BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

e-ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v9i27.8185

A RAZÃO DE BRONZE: UMA CONTRIBUIÇÃO DE VERA M. W. DE SPINADEL PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

THE BRONZE RATIO: A CONTRIBUITION OF VERA M. W. DE SPINADEL TO THE TEACHING OF MATHEMATICS

João Luzeilton de Oliveira[1]

RESUMO

Neste artigo introduzimos a razão de bronze, não somente como um membro da família de números metálicos criada por Spinadel (2003a), mas como uma relação entre o retângulo de bronze e a sequência (l_n), numa abordagem diferente do que fez Spinadel ao generalizar a sequência de Fibonacci. Com o propósito de se conhecer um pouco sobre sua trajetória como professora de Matemática e pesquisadora, apresentamos uma breve biografia da matemática argentina Vera M. de Spinadel, uma mulher à frente do seu tempo, mas pouco conhecida no meio matemático. Definimos, também, a razão de bronze, um caso particular dos números metálicos da forma σ_p^1 e, em seguida, definimos e construímos, geometricamente, o retângulo de bronze e a razão de bronze. Além disso, como resultado principal deste trabalho, apresentamos uma sequência semelhante às sequências de Fibonacci e de Pell, que converge para a razão de bronze no mesmo sentido que tais sequências convergem para as razões de ouro e de prata, a partir dos retângulos de ouro e de prata, respectivamente. Tal sequência não existe na literatura da maneira como as de Fibonacci (ÁVILA, 1985) e de Pell (OLIVEIRA, 2022), quanto às relações com os retângulos de ouro e de prata. O trabalho tem como objetivos definir e construir o retângulo de bronze e a razão de bronze, bem como mostrar que a sequência (l_n) converge para a razão de bronze, a partir de sua relação com o retângulo de bronze. Esperamos que este trabalho possa contribuir para dar suporte a trabalhos interdisciplinares com o ensino de Matemática, de modo que a razão de bronze possa ser utilizada na proposição de problemas e atividades sobre números irracionais com a resolução de problemas de cunho prático ou não, vislumbrando aplicações desta razão no mundo que nos cerca, como foi feito com as razões de ouro e de prata, mostrando como a História da Matemática nos auxilia nas atividades de sala de aula. Sabemos que esses desdobramentos para possíveis caminhos que levem a aplicações práticas, contribuem, sobremaneira, para a melhoria da ação e formação dos professores de Matemática da Educação Básica.

Palavras-chave: Números metálicos. Retângulo de bronze. Razão de bronze. Ensino de Matemática. História da Matemática.

ABSTRACT

This article introduces bronze ratio not only as a member of the family of metallic numbers, created by Spinadel (2003a), but as a relationship with the bronze rectangle and the sequence (l_n) in a different approach than Spinadel did when generalizing the Fibonacci sequence. With the

[1] Doutor em Engenharia de Teleinformática, com ênfase em Computação Quântica (UFC). Professor do Curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central (FECLESC) - Universidade Estadual do Ceará (UECE), Quixadá, CE, Brasil. Endereço para correspondência: Rua 137, número 136, 1ª Etapa, Conjunto Ceará, Fortaleza, CE, Brasil, CEP: 60533-180. E-mail: joao.luzeilton@uece.br.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1001-4401.

intention of showing a little about her trajectory as a Mathematics lecture and researcher, we presented a brief biography of the argentine mathematician Vera M. de Spinadel, a woman ahead of her time, but little known in the mathematical environment. We also define the bronze ratio, a particular case of metallic numbers of the form σ_p^1. Then the bronze rectangle and bronze ratio are defined and constructed geometrically. In addition, as the main result of this work, a sequence similar to the Fibonacci and Pell sequences is presented, and which converges to the bronze ratio in the same sense that such sequences converge to the gold and silver ratios of the gold and silver rectangles, respectively, although such a sequence does not exist in the literature in the same way as those of Fibonacci (ÁVILA, 1985) and Pell (OLIVEIRA, 2022), regarding the relationships with the gold and silver rectangles. It aims to define and construct the bronze rectangle and ratio, as well as showing that the sequence (l_n) converges to the bronze ratio, from its relationship with the bronze rectangle. We hope that this work can contribute to support interdisciplinary work with the teaching of Mathematics, so that the bronze ratio can be used in the proposition of problems and activities on irrational numbers with the resolution of practical problems or not, glimpsing applications of this ratio in the world around us, as was done with the gold and silver ratios, also showing how the History of Mathematics helps us in classroom activities. It is known that these deployment possible paths that lead to practical applications contribute greatly to the improvement of the action of Mathematics teachers in Basic Education and, consequently, to the mathematical training of these teachers.
Keywords: Metallic numbers. Bronze rectangle. Bronze ratio. Teaching of Mathematics. History of Mathematics.

Introdução

A razão de bronze é um número irracional positivo, um dos membros de uma família de números reais positivos, chamada **números metálicos** ou **razões metálicas**, introduzida por Spinadel (2003a). Alguns desses números, conhecidos muito antes dos trabalhos de Spinadel, foram usados como bases de sistemas de proporções na arquitetura, pelos romanos nos séculos I e II da era cristã e, também, nas arquiteturas oriental e ocidental, antiga e moderna. Nos trabalhos de Spinadel, esses números aparecem na caracterização de caminhos universais que levam ao caos e, na busca de relações entre matemática e arte, de modo que, segundo essa pesquisadora, “Os membros dessa família intervêm na determinação do comportamento quase periódico de sistemas dinâmicos não lineares, constituindo uma ferramenta inestimável na busca de rotas universais para o caos” (SPINADEL, 2003a, p. 189)[2] (tradução do autor).

