"O QUE ESTUDANTES CONHECEM SOBRE LIMITE E CONTINUIDADE?" – UMA DISCUSSÃO SOBRE DIFERENTES COMPREENSÕES RELACIONADAS A ESSES CONCEITOS

"WHAT DO STUDENTS KNOW ABOUT LIMIT AND CONTINUITY?" – A DISCUSSION RELATED TO DIFFERENT COMPREHENSIONS RELATES TO THESE CONCEPTS

Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias [1]

Universidade Federal do Pará

João Cláudio Brandemberg [2]

Universidade Federal do Pará

Resumo
Objetivamos com esse trabalho levantar uma discussão sobre a multiplicidade de compreensões relativas aos conceitos de limite e continuidade de uma função. Para tanto, reunimos várias interpretações vinculadas a esses conceitos que têm sido destacadas em diferentes pesquisas. Em seguida, agrupamo-las de acordo com (i) a natureza do conceito de limite e as condições que garantem sua existência e (ii) a natureza do conceito de continuidade. A pluralidade de interpretações sobre esses conhecimentos, apontados em diferentes estudos, permitiram-nos traçar, nesse artigo, uma reflexão acerca dos conflitos cognitivos relacionados ao entendimento desses conceitos.

Palavras-chave: Compreensões. Limite de uma função. Continuidade de uma função.

Abstract
Our aim with this paper is to raise a discussion about the multiplicity of comprehensions students have about the concepts of limit and continuity of a function. For that, we first gathered various interpretations related to such concepts, which have been highlighted in different researches. Then, we grouped them according to (i) the nature of the limit concept and the conditions that guarantee its existence and (ii) the nature of the concept of continuity. The plurality of interpretations about limit and continuity found in several studies allowed us to trace, in this paper, a reflection upon the cognitive conflicts concerning to the (lack of) understanding of these concepts.

Keywords: Comprehensions. Limit of a Function. Continuity of a Function.

[1]Doutora em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM/UFPA); e-mail: alice.messias@gmail.com
[2]Doutor em Educação (UFRN); e-mail: brand@ufpa.br

DOI: 10.30938/bocehm.v5i15.854

Introdução

Objetivamos com esse trabalho levantar uma discussão sobre a multiplicidade de compreensões de estudantes acerca dos conceitos de limite e continuidade de uma função. Para tanto, reunimos várias interpretações relacionadas a esses conceitos, as quais têm sido destacadas em diferentes pesquisas. Em seguida, agrupamos tais compreensões tendo em vista duas perspectivas:

(i) A natureza do conceito de limite e as condições que garantam sua existência;

(ii) A natureza do conceito de continuidade.

Em (i), incluímos interpretações que caracterizam o limite como sendo (in)alcançável e/ou intransponível, interpretações dinâmicas do conceito, evocações sobre vizinhança ao longo dos intervalos $(L-\varepsilon,\, L+\varepsilon)$ e $(x-\delta, x+\delta)$, discussões sobre o que ε e δ representam na definição, quaisquer dificuldades relacionadas ao cálculo de limites, mobilizações que condicionam a existência do limite à continuidade, domínio da função ou ausência de indeterminações, além de interpretações que consideram a investigação em torno de um ponto suficiente para verificar se o limite existe (ou não) nesse ponto.

Em (ii), incluímos qualquer interpretação relacionada a noção de continuidade em um ponto arbitrário ou ao longo de um intervalo e discussões sobre a ideia de continuidade vinculada a uma concepção dinâmica de movimento ou integridade da função, à ausência de 'buracos', 'saltos' ou 'quebras' em sua representação gráfica, à existência do limite em determinado ponto, além da compreensão de que funções definidas em mais de uma sentença são, necessariamente, descontinuas.

A multiplicidade de interpretações concernentes às compreensões sobre limite e continuidade em diferentes estudos nos permitiram refletir sobre o entendimento desses conceitos, conforme elucidamos nos tópicos subsequentes.

