foram discutidos podem ser usados, por exemplo, no ensino de equações lineares, sistemas de equações lineares com duas incógnitas e equações quadráticas. Em nível superior, as dimensões históricas abordadas nesta pesquisa podem ser exploradas no trabalho com Tópicos de Álgebra Elementar, Geometria Analítica, Teoria Elementar dos Números ou Curvas Algébricas. Desse modo, essas são algumas das potencialidades de abordagem da dimensão histórica no ensino de Matemática por intermédio dos problemas que envolvem as ternas pitagóricas e os números congruentes.

Referências Bibliográficas

BALIEIRO FILHO, Inocêncio Fernandes. **Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya**: Quatro Episódios da História da Heurística. São Paulo: UNESP, 2017.

BARBIN, Evelyne. Integrating history: research perspectives. In FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. (2002). **History in Mathematics Education**. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 63-70.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DIOFANTO. **Les Six Livres d'arithmétique et le Livre des Nombres Polygones**. Bruges: Desclée, de Brouwer et Cie, 1926.

DIVAKARAN, P. P. **The Mathematics of India**: Concepts, Methods, Connections. Singapore: Springer, 2018.

DUVILLIÉ, Bernard. **Sur les traces de l'Homo Mathematicus**: Les mathématiques avant Euclide. Paris: Ellipses, 1999.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

FERMAT, Pierre. **Oeuvres de Fermat**. Tome Troisième. Paris: Gauthier-Villars, 1896.

FIBONACCI, Leonardo. **The Book of Squares**. New York: Academic Press, 1987.

JOSEPH, George Gheverghese. **Indian Mathematics**: Engaging with the World from Ancient to Modern Times. New Jersey: World Scientific, 2016.

KATZ, Victor Joseph. **A History of Mathematics: An Introduction**. New York: Addison-Wesley, 2009.

KOBLITZ, Neal. **Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms**. New York: Springer, 1993.

KATZ, Victor Joseph. **Using History to Teach Mathematics**: An International Perspective. Washington: The Mathematical Association American, 2000.

PROCLUS. **Proclus: A Commentary on the First Book of Euclid's Elements**. New Jersey: Princeton University Press, 1992.

RASHED, Roshdi. **The Development of Arabic Mathematics**: Between Arithmetic and Algebra. Dordrecht: Springer, 1994

SALLY, Judith Donovan; SALLY, Paul Joseph. **Roots to Research**: A Vertical Development of Mathematical Problems. Providence: American Mathematical Society, 2007.

SRINIVASIENGAR, C. N. **The History of Ancient Indian Mathematics**. Calcutta: World Press, 1988.

Recebido em: 14 / 12 / 2022
Aprovado em: 25 / 07 / 2023