Generalizando a sequência de Fibonacci, Spinadel mostrou que, para $a, b, p, q \in \mathbb{N}$, a sequência $a, b, pb + qa, p(pb + qa) + qb, ...$, de termo geral $g_{n+1} = pg_n + qg_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, converge para $\sigma_p^q = p + \frac{q}{\sigma_p^q}$, raiz positiva da equação $x^2 - px - q = 0$, isto é,

[2] “Los miembros de la familia intervienen en la determinacion del comportamiento cuasiperiódico de sistemas dinamicos no lineales, constituyendo una herramienta invalorable en la busqueda de rutas universales al caos.” (SPINADEL, 2003a, p. 189)

$$\sigma_p^q = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}. \tag{1}$$

Em (1), se fizermos $p = 1$ e $q = 1$, obteremos $\sigma_1^1 = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (razão de ouro), o primeiro e mais importante membro dessa família, conhecida, desde os gregos, com o **problema da média e extrema razão**, ganhando o nome de razão de ouro (número de ouro), somente no século XX (LIVIO, 2009). Em Ávila (1985), Huntley (1970), Kappraff (2001, 2022), Spinadel (2003a, 2003b), Lívio (2009) e Stakhov (2009), vimos como é possível identificar sua presença no mundo que nos cerca, na natureza e em outras áreas do conhecimento humano. Da eq. (1), é possível obter uma relação entre a sequência de Fibonacci e o número φ, assim como em Ávila (1985), que estabelece tal resultado por meio de um caminho diferente do que foi feito por Spinadel. Da relação entre o retângulo de ouro e φ, segue que, se f_n e f_{n+1} são números de Fibonacci, então $\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$, uma construção diferente da que Spinadel fez (ÁVILA, 1985).

A razão de prata, $\sigma_2^1 = \delta = 1 + \sqrt{2}$, obtida de (1) quando $p = 2$ e $q = 1$, é o segundo membro dessa família que, assim como a razão de ouro, está presente no mundo que nos cerca (OLIVEIRA, 2021, 2022). Spinadel, também, a partir de (1), relaciona-a com a sequência de Pell. Diferente do que fez Spinadel, a partir do retângulo de prata e no sentido de Ávila (1985), Oliveira (2022) mostra que, se p_n e p_{n+1} são números de Pell, então $\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n}$.

A razão de bronze, que procuraremos explorar neste trabalho, pode, também, ser obtida como Spinadel fez nos casos das razões de ouro e de prata, fazendo $p = 3$ e $q = 1$ em (1), o que nos dá

$$\sigma_3^1 = \sigma = \frac{3+\sqrt{13}}{2}. \tag{2}$$

Para essa razão, especificamente, não foram encontradas evidências de sua presença no nosso dia a dia, nem em outras áreas do conhecimento humano, como as razões de ouro e de prata. Entretanto, foi utilizada como aplicações, em geral, dos números metálicos, como mencionado em (SPINADEL, 2003a, 2003b). No entanto, essa razão apresenta algumas propriedades importantes, pelo menos no que diz respeito à própria Matemática, como por exemplo, a sua relação com uma sequência de números inteiros (positivos) que será estabelecida mais adiante. Isso pode ser encontrado em Ávila (1985) e em Oliveira (2022) com as razões de ouro e de prata, e suas relações com as sequências de Fibonacci e de Pell, respectivamente. Essa sequência[3] que, segundo a referida pesquisa não foi encontrada na literatura com esse fim, foi criada com o intuito de relacioná-la com a razão de bronze, como o realizado com as sequências de Fibonacci e de Pell, em (ÁVILA, 1985) e em (OLIVEIRA, 2022). Tal sequência será será definida assim:

$$l_0 = 1,\, l_1 = 3 \text{ e } l_n = l_{n-2} + 3l_{n-1}, \tag{3}$$

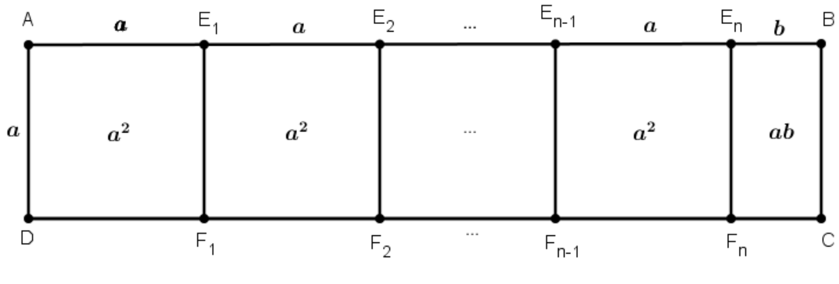
para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Mostraremos sua relação com o retângulo de bronze e, a partir dessa relação, que $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{l_{n+1}}{l_n}$, fazendo um caminho diferente do que Spinadel fez, no sentido de (ÁVILA, 1985), com o propósito de estudarmos, apenas, os números metálicos do tipo σ_p^1.

Constituem-se como objetivos, definir razão de bronze, construí-la e relacioná-la com o retângulo de bronze e a sequência (l_n) em (3). Do que foi visto, percebe-se que o número σ é um particular caso dos números do tipo σ_p^1, raízes positivas da equação $x^2 - px - 1 = 0$, que são as "razões metálicos" e que têm relação com os "retângulos metálicos" propostos, como é o caso do retângulo de bronze. Neste sentido, existem o retângulo de ouro (ÁVILA, 1985) e o retângulo de prata (OLIVEIRA, 2021, 2022).

Definiremos um **retângulo metálico** da seguinte maneira: se $na + b$ e a, $a > b$, são lados de um retângulo ABCD, e n é um inteiro positivo (Figura 1), então ABCD é um **retângulo metálico**, se e somente se, ABCD é semelhante ao retângulo $\mathrm{E_nBCF_n}$, ou seja,

$$\frac{na+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{a}. \tag{4}$$

Figura 1 – Retângulo Metálico



Fonte: Elaborada pelo Autor.

Isso significa que, um **retângulo metálico** é um retângulo do qual foram retirados n

[3] Spinadel obteve tal sequência fazendo em σ_p^q, $p = 3$ e $q = 1$; mas, para estudos como os que foram feitos por (ÁVILA, 1985) e (OLIVEIRA, 2022) com as sequências de Fibonacci e de Pell, respectivamente, a sequência (l_n) não existe na literatura.

quadrados de maior área possível, e que o retângulo restante é semelhante ao retângulo original.