Conhecimento de estudantes sobre limite e continuidade

Ao longo das últimas décadas, os conceitos de limite e continuidade têm se configurado como objetos de estudo em várias pesquisas no âmbito da educação matemática, dadas as expressivas dificuldades inerentes à sua compreensão. Dedicamos esse tópico à discussão sobre a multiplicidade dos conhecimentos que estudantes investigados em diferentes pesquisas têm mobilizado a respeito desses conceitos.

No que concerne às expressivas dificuldades relativas ao processo de apreensão do conceito de limite, por exemplo, evidenciamos em Cornu (1983) e Juter (2008), que o (não) entendimento dos elementos que constituem o campo conceitual dessa noção – tais como o conhecimento sobre sequências, séries, bem como as ideias de infinitamente pequeno, infinitamente grande e função – influenciam na formação de imagens conceituais nem sempre coerentes sobre limites.

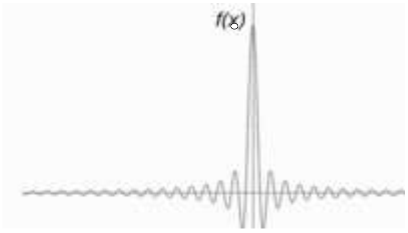
Ressaltamos, em acordo com Cornu (1991), que o entendimento da noção de limite depende tanto da riqueza e complexidade do conceito quanto de aspectos cognitivos que não podem ser gerados puramente a partir de sua definição matemática, uma vez que a ideia de aproximação encontrada usualmente por meio de uma concepção dinâmica e a maneira como o conceito é colocado em prática para resolver problemas não estão exatamente ligados à sua definição formal.

Os próprios termos 'limite' e 'tender para', segundo Cornu (1983, 1991), conduzem os estudantes a interpretações contraditórias do conceito, pautadas na ideia de aproximação em torno de um valor de x, sem alcançá-lo ou ultrapassá-lo. Nesse sentido, os estudantes costumam enfatizar essa aproximação no eixo das abscissas e não em torno de um valor limite no eixo das ordenadas.

Tall e Vinner (1981) reforçaram que a utilização de expressões como 'se aproxima de', 'tende a' ou 'chega perto de' conduz os alunos a uma percepção de que o valor de f em determinado ponto sempre difere do valor do limite de f nesse ponto, isto é, $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. A ideia de aproximar-se de um valor no eixo x também foi mobilizada pelos sujeitos investigados por Swinyard (2011) e em Przenioslo (2004). Nesses casos, observamos que o conceito de limite foi atrelado a uma compreensão de vizinhança ao longo dos intervalos $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ e $(x - \delta, x + \delta)$.

Outros estudos – tais como o de Nascimento (2003), Jordaan (2005), Juter (2008), Sarvestani (2011), Denbel (2014) e Messias e Brandemberg (2015) – também apontaram em suas análises que os estudantes costumam mobilizar elementos que caracterizam o limite como sendo inalcançável e/ou intransponível (ideia de fronteira), uma vez que partem de uma compreensão dinâmica, na qual *a função se move em direção a um ponto qualquer sem, de fato, atingi-lo*. Em contrapartida, se tomarmos como exemplo a função $f(x) = \frac{1}{x} senx$, veremos que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} senx = 0$ e que esse valor de L é 'alcançado' ou 'ultrapassado' várias vezes no eixo das ordenadas (ver figura 1).

Figura 1 – Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x} senx$



Fonte: Elaboração nossa.

Outra mobilização comumente atrelada à ideia de movimento dada a função é a de que o valor do limite pode ser alcançado. Amatangelo (2013) observou, nesse sentido, que os estudantes consideram que *o valor da função em determinado ponto é sempre igual ao valor do limite nesse ponto, ou seja,* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. A prática excessiva do cálculo de limites a partir do método de substituição, como por exemplo, acontece no caso das funções polinomiais, contribui para esse tipo de interpretação que, para Amatangelo (2013), configura-se como uma concepção potencialmente problemática, uma vez que pode levar os estudantes ao erro, dependendo da tarefa matemática que lhe for proposta. Cinestav e Lara-Chaves (1999), Cornu (1983), Przenioslo (2004) e Juter (2008) também apontaram mobilizações semelhantes a essa em seus estudos. Juter (2008) ressaltou ainda que muitos estudantes acabam, inclusive, por não saber diferenciar $f(x_0)$ de $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Cornu (1991), Zuchi (2005), Juter (2008), Rodriguez (2009) e Oh (2014) ressaltaram também que a 'passagem' da noção intuitiva para a definição formal, a relação entre ε e δ, e os quantificadores envolvidos na definição têm se configurado como um fator de conflito em potencial ao longo do processo de aprendizagem do conceito de limite. Isso porque, poucos estudantes conseguem correlacionar a definição formal com o dinamismo comumente utilizado para explicar que uma função f tem limite L quando $x \to x_0$ se a distância entre as imagens da função e L podem ser arbitrariamente pequenas e os valores de x, cada vez mais próximos de x_0. Nesse sentido, é comum que os estudantes resolvam problemas envolvendo limites sem, de fato, entender (ou explicar) o significado de sua definição.

No que concerne às condições para que o limite exista em determinado ponto, Nascimento (2003), Nair (2009), Messias e Brandemberg (2016) apontaram que muitos estudantes evocam que indeterminações implicam na não existência do limite. Outras mobilizações, tais como a existência do $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ condicionada ao fato de $x_0 \in D_{f(x)}$ ou ainda à continuidade em x_0 também se fizeram presente em diferentes pesquisas[3]. Nessa perspectiva, 'buracos', 'saltos' ou 'quebras' no gráfico de uma função podem levar a esse tipo de evocação.

O cálculo de limite de funções escritas em mais de uma sentença tem se configurado como um fator de conflito em potencial, conforme destacado em Nascimento (2003), Maharaj (2010), Mutlu e Aydin (2013) e Brandemberg e Messias (2016). É comum, nesse caso, que os estudantes tenham dificuldades em calcular limites, ou ainda, que considerem que o mesmo não exista em determinado ponto. Isso porque funções definidas em partes normalmente despertam nos alunos a ideia de que suas representações gráficas apresentam saltos que, para eles, implicam na não existência do limite. Esse tipo de mobilização pode (ou não) levar um indivíduo a uma resposta equivocada, dependendo da tarefa que lhe for proposta. Vamos tomar como exemplo as funções $f(x)$ e $g(x)$, cujas representações gráficas encontram-se destacadas na figura 2.

Figura 2 – Representação gráfica de $f(x)$ e $g(x)$

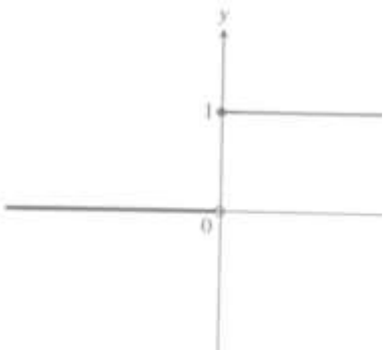


Fig. 2a- Gráfico de $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$

Fonte: Thomas (2002, p. 88)

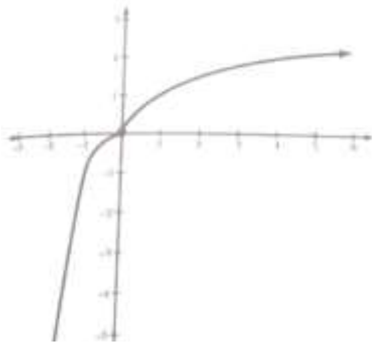


Fig. 2b - Gráfico de $g(x) = \begin{cases} x^3, x < 0 \\ \sqrt{x}, x \geq 0 \end{cases}$

Fonte: Kelley (2013, p. 131)

Na figura 2a temos a representação gráfica de $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$. Nesse caso específico, o $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ não existe, uma vez que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. No entanto, caso um sujeito mobilize que uma *função definida em partes apresenta saltos em seu gráfico*

[3] Tais como Cinestav e Lara-Chaves (1999), Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Juter (2008), Karatas et al. (2011), Sarvestani (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014) e Messias e Brandemberg (2015, 2016).