Na Figura 2, se $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$, ... $\mathrm{C_{n-1}}$, $\mathrm{C_n}$ são pontos sobre o segmento de reta $\overline{\mathrm{AB}}$ tais que $\mathrm{AC_1} = \mathrm{C_1C_2} = \cdots = \mathrm{C_{n-1}C_n} = a > b = \mathrm{C_nB}$ e $\frac{\mathrm{AC_1}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{C_nB}}{\mathrm{AC_1}}$, então $\frac{na+b}{a} = \frac{a}{b} = \sigma_p^q$, com $p = nb$ e $q = b^2$. Dizemos, portanto, que $\frac{a}{b}$ é uma **razão metálica**.

Figura 2 – Segmento metálico

Fonte: Elaborada pelo Autor.

Em contraposição, os números σ_1^q, raízes da equação $x^2 - x - q = 0$, que são outros tipos de razões metálicas, também foram estudadas por Spinadel (2003a) e por outros matemáticos e engenheiros, como visto em Sthakov (2009). Dessa maneira, existem os retângulos metálicos associados a esses números, mas, por motivos supracitados, estudaremos, então, apenas os números metálicos da forma σ_p^1.

Como mencionado, não foi possível, a partir desta pesquisa, encontrar ou vislumbrar aplicações da razão de bronze e sua presença no mundo que nos cerca, como as que existem para as razões de ouro e de prata, diferentemente do que foi investigado por Spinadel. Sabemos que os desdobramentos, para possíveis caminhos que levem a aplicações práticas, contribuem, sobremaneira, para a melhoria da ação dos professores de Matemática da Educação Básica, como podemos ver em Kappraff (2001, 2002), Spinadel (2003a, 2003b), Sthakov (2009), Moreira (2021), Oliveira (2021, 2022) e Santos e Madruga (2022).

Entretanto, segundo Moreira (2021),

> [...] poucas vezes são citadas as aplicações das demais disciplinas nas ciências exatas, o que pode acarretar um eventual desinteresse dos estudantes que possuam alguma predileção pelas ciências exatas pelas disciplinas de filosofia e sociologia, história, geografia, língua portuguesa e estrangeiras, biologia, entre outras. Ou seja, estudantes que tenham preferência por matemática, física e química podem acabar por negligenciar as demais matérias por falta do conhecimento da importância que as demais possam vir a ter em suas carreiras, sejam elas quais forem e tal negligência pode causar prejuízos futuros. Em um âmbito mais geral, a divisão do conhecimento em áreas, realizada por questões didáticas, pode conduzir à visão enganosa de que as subáreas do conhecimento humano são independentes entre si. (p. 253)

É de fundamental importância, ainda, observar as palavras de Moreira (2021, p. 253), quando ressalta que "uma vez que o mercado de trabalho tem exigido cada vez mais a participação dos trabalhadores em equipes multidisciplinares, é importante que as pessoas tenham domínio do vocabulário e de conceitos básicos de todas as ciências básicas".

Outro ponto importante é que os números metálicos, em particular, podem ser utilizados na proposição de problemas e atividades sobre números irracionais, como sugerem Pinto (2018), Silva (2018), Broetto e Santos-Wagner (2019) e Barboza, Bergamin e Trivizoli (2021). Além disso, vê-se como a História da Matemática surge como um tema transversal ao ensino da Matemática. Para Santos e Madruga (2022, p. 22),

> A história desempenha um fator importante para o ensino. No caso da Matemática, possibilita ao estudante conhecer uma nova vertente daquilo que aparentava ser único e absoluto, sem relação com a sua realidade. Assim, permite aos estudantes fazer novas escolhas na hora de optar por um curso de graduação ou campo de atuação.

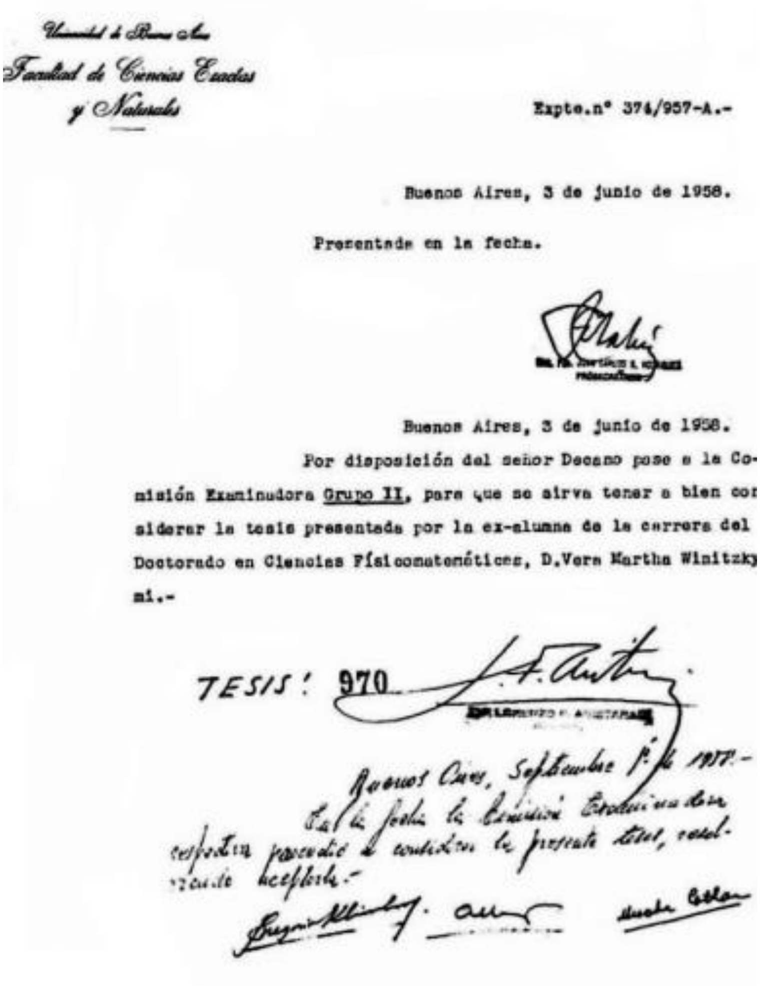
Nas seções a seguir, faremos uma breve apresentação biográfica de Spinadel, uma estudiosa de Matemática muito importante para as ciências, porém pouco conhecida no meio matemático. Definiremos o retângulo de bronze e a razão de bronze e, em seguida, os construiremos geometricamente. Mostraremos, também, a relação da sequência (l_n), em (3), com a razão de bronze, a partir do retângulo de bronze e, por fim, algumas considerações.