DOI: 10.30938/bocehm.v5i15.854

que, por sua vez, implicam na não existência do limite, sua interpretação – ainda que equivocada – será suficiente para avaliar a existência do limite da função representada na figura 2a quando $x \to 0$, porém, o levará ao erro se solicitado que verifique o limite da função $g(x) = \begin{cases} x^3, x < 0 \\ \sqrt{x}, x \geq 0 \end{cases}$ quando $x \to 0$ (ver figura 2b), já que $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^-} g(x) = 0$, fato que garante a existência de $\lim_{x \to 0} g(x)$, independente da função estar definida em mais de uma sentença.

Nascimento (2003) e Mutlu e Aydin (2013) apontaram, também, que muitos estudantes consideram suficiente fazer uma investigação à direita e à esquerda de um ponto dado para verificar a existência do limite. Desse modo, é possível que um sujeito afirme, por exemplo, que as funções representadas nas figuras 2a e 2b têm limite quando $x \to 0$.

No que concerne à natureza do conceito de continuidade, Núñez et al. (1999), Amatangelo (2013), Jaykody (2015) e Jayakody e Zazkis (2015) apontaram que a maioria dos alunos mobiliza uma concepção dinâmica sobre o conceito, na qual dá-se direcionalidade, movimento e fluidez à função. Expressões do tipo ‘a função flui’, ‘a função se move sem interrupções’, ou ainda, ‘podemos desenhá-la sem levantar o lápis do papel’ representam esse tipo de entendimento sobre continuidade. Tal interpretação pode, segundo Tall e Vinner (1981), Cornu (1991) e Jayakody (2015), ser decorrente do próprio uso coloquial do termo *continuidade*.

Essa ideia de movimento atrelada à função implica – para muitos estudantes – na compreensão de que sua representação gráfica não apresenta ‘saltos’, ‘buracos’ ou ‘quebras’, fato que, para eles, tem se constituído como condição necessária para garantir a continuidade, conforme destacado por Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Núñez et al. (1999), Karatas et al. (2011), Jayakody (2015), Jayakody e Zazkis (2015), Messias e Brandemberg (2015), dentre outros. A presença de assíntotas na representação gráfica de determinadas funções também é interpretada como uma ‘causa’ para a descontinuidade da função, uma vez que implica em um ‘salto’.

Brandemberg e Messias (2016) ressaltam que, para muitos alunos, o fato de uma função estar escrita em partes implica em ‘buracos’, ‘saltos’ ou ‘quebras’ em seu gráfico e, consequentemente, em algum ponto ou intervalo de descontinuidade na função. Nesses termos, as funções $h(x)$, $t(x)$, destacadas na figura 3, seriam admitidas como descontínuas, em virtude da presença de ‘buracos’ e/ou ‘saltos’ em suas representações gráficas.

Figura 3 – Representação gráfica de $h(x)$ e $t(x)$

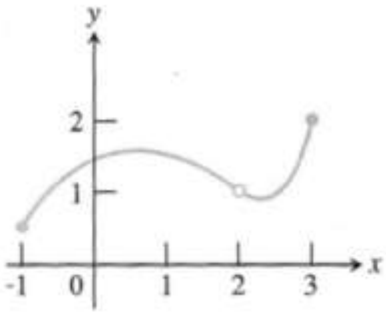


Fig. 3a – Gráfico de $h(x)$

Fonte: Thomas (2002)

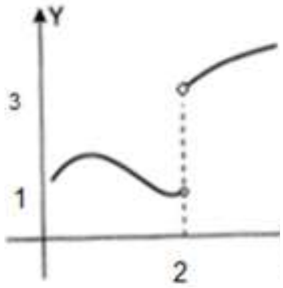


Fig. 3b – Gráfico de $t(x)$

Fonte: Elaborado pelo autor

Vamos analisar essas funções sob duas perspectivas: a primeira, partindo da compreensão de continuidade no ponto e a segunda, de continuidade em um intervalo. O fato é que as funções representadas nas figuras 3a e 3b não estão definidas em $x = 2$, logo, não podemos avaliar a continuidade nesse ponto, mas é possível afirmar que elas são contínuas em cada ponto de seu domínio, porém, não são contínuas, por exemplo, em cada ponto do intervalo $(1,3)$.

Em seus trabalhos, Tall e Vinner (1981), Vinner (1987) e Cornu (1991) apontaram que os estudantes costumam ter o entendimento de que uma função descontínua é constituída por ‘partes que não se encontram’. Aliás, concepções espontâneas sobre continuidade corroboram para interpretações do tipo ‘o gráfico está em um único pedaço’ ou ‘desenhamos o gráfico sem tirar o lápis do papel’. Para Cornu (1991) e Jayakody (2015), fica claro que os estudantes confundem *continuidade* com *conectividade*. Essa compreensão equivocada do conceito se configura como uma concepção potencialmente problemática, já que pode levar um indivíduo à ideia de que uma função *f é contínua em um ponto p se $p \in D_f$*[4].

Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Amatangelo (2013), Denbel (2014) e Jayakody (2015) apontaram que, em geral, os estudantes condicionam a continuidade em

[4] Vinner (1987), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Jayakody (2015) e Jayaody e Zazkis (2015) observaram evocações semelhantes a essa em suas pesquisas.

DOI: 10.30938/bocehm.v5i15.854

determinado ponto à existência do limite nesse ponto. Entendemos que essa interpretação possa contribuir para que a relação *limite x continuidade* se configure como um fator de conflito em potencial. Vamos considerar, para fins de exemplificação, as funções representadas na figura 4.

Figura 4 – Representação gráfica de $s(x)$ e $v(x)$

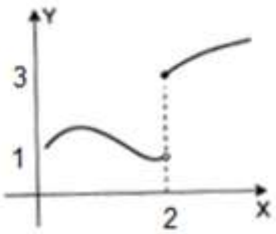


Fig. 4a – Gráfico de $s(x)$

Fonte: Juter (2008)

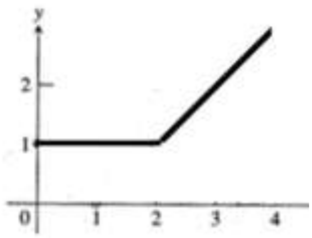


Fig. 4b – Gráfico de $v(x)$

Fonte: Elaborado pelo autor

Uma compreensão que condicione a continuidade em um ponto à existência do limite nesse ponto seria suficiente para que um sujeito respondesse que a função da figura 4a não é contínua em $x = 2$, uma vez que $f(2) = 3$ e que $\lim_{x \to 2} s(x)$ não existe, pois $\lim_{x \to 2^+} s(x) \neq \lim_{x \to 2^-} s(x)$. Seguindo esse mesmo raciocínio, o sujeito poderia afirmar que a função da figura 4b não é contínua em $x = 0$ porque o limite não existe quando $x \to 0$. Nessa perspectiva, a menos que ele evocasse o conceito de continuidade na extremidade à direita ou à esquerda de um ponto, ele avaliaria a continuidade em $x = 0$ de maneira equivocada.