Quem foi Spinadel?

Vera Martha Winitzky de Spinadel (1929 - 2017) foi uma matemática argentina, professora da *Universidad de Buenos Aires* e a primeira mulher a doutorar-se em Matemática pela *Facultad de Ciencias Exactas y Naturales da Universidad de Buenos Aires*. A sua tese, cujo título é "*Teoría de las zonas alcanzables em sistemas bidimensionales"*, foi defendida em 03 de junho de 1958, conforme Ata de Defesa (Figura 3)[4].

[4] https://bibliotecadigital.exactas.uba.ar/download/tesis/tesis_n0970_WinitzkydeSpinadel.pdf

Figura 3 – Ata de Defesa da Tese de Doutorado de Spinadel



Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas
y Naturales

Expte.nº 374/957-A.-

Buenos Aires, 3 de junio de 1958.

Presentada en la fecha.

Buenos Aires, 3 de junio de 1958.

Por disposición del señor Decano pase a la Comisión Examinadora Grupo II, para que se sirva tener a bien considerar la tesis presentada por la ex-alumna de la carrera del Doctorado en Ciencias Fisicomatemáticas, D.Vera Martha Winitzkymi.-

TESIS: 970

Fonte: Biblioteca Digital/FCEN-UBA/Winitzky de Spinadel, Vera Martha

Spinadel, ao longa de sua vida, realizou uma intensa e relevante atividade docente e de investigação, abordando temas matemáticos e interdisciplinares em diversas universidades nacionais e estrangeiras. Essa intensidade implicou a publicação de trabalhos em diversas áreas[5] e a sua participação em vários congressos, tanto nacionais quanto internacionais. Também, recebeu vários prêmios e distinções, tais como: uma Medalha de Ouro, em homenagem aos seus 30 anos de docência universitária, e o Prêmio de Produção Científica e Tecnológica da Secretaria de Ciências e Técnica, ambos pela *Universidad de Buenos Aires*. No âmbito administrativo, ocupou vários cargos, tanto públicos quanto privados, e esteve à frente da organização de vários colóquios patrocinados pelo Centro de Cooperação Científica da UNESCO. Por todo seu histórico,

[5] https://uba.academia.edu/VeraMarthaWinitzkydeSpinadel

no dia 01 de setembro de 2010, o Conselho Superior da *Universidad de Buenos Aires* resolve designar Spinadel como Professora Emérita da *Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo da Universidad de Buenos Aires*. Apesar disso, Spinadel foi uma mulher que não se tornou conhecida no meio matemático, talvez por não atuar diretamente como matemática, produzindo somente para a Matemática, embora tenha lecionado a disciplina e contribuído para o seu desenvolvimento e aplicações em várias áreas do conhecimento humano.

Quando se mencionam mulheres na Matemática, o seu nome não aparece, pois suas investigações matemáticas foram voltadas para sistemas dinâmicos não lineares, e as áreas de Física, Arquitetura, Design, entre outras. Viveu em uma época em que a mulher, por mais que suas fortes contribuições fossem relevantes para outras áreas, ainda era estigmatizada, afirmação ratificada por Melo (2017, p. 190), quando diz que "A Matemática, uma das mais antigas ciências que se tem relato e tida como a mãe de todas as outras, é, para muitos, um campo de atuação masculina." Esse argumento torna-se mais forte ao verificarmos que "Para comprovar rapidamente essa realidade basta folhear um livro didático de matemática de qualquer série da Educação Básica, ou ainda, perguntar a um aluno prestes a concluir o Ensino Médio o nome de, pelo menos, uma matemática ou qualquer saber matemático atribuído a uma mulher que ele conheça" (Ibidem).

É possível que esse estigma, além se ser uma atitude puramente machista, concorre, também, o fato de que as ciências, em geral, não foram apresentadas às mulheres como foram aos homens, pois são tão capazes quanto os homens. Se lhes forem dadas oportunidades, com certeza, teremos grandes matemáticas, desfazendo o mito de que Matemática é só para homens, como comprova Melo (2017), ao dizer que

> Diferentemente do que se pensava em outras épocas, hoje temos a comprovação científica – por mais incrível que pareça a necessidade de se comprovar isso cientificamente – de que as mulheres são biologicamente tão capazes quanto os homens de aprender e desenvolver conhecimento nas áreas das ciências exatas. Cai por terra, assim, o mito de que ciência, de modo geral, é coisa de homem. Dessa forma, podemos concluir que esse discurso é uma mera convenção social, que se perpetua, ainda que imperceptivelmente, e povoa o inconsciente das jovens e dos jovens, antes mesmo de chegarem às escolas. (p. 190)

Segundo Santos e Madruga (2022, p. 21), "Durante a evolução da humanidade, as mulheres sempre foram vistas como seres frágeis e submissos. Pessoas que não tinham capacidade de exercer 'atividades de homem'". Nesse sentido,

> Essa análise nos leva a entender um dos porquês de escutarmos desde o ensino fundamental menções a matemáticos e a nomes de teoremas os homenageando, afinal o professor costuma repetir o que aprende com seus mestres. Se na universidade só aparecem estudiosos do sexo masculino nas disciplinas, logo é "natural" que isso se perpetue na prática dos professores e, inclusive, nas práticas das professoras. Entretanto, essa não é a realidade total, uma vez que as matemáticas também deram suas contribuições nessa área e, infelizmente, frequentemente são deixadas de lado nas pesquisas e em obras que versam sobre o assunto. (COELHO, 2021, p. 37)

Durante a construção da história e da sociedade, as mulheres sempre foram, ou se mantiveram, excluídas de muitas atividades, especialmente, estudar e ensinar Matemática, fazendo com que o aspecto de discriminação de gênero prevalecesse nos dias atuais.

Nas seções a seguir, definiremos e construiremos, geometricamente, o retângulo de bronze e a razão de bronze, apresentaremos a sequência (l_n) e a relacionaremos com a razão de bronze.