Jayakody (2015) e Jayakody e Zazkis (2015) refletiram sobre a maneira como o conceito de continuidade é comumente introduzido nas aulas e, também, em materiais de estudo de Cálculo. Desse modo, admitiram que a primeira condição a ser verificada no *teste de* continuidade – a de que $f(p)$ existe – pode levar estudantes a uma interpretação equivocada sobre esse conceito. Nessa perspectiva, o domínio da função pode se configurar como um fator de conflito cognitivo, uma vez que pode levar à compreensão de que *uma função que não esteja definida em um ponto p, é descontínua nesse ponto* que, por sua vez, entra em conflito com o entendimento de que a *continuidade em um ponto p não pode ser analisada se $D_f = \{x \in IR, x \neq p\}$.*

DOI: 10.30938/bocehm.v5i15.854

Baseados no que foi apontado nesse tópico, observamos que estudantes investigados em diferentes estudos têm mobilizado uma pluralidade de interpretações sobre limite e continuidade de uma função. Apresentamos, em nossas considerações finais, alguns apontamentos concernentes ao entendimento dos referidos conceitos.

Considerações Finais

Nosso intuito com esse trabalho foi o de verificar as características do pensamento de estudantes no que tange aos conceitos de limite e continuidade. Conforme mencionamos anteriormente, sob o ponto de vista de diferentes estudos, evidenciamos uma multiplicidade de compreensões relativas a tais conhecimentos matemáticos. Foi possível, nesse sentido, sintetizá-las e organizá-las conforme a natureza do conceito de limite e as condições que garantam sua existência e a natureza do conceito de continuidade (ver quadros 1 e 2).

Quadro 1 – Compreensões relativas ao conceito de limite

Sobre a natureza do conceito de limite	
Tipos de Compreensões	**Quem discutiu?**
Concepção dinâmica → atribui-se 'movimento' a função → *tende a; se aproxima de*; *chega perto de*; aproximação em torno de x_0.	Tall e Vinner (1981), Cornu (1983), Cornu (1991), Cottril et al. (1996), Przenioslo (2004), Sarvestani (2011), Swinyard (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Oh (2014)
Limite é inalcançável → $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$	Tall e Vinner (1981), Cornu (1983), Cornu (1991), Cinestav e Lara-Chaves (1999), Nascimento (2003), Jordaan (2005), Juter (2008), Sarvestani (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Messias e Brandemberg (2015)
Limite é intransponível (fronteira)	Cornu (1983), Cornu (1991), Cinestav e Lara-Chaves (1999), Nascimento (2003), Juter (2008), Amatangelo (2013), Denbel (2014)
Limite de uma função em um ponto é sempre igual ao valor da função nesse ponto, ou seja, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (limite alcançável)	Cornu (1991), Cinestav e Lara-Chaves (1999), Przenioslo (2004), Juter (2008) Amatangelo (2013)
Confusões conceituais: $\lim_{x \to x_0} f(x)$ x $f(x_0)$.	Juter (2008)
Ideia de intervalo;	Cornu(1991), Przenioslo (2004)

Vizinhança nos intervalos $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ e $(x-\delta, x+\delta)$	
Discussões sobre o que ε e δ representam na definição de limite	Zuchi (2005), Juter (2008), Rodríguez (2009), Oh (2014)
Sobre as condições que implicam na (não) existência do limite	
Tipos de Compreensões	**Quem discutiu?**
Indeterminações implicam na não existência do limite.	Nascimento (2003), Nair (2009), Messias e Brandemberg (2016)
Existência do $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ condicionada ao fato de $x_0 \in D_{f(x)}$.	Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Karatas et al. (2011), Denbel (2014), Messias e Brandemberg (2015)
Existência do $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ condicionada à continuidade em x_0.	Cinestav e Lara-Chaves (1999), Przenioslo (2004), Jordaan (2005), Juter (2008), Sarvestani (2011), Swinyard (2011), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Messias e Brandemberg (2015, 2016)
Dificuldades de calcular limites de funções definidas em partes	Nascimento (2003), Maharaj (2010), Mutlu e Aydin (2013), Brandemberg e Messias (2016)
Uma investigação à direita e à esquerda de um ponto dado é suficiente para verificar a existência do limite.	Nascimento (2003), Mutlu e Aydin (2013)

Fonte: Elaboração nossa.

Observamos, mediante a síntese apresentada no quadro 1, que o conhecimento de estudantes sobre limite é pautado, sobretudo, em interpretações dinâmicas desse conceito. Além disso, a questão da existência do limite tem se configurado como um fator de conflito em potencial para estudantes de Cálculo.

No que concerne ao conceito de continuidade, sintetizamos diferentes mobilizações no quadro 2 (a seguir).

Quadro 2 – Compreensões relativas à natureza do conceito de continuidade

Tipos de Compreensões	**Quem discutiu?**
Concepção dinâmica de continuidade: direcionalidade e movimento da função	Núñez et al. (1999), Amatangelo (2013), Jayakody (2015), Jayakody e Zazkis (2015)
'saltos' ou 'buracos' ou 'quebras' na representação gráfica da função implica na descontinuidade da função.	Tall e Vinner (1981), Cornu (1991), Vinner (1987), Núñez et

	al. (1999), Karatas et al. (2011), Jayakody (2015), Jayakody e Zazkis (2015), Messias e Brandemberg (2015)
Interpretações que mobilizem a ideia de que funções definidas em partes são descontínuas; A função não é dada em uma fórmula única.	Tall e Vinner (1981), Nascimento (2003), Brandemberg e Messias (2016)
Descontinuidade → ‘A função tem duas partes que não se encontram; o gráfico não está em um único pedaço’.	Tall e Vinner (1981) Vinner (1987), Cornu (1991)
Continuidade atrelada à ideia de inteireza; fluidez; desenhamos o gráfico sem ‘tirar o lápis do papel’.	Tall e Vinner (1981),Vinner (1987), Cornu (1991), Núñez et al. (1999), Karatas et al. (2011), Amatangelo (2013), Jayakody (2015), Jayakody e Zazkis (2015)
Uma função f é contínua em um ponto p se $p \in D_f$.	Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Jayakody (2015) Jayakody e Zazkis (2015)
Continuidade condicionada à existência do limite em determinado ponto	Tall e Vinner (1981), Vinner (1987), Amatangelo (2013), Denbel (2014), Jayakody (2015)
Os termos *continuidade* e *conectividade* são interpretados de maneira semelhante.	Cornu (1991), Jayakody (2015)
Uso coloquial do termo *continuidade* → inteireza da função.	Tall e Vinner (1981), Cornu (1991), Kayakody
Funções que apresentam assíntotas em suas representações gráficas → descontinuidade.	Jaykody (2015)
Teste de continuidade x entendimento sobre continuidade	Jayakody (2015), Jayakody e Zazkis (2015)

Fonte: Elaboração nossa.

Observamos que a compreensão de estudantes sobre continuidade encontra-se vinculada a uma concepção natural, na qual é atribuído direcionalidade, movimento, fluidez e inteireza à função. Além disso, ficou evidente nos apontamentos da literatura revisada que as condições que implicam na (des) continuidade de uma função em um ponto ou ao longo de um intervalo são interpretadas de maneira equivocada pelos estudantes.

Finalmente, admitimos a relevância desse trabalho, tendo em vista o fato de termos organizado importantes apontamentos de diferentes pesquisas acerca do objeto *compreensão sobre limite e continuidade* e sua relação com equívocos comuns concernentes à (falta de) entendimento desses conceitos. Nossa expectativa é de que outros estudos sejam efetivados no sentido de apontar possíveis estratégias pedagógicas que possam enriquecer e viabilizar o aprendizado no âmbito do Cálculo. Para tanto, é importante que estejamos cientes da natureza das dificuldades inerentes à apreensão dos referidos objetos matemáticos, e isso foi exatamente o que objetivamos discutir nesse artigo.

Referências

AMATANGELO, M. L. **Student understanding of limit and continuity at a point: a look at four potentially problematic conceptions**. 2013. 112f. Dissertation (Masters in Arts), Bringham Young University (Utah/USA), 2013.