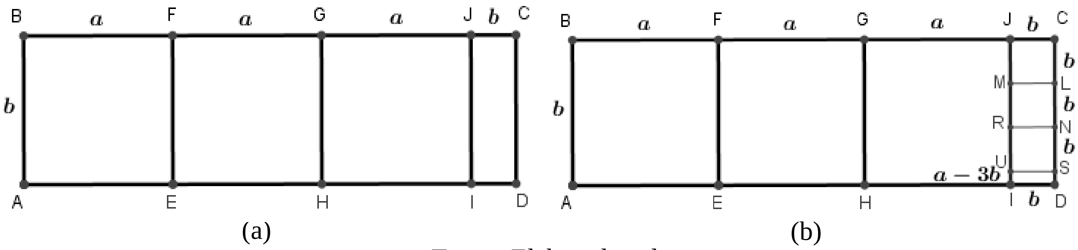
Retângulo de bronze e Razão de Bronze

Um retângulo ABCD (Figura 4a) será chamado **retângulo de bronze** se dele forem suprimidos três quadrados, como ABFE, EFGH e HGJI, restando um retângulo, IJCD, semelhante ao retângulo original. Isso significa que, se $3a + b$ e a, $a > b$, são as medidas dos lados do retângulo original, então

$$\frac{3a+b}{a} = \frac{a}{b}, \tag{5}$$

que é um caso particular de (4), quando $n = 3$.

Figura 4 – Retângulo de bronze.



(a) (b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 4b, ao suprimirmos do retângulo ABCD, três quadrados de lado a, restará o retângulo IJCD de lados a e b, $a > b$. Do retângulo restante, IJCD, retiram-se, novamente, três quadrados de maior área possível (quadrados de lado b), restando o retângulo IDSU de lados $a - 3b$ e b, $b > a - 3b$. Se deste, forem retirados três quadrados de maior área possível (quadrados de lado $a-3b$), restará um retângulo de lados $a-3b$ e $10b-3a$, $a-3b>10b-3a$. Continuando esse processo, que é infinito, a cada passo, chegamos a um retângulo em que o maior lado é o lado menor do retângulo anterior, e o menor lado, o maior lado desse menos três vezes o menor dos lados desse retângulo. Assim, se o retângulo de lados medindo $3a+b$ e a é um retângulo de bronze, então o retângulo de lados a e b, também será um retângulo de bronze. Logo, de (5) segue que

$$\frac{3a+b}{a}=\frac{a}{b}=\frac{b}{a-3b}=\frac{a-3b}{10b-3a}=\frac{10b-3a}{10a-33b}=\frac{10a-33b}{109b-33a}=\frac{109b-33a}{109a-360b}=\cdots \tag{6}$$

e, assim, os retângulos de lados

$$b \text{ e } a-3b;\ a-3b \text{ e } 10b-3a;\ 10b-3a \text{ e } 10a-33b;\ \ldots$$

também são retângulos de bronze. Se a e b, $a>b$, são números positivos satisfazendo (5), então os numeradores das frações em (6) são termos da sequência

$$3a+b, a, b, a_2, a_3, a_4, \ldots, \tag{7}$$

em que

$$a_2=a-3b, a_3=b-3a_2=10b-3a, a_4=a_2-3a_3, \ldots. \tag{8}$$

Isto significa que se $a>b$ são os lados do primeiro retângulo restante, então $b>a_2$ são os lados do segundo retângulo restante e, dessa maneira, o n-ésimo retângulo restante, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 4$, têm lados a_{n-1} e a_n, $a_{n-1}>a_n$, e se origina de um retângulo de lados a_{n-2} e a_{n-1}, com $a_{n-2}>a_{n-1}$ e $a_{n-2}=a_n+3a_{n-1}$. Portanto,

$$a_n=a_{n-2}-3a_{n-1}. \tag{9}$$

Em (9), temos uma sequência infinita de retângulos de bronze com lados cada vez menores, que tendem a zero, à medida que aumentamos o número de retângulos construídos como em (6), semelhantes ao retângulo original, e dois termos consecutivos quaisquer são sempre lados de um retângulo de bronze.

Os lados de um retângulo de bronze são incomensuráveis. De fato, na Figura 4, se AD e AB fossem comensuráveis, então existiria um inteiro $u>0$, de modo que $\mathrm{AD}=(3a+b)u$ e $\mathrm{AB}=au$, em que a e b seriam inteiros positivos. Assim, todos os termos da sequência (9) seriam inteiros positivos, o que é um absurdo, pois não existe uma sequência infinita e decrescente formada por números inteiros positivos. Portanto, os lados de um retângulo de bronze são grandezas incomensuráveis.

Se os pontos C, D e E, sobre um segmento de reta $\overline{\mathrm{AB}}$, são tais que $\mathrm{AC}=\mathrm{CD}=\mathrm{DE}>\mathrm{EB}$ e

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{EB}}, \tag{10}$$

então $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$ é chamada **razão de bronze**.

Figura 5 - Razão de bronze.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Suponhamos que $\mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E} \in \overline{\mathrm{AB}}$ são tais que $\mathrm{AC} = \mathrm{CD} = \mathrm{DE} = a$ e $\mathrm{EB} = b$, $a > b$. Se $\mathrm{AB} = 3\mathrm{AC} + \mathrm{EB}$, então $\mathrm{AB} = 3a + b$ e, dessa maneira, a eq. (9) pode ser reescrita como $\frac{3a+b}{a} = \frac{a}{b}$, ou ainda, $a^2 - 3ab - b^2 = 0$. Daí $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0$, e assim, $\frac{a}{b} = \sigma = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ é a raiz positiva da equação $\sigma^2 - 3\sigma - 1 = 0$.

Observemos que (5) e 10) são equivalentes. Daí, se os segmentos AB e AC e (AC e EB), na Figura 5, são os lados de um retângulo de bronze, então essa equivalência dá-nos uma relação entre a razão de bronze e o retângulo de bronze. Um **retângulo de bronze** é, portanto, um retângulo, cuja razão entre seu lado maior e seu lado menor é igual à razão de bronze: $\frac{a}{b} = \sigma$.