BRANDEMBERG, J. C. ; MESSIAS, M. A. V. F. Imagem Conceitual e Definição Conceitual: uma reflexão sobre a aprendizagem de conceitos matemáticos. In: Francisco Regis Vieira Alves; Ana Carolina Costa Pereira. (Org.). **Ciências e Matemática: investigações no ensino**. 1ed.Curitiba: CRV, 2016, p. 15-28.

CORNU, B. **Apprentissage de la notion de limite – conceptions et obstacles. Thèse de doctorat de troisième cycle**. L' Université Scientifique et Medicale de Grenoble, 1983.

CORNU, B. Limits. In D. Tall (Ed). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht, Netherlands, 1991, p. 153 – 166.

DENBEL, D.G. Students misconceptions of the limit concept in a first Calculus course. **Journal of Education and Practice**, v.5, n. 34, 2014.

JAYAKODY, G. **University first year students' discourse on continuous functions: A commoginitive interpretation.** 2015. 276f. Tese (Doutorado em filosofia) – Programa de Educação Matemática, Simon Fraser University, 2015.

JAYAKODY,G; ZAZKIS, R. Continuous problem of function continuity. **For the Learning of Mathematics**, New Brunswick (Canada), v. 35, p. 8 – 14, março, 2015.

JORDAAN, T. **Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students.** Dissertação de mestrado (educação matemática). University of South Africa, 2005.

JUTER, K. **Limits of functions - students' conceptual development**. Germany: VDM Verlag Dr. Müller, 2008.

KARATAS et al. A cross-age study of students' understanding of limit and continuity concepts. **BOLEMA**, Rio Claro (SP), v. 24, nº 38, p. 245 a 264, abril, 2011.

MAHARAJ, A. An APOS Analysis of Students' Understanding of the Concept of a Limit of a Function. Pythagoras, n. 71,2010, p. 41 – 52.

MESSIAS, M. A. V. F; BRANDEMBERG, J.C. Discussões sobre a relação entre limite e continuidade de uma função: investigando imagens conceituais. **BOLEMA**, Rio Claro (SP), v. 29, n.53, p. 1224 – 1241, dez., 2015.

MUTLU, C; AYDIN, S. Students' understanding of the concept of limit of a function in vocational high school mathematics. **The online journal of science and technology**. V.3, n. 1, p. 145 – 152, 2013.

NAIR, G.S. **College students' concept image of asymptotes, limits and continuity of rational functions.** Tese de doutorado (filosofia). Ohio State University, 2010.

NASCIMENTO, J. C **. O conceito de limite em Cálculo: Obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática**. 2003. 337f. Tese (Doutorado em Psicologia) – Departamento de Psicologia, UFPE, 2003.

NÚÑEZ et al. Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics,** Netherlands, v. 39, p. 45 – 65, 1999.

PRZENIOSLO, M. Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies in the university. **Educational Studies in Mathematics,** Netherlands, v. 55, p. 103 – 132, 2004.

RODRÍGUEZ, Mabel. Consideraciones didácticas para la enseñanza del límite funcional. **Memorias Del 10º Simposio de Educación Matemática**. Chivilcoy – Buenos Aires – Argentina, p. 92 – 98, 2009.

SARVESTANI, A.K. **Contemplating problems taken from history of limits as a way to improve students' understanding of the limit concept**. 2011. 162f. Tese de Doutorado, Universiteit Van Amsterdam, 2011.

SWINYARD, C. Reinventing the formal definition of limits: the case of Amy and Mike. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 31, p. 93 – 114, 2011.

TALL, D; VINNER, S. Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, 1981, p. 151 – 169

THOMAS, G.B. **Cálculo**. São Paulo: Addison Wesley, vol 1, 2002

VINNER, S. Continuous functions and reasoning in college students**. Proceedings of the international conference on the psychology of mathematics education (PME)**, 1987, vol. 1, pp. 177 – 183.

ZUCHI, I. **A abordagem do conceito de limite via sequência didática: do ambiente lápis e papel ao ambiente computacional.** Tese de doutorado (engenharia de produção). UFSC, 2005.