Agora, se $\mathrm{C}_1, \mathrm{D}_1$ e E_1 dividem o segmento $\overline{\mathrm{AB}}$, de modo que $\mathrm{AC}_1 = \mathrm{C}_1\mathrm{D}_1 = \mathrm{D}_1\mathrm{E}_1 > \mathrm{E}_1\mathrm{B}$, se C_2, D_2 e E_2 dividem o segmento $\overline{\mathrm{AC}_1}$, de modo $\mathrm{AC}_2 = \mathrm{C}_2\mathrm{D}_2 = \mathrm{D}_2\mathrm{E}_2 > \mathrm{E}_2\mathrm{C}_1$ e, se continuarmos nesse processo, ao marcarmos os pontos C_n, D_n e E_n sobre o segmento $\overline{\mathrm{AC}_{n-1}}$, de modo que $\mathrm{AC}_n = \mathrm{C}_n\mathrm{D}_n = \mathrm{D}_n\mathrm{E}_n > \mathrm{E}_n\mathrm{C}_{n-1}$, $n = 3,4,5, \ldots$, e se a relação (10) é satisfeita, então

$$\frac{\mathrm{AC}_{n-1}}{\mathrm{AC}_n} = \frac{\mathrm{AC}_n}{\mathrm{E}_n\mathrm{C}_{n-1}}. \tag{11}$$

Na eq. (11), $\mathrm{AC}_n = a_{n-1}$ e $\mathrm{E}_n\mathrm{C}_{n-1} = a_n$ correspondem, respectivamente, ao maior e ao menor dos lados do n-ésimo retângulo de bronze e, assim, $\frac{\mathrm{AC}_n}{\mathrm{E}_n\mathrm{C}_{n-1}} = \sigma$, de acordo com a sequência em (6). De maneira análoga ao que foi feito para mostrar a incomensurabilidade de AD e AB, na Figura 4a, mostra-se que AC_n e AC_{n-1} são incomensuráveis.

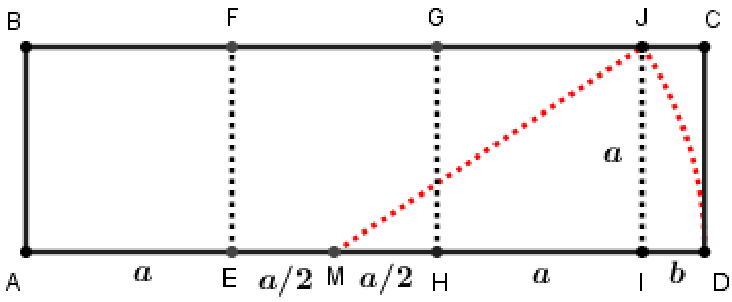
Construções

Dado o lado menor $\overline{\mathrm{AB}}$ de um retângulo, vamos constuir um segmento $\overline{\mathrm{AI}}$, de modo que $\mathrm{AI} = 3\mathrm{AB}$. Tome os pontos E, M e H sobre $\overline{\mathrm{AI}}$, de modo que $\mathrm{AE} = \mathrm{EH} = \mathrm{HI} = \mathrm{AB}$ e M, ponto médio de $\overline{\mathrm{EH}}$. Por I, construímos o segmento $\overline{\mathrm{IJ}}$, $\overline{\mathrm{IJ}} \perp \overline{\mathrm{AI}}$ e $\mathrm{IJ} = \mathrm{AB}$. Com centro em M e raio MJ, traçamos o arco JD, com $\mathrm{D} \in \overrightarrow{\mathrm{AI}}$, I entre H e D.

Resultado: o retângulo ABCD, de lados $\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{AD}}$, é um retângulo de bronze (Figura 6).

Justificativa. Se $\mathrm{AB} = a$ e $\mathrm{ID} = b$, com $a > b$, então $\mathrm{HI} = a$, $\mathrm{MH} = \frac{\mathrm{EH}}{2} = \frac{a}{2}$, $\mathrm{MI} = \frac{a}{2} + a$ e $\mathrm{IJ} = \mathrm{a}$. Como $\mathrm{MJ} = \mathrm{MD} = \mathrm{MH} + \mathrm{HI} + \mathrm{ID} = \frac{3a}{2} + b$ e $\mathrm{MJ}^2 = \mathrm{MI}^2 + \mathrm{IJ}^2$, segue que $\left(\frac{3a}{2} + b\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + a\right)^2 + a^2$, e daí, $a^2 - 3ab - b^2 = 0$, ou seja, $\frac{3a+b}{a} = \frac{a}{b}$, de acordo com (5). ■

Figura 6 - Construção do retângulo de bronze.



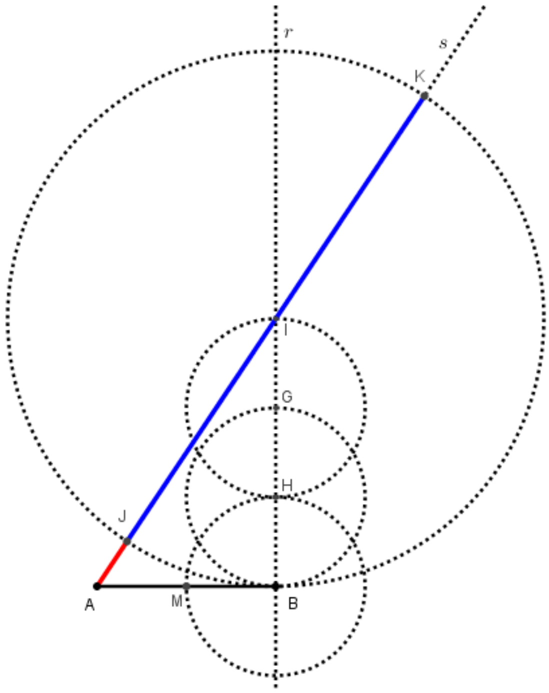
Fonte: Elaborada pelo autor.

Queremos, agora, determinar, geometricamente, a razão de bronze de um segmento dado $\overline{\mathrm{AB}}$ (Figura 7). Por B, traçamos a reta r, $r \perp \overline{\mathrm{AB}}$. Com centro em B e raio $\overline{\mathrm{MB}}$, M ponto médio de $\overline{\mathrm{AB}}$, construímos o círculo c_1, $c_1 \cap r = \{\mathrm{H}\}$. Com centro em H e raio $\overline{\mathrm{MB}}$, construímos o círculo c_2, de modo que $c_2 \cap r = \{\mathrm{G}, \mathrm{B}\}$. Com centro em G e raio $\overline{\mathrm{MB}}$, construímos o círculo c_3, com $c_3 \cap r = \{\mathrm{I}, \mathrm{H}\}$. Agora, com centro em I e raio $\overline{\mathrm{BI}}$, construímos o cículo c_4, de modo que $c_4 \cap \overrightarrow{\mathrm{AI}} = \{\mathrm{J}, \mathrm{K}\}$.

Resultado: os segmentos AB, AJ e AK (Figura 7) satisfazem $\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AJ}}} = \frac{\overline{\mathrm{AK}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$.

Justificativa. Na Figura 5, temos que $\overline{\mathrm{AJ}} = \frac{\sqrt{13}-3}{2}\overline{\mathrm{AB}} = \frac{1}{\sigma}\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{AK}} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}\overline{\mathrm{AB}} = \sigma\overline{\mathrm{AB}}$ e, portanto, $\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AJ}}} = \sigma = \frac{\overline{\mathrm{AK}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$, conforme (10). ■

Figura 7 - Construção da razão de bronze.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A sequência de termo geral $l_n = l_{n-2} + 3l_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $l_0 = 1$, $l_1 = 3$, e a razão de bronze.

Em Ávila (1985), vimos como foi feita a relação da razão de ouro com a sequência de Fibonacci e, em Oliveira (2021b), a relação da razão de prata com a sequência de Pell. Mostraremos, a seguir, como a razão de bronze relacionar-se-á com a sequência (l_n), definida pela recorrência $l_0 = 1$, $l_1 = 3$ e $l_n = l_{n-2} + 3l_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, em que seus termos são $1,3,10,33,109,\ldots$. Queremos mostrar que

$$\sigma = \lim_{n \to \infty} \frac{l_{n+1}}{l_n}.$$

Inicialmente, o termo geral a_n, da sequência em (7), pode ser reescrito como

$$a_n = (-1)^n (l_{n-2}a - l_{n-1}b), \tag{12}$$

onde l_{n-2} e l_{n-1} são termos da sequência (l_n), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

De fato, para $n = 4$, a eq. (12) é verdadeira, pois, como $a_4 = 10a - 33b$, tem-se $a_4 = (-1)^4(l_{4-2}a - l_{4-1}b)$. Suponhamos, então, que (12) seja verdadeira para todo $k \in \mathbb{N}$, $4 < n \leq k$, isto é, $a_{k-1} = (-1)^{k-1}(l_{k-3}a - l_{k-2}b)$ e $a_k = (-1)^k(l_{k-2}a - l_{k-1}b)$. Para $n = k + 1$, o termo geral da sequência em (9), fica $a_{k+1} = a_{k-1} - 3a_k$, e daí,

$$a_{k+1} = (-1)^{k-1}(l_{k-3}a - l_{k-2}b) - 3(-1)^k(l_{k-2}a - l_{k-1}b),$$

ou seja,

$$a_{k+1} = (-1)^{k+1}(l_{k-3}a - l_{k-2}b) + 3(-1)^{k+1}(l_{k-2}a - l_{k-1}b).$$

Assim,

$$a_{k+1} = (-1)^{k+1}[(l_{k-3} + 3l_{k-2}a) - (l_{k-2} + lp_{k-1})b] = (-1)^{k+1}(l_{k-1}a - l_k b),$$

ou seja, (12) é verdadeira para $n = k + 1$. Portanto, $a_n = (-1)^n(l_{n-2}a - l_{n-1}b)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Por fim, em (12), se $n \to \infty$, então $a_n = a_{n-2} - 2a_{n-1} \to 0$, e assim, $p_{n-2}a - p_{n-1}b \to 0$. Daí, como $p_{n-2}b > 0$, temos que $\frac{p_{n-1}b}{p_{n-2}b} - \frac{p_{n-2}a}{p_{n-2}b} \to 0$, ou seja, $\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} - \frac{a}{b} \to 0$. Portanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{l_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{l_{n-1}}{l_{n-2}} = \frac{a}{b} = \sigma$, o que nos mostra como a razão de bronze e a sequência (l_n) estão relacionadas. ■

Na Tabela 1, a seguir, veremos que se calcularmos o quociente entre dois termos consecutivos da sequência (l_n), e considerando uma aproximação de 3 casas decimais, para $n \geq 4$, temos que o algarismo da terceira casa decimal de $\frac{l_n}{l_{n-1}}$ é sempre 2.

Tabela 1 - Quociente de um termo qualquer da sequência de (l_n) pelo seu anterior

$\frac{3}{1}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{33}{10}$	$\frac{109}{33}$	$\frac{360}{109}$	$\frac{1189}{360}$	$\frac{3927}{1189}$	$\frac{12970}{3927}$	$\frac{42837}{12970}$	$\frac{141481}{42837}$	$\frac{467280}{141481}$	$\frac{1543321}{467280}$
3,000	3,333	3,300	3,303	3,302	3,302	3,302	3,302	3,302	3,302	3,302	3,302

Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerações Finais

Concluímos, a partir de investigações para a realização deste trabalho, que a razão de bronze está presente no mundo que nos cerca, não com a frequência das razões de ouro e de prata, que envolvem inúmeras aplicações em várias áreas do conhecimento humano. Não é de se estranhar que esta razão fosse aparecer no mundo que nos cerca com menos frequência, visto que não aparece de maneira específica, mas como um membro particular da família dos números metálicos, que estão em vários trabalhos de Economia, Arquitetura, Geometria, entre outros. Entretanto, não poderíamos deixar de investigá-la como uma continuação de estudos das razões de ouro e de prata, a partir de propriedades matemáticas da referida razão, buscando, sempre, novos resultados e eventuais aplicações.

A razão de bronze, assim como as razões de ouro e de prata, tem importantes propriedades, como a relação com uma sequência que é semelhante às sequências de

Fibonacci e de Pell, e que essa sequência não existe na literatura da maneira como se apresentam as de Fibonacci e Pell. Mostramos, pois, com uma série de desdobramentos para várias aplicações em outras áreas do conhecimento humano, que tal sequência é semelhante às de Fibonacci e Pell. Apresentamos, também, a possibilidade de se fazer um trabalho com uma sequência semelhante às de Fibonacci e Pell, a partir do retângulo de bronze, criando tal sequência e mostrando que converge para a razão de bronze.

Os trabalhos de Spinadel sobre números metálicos, que começaram com a generalização da sequência de Fibonacci, contribuíram, fortemente para a criação de um ramo da Matemática chamado Matemática da Harmonia, que é, simplesmente, o uso da razão áurea em diversas áreas, como Física, Engenharia, Arquitetura, Arte, Design e Computação Científica. Nesse sentido, apesar de não serem conhecidos no meio matemático, nem seus trabalhos serem voltados especificamente para Matemática, contribuíram para o ensino de Matemática.

Preocupados com a formação do professor de Matemática e sua ação em sala de aula, mostramos o quão possível é trabalhar a Matemática em outras áreas, com a possibilidade de proposição de atividades, ainda que sejam problemas que não tenham aplicações práticas. É interessante perceber que a beleza da Matemática, também, pode ser encontrada na possibilidade de identificá-la em outras áreas do conhecimento humano, mostrando que está presente em toda parte, mas que poucos a reconhecem. Se isso não for possível, certamente, é possível perceber que existem beleza e importância na resolução de problemas, embora não tenham aplicações práticas ou não sejam contextualizados.

Como proposto, definimos e construímos a razão de bronze e o retângulo de bronze e, em seguida, mostramos que a sequência (l_n) está relacionada com a razão de bronze a partir do retângulo de bronze. Para trabalhos futuros, pretendemos estabelecer algumas propriedades dessa sequência, vislumbrando aplicações como as de Fibonacci e Pell, e dar importantes contribuições para o ensino de Matemática.

Referências

ÁVILA, Geraldo. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática**, n. 6, SBM, p. 9 - 14, 1º semestre de 1985.

BARBOZA, Ana Caroline Frigéri; BERGAMIM, Érica Gambarotto Jardim; TRIVIZOLI, Lucieli Maria. Números irracionais: duas atividades envolvendo o pentagrama. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 8, n. 24, p.

32 – 46, 2021. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/4683>. Acesso em: 9 abr. 2022.

BROETTO, Geraldo Cláudio; SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira dos. O Ensino de Números Irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso? **Bolema**, v. 33, n. 64, p. 728 – 747, ago. 2019.

COELHO, Maria Glécia Monteiro. **Trajetórias de mulheres docentes da área de Matemática:** um estudo de gênero com professoras de Quixadá a partir dos anos finais do ensino fundamental. 2021, 52f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual do Ceará - Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central – FECLESC, Quixadá, CE, 2021.

HUNTLEY, Herbert Edwin. E. **The Divine Proportion**: a Study in Mathematical Beauty. New York: DOVER, 1970.

KAPPRAFF, Jay. **CONNECTIONS:** The Geometric Bridge Between Art and Science. Singapura: World Scientific, 2001.

KAPPRAFF, Jay. **BEYOND MEASURE:** A Guided Tour Through Nature, Myth, and Number. Singapura: World Scientific, 2002.

LIVIO, Mario. **Razão Áurea:** a história de Fi, um número surpreendente. Tradução de Marco Shinobu Matsumura. Rio de Janeiro: Record, 2009.

MELO, Carlos Ian Bezerra de. Relações de gênero na matemática: o processo histórico-social de afastamento das mulheres e algumas bravas transgressoras. **Revista Ártemis** - Estudos de Gênero, Feminismos e Sexualidades, v. XXIV, n. 1, p. 189 – 20, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ufpb.br/index.php/artemis/article/view/34424>. Acesso em: 12 abr. 2022.

MOREIRA, Nícolas de Araújo. E quando as outras ciências influenciam as ciências exatas? Ou... Em defesa de um ensino transversal. **Revista do Professor de Matemática On-line**, v. 9, n.2, SBM, p. 252 – 260, 2021.

OLIVEIRA, João Luzeilton de; MELO, Carlos Ian Bezerra de. A Razão de Prata e o mundo que nos cerca. **Educação Matemática em Revista**, v. 26, n. 71, SBEM, p. 31 – 45, abr./jun. 2021.

OLIVEIRA, João Luzeilton de. O retângulo de prata, a razão de prata e sua relação com a sequência de Pell. **Revista do Professor de Matemática On-line**, v. 10, n.2, SBM, p. 163 – 181, 2022.

PINTO, Ronaldo; COSTA, Liliana da. A irracionalidade e transcendência de certos logaritmos. **Revista do Professor de Matemática On-line**, v. 6, n.1, SBM, p. 68 – 75, 2018.

SANTOS, Jailda da Silva dos; MADRUGA, Zulma Elizabete de Freitas. Mulheres nas Ciências Exatas: um olhar para pesquisas científicas. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 9, n. 25, p. 20–34, 2022. Disponível em: <https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/5601>. Acesso em: 9 abr. 2022.

SILVA, Marcelo Miranda. **Desmistificando o conjunto dos números irracionais**. 2018, 76f. Dissertação de Mestrado (PROFMAT) - Universidade Estadual do Ceará- Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede (PROFMAT) - Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central – FECLESC, Quixadá - CE, 2018.

SPINADEL, Vera M. Winitzky de. **Del Número de Oro al Caos.** Buenos Aires: Nobuko, 2003a.

SPINADEL, Vera M. Winitzky de. La familia de numeros metalicos. **Cuadernos del CIMBAGE**, n. 6, p. 17 - 44, 2003b.

STAKHOV, Alexey Petrovich. **THE MATHEMATICS OF HARMONY**: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. Singapura: Editora World Scientific, vol. 22, 2009.

Recebido em: 12 / 04 / 2022
Aprovado em: 06 / 07 / 2022