BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

V SCHM
V Seminário Cearense de História da Matemática
11 e 12 de abril de 2022
FORTALEZA - CEARÁ - BRASIL

e-ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v9i26.7986

A ÁLGEBRA GEOMÉTRICA DE ʿUMAR AL-KHAYYĀMĪ EM SALA DE AULA

ʿUMAR KHAYYĀMĪ'S GEOMETRIC ALGEBRA IN THE CLASSROOM

Severino Carlos Gomes[1]

RESUMO

O presente artigo é parte de um projeto de ensino e pesquisa em andamento que utiliza episódios da História da Matemática para promover formas de colaboração não individualistas de aprendizagem e para incentivar nos alunos o gosto pela resolução de tarefas não padronizadas com a exploração de novas possibilidades de ensino e aprendizagem. O objetivo do presente artigo é apresentar uma atividade sobre um episódio histórico e a partir dele exemplificar tarefas que podem ser elaboradas e utilizadas em sala de aula para discussão com alunos de ensino básico ou professores de matemática em formação. Para isso, utilizaremos um estudo de ʿUmar al-Khayyāmī sobre a resolução de equações cúbicas através de seções cônicas com auxílio do software Geogebra. Os resultados esperados versarão sobre a aprendizagem de saberes envolvendo a resolução apresentada por al-Khayyāmī, a interpretação utilizando construções geométricas das seções cônicas através do Geogebra e pela mobilização de elementos fundamentais para a formação ético-reflexiva de jovens estudantes de acordo com a Teoria da Objetivação.
Palavras-chave: Matemática Islâmica Medieval, ʿUmar al-Khayyāmī, Ensino de Matemática, História da Matemática, Teoria da Objetivação.

ABSTRACT

This article is part of an ongoing teaching and research project that uses episodes from the History of Mathematics to promote non-individualist forms of collaboration in learning and to encourage students to enjoy solving non-standardized tasks by exploring new possibilities for teaching and learning. The purpose of this article is to present an activity about a historical episode and from it to exemplify tasks that can be elaborated and used in the classroom for discussion with elementary school students or mathematics teachers in training. For this, we will use a study by ʿUmar al-Khayyāmī on solving cubic equations through conic sections with the aid of Geogebra software. The expected results will deal with the learning of knowledge involving the resolution presented by al-Khayyāmī, the interpretation using geometric constructions of conics through Geogebra and the mobilization of fundamental elements for the ethical-reflective training of young students according to the Theory of Objectification.
Keywords: Medieval Islamic Mathematics, ʿUmar al-Khayyāmī, Teaching of Mathematic, History of Mathematic, Theory of Objectification.

[1] Doutor em Educação (UFRN). Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN), Natal, RN, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Joaquim Eduardo de Farias, 211, Condomínio Sunrise, Ap. 702, Torre B, Ponta Negra, Natal, RN, Brasil, CEP: 59091-130. E-mail: severocarlosgomes@gmail.com.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-8033-2675

Introdução

Nas últimas décadas tem havido uma preocupação mundial crescente em educar professores (ou futuros professores) de matemática através da reflexão sobre fundamentos didático-pedagógicos envolvendo o papel da História da Matemática no ensino e aprendizagem, bem como no desenvolvimento de estruturas metodológicas, teóricas e conceituais passíveis de auxiliarem no cotidiano da sala de aula (FURINGHETTI; RADFORD, 2008; JANKVIST, 2009, 2011; KJELDSEN, 2012; SAD; SILVA, 2008; SIU, 2006). Para diversos pesquisadores da área, a História da Matemática "é um bom veículo para refletir sobre problemas cognitivos e educacionais, e para trabalhar as concepções dos alunos sobre matemática e seu ensino" (FURINGHETTI, 2000, p. 51, Tradução nossa).

Em geral, utilizar a História da Matemática em sala de aula não resultará em mudanças milagrosas na motivação do aluno para aprender matemática. No entanto, tal utilização aponta uma perspectiva sobre o desenvolvimento e a consolidação da ciência matemática como um empreendimento humano, uma construção cultural coletiva. Sobretudo, em particular, destacamos que um episódio histórico matemático delimita um marco para o estudo do determinando assunto apontando sua importância no desenvolvimento e na consolidação dos saberes culturalmente constituídos. Tais episódios são potencialmente ricos pedagogicamente para o desenvolvimento de atividades sobre a natureza da matemática e, necessariamente, sobre seu ensino e aprendizagem em sala de aula.

Nesse sentido, o presente artigo é parte de projeto de pesquisa[2] em desenvolvimento com estudantes de Ensino Médio. O projeto tem foco na utilização de episódios da História da Matemática para promover formas de colaboração não individualistas de aprendizagem, com base na concepção metodológica do *labor conjunto* da Teoria da Objetivação (RADFORD, 2021) para despertar/incentivar nos alunos o gosto pela resolução de tarefas não padronizadas e a exploração de possibilidades alternativas de ensino e aprendizagem.

Portanto, o objetivo do presente artigo é apresentar uma atividade sobre um episódio histórico retirado dos estudos de ʿUmar al-Khayyāmī[3] sobre a resolução de

[2] Título do projeto: Episódios de História da Matemática e seu uso didático-pedagógico na formação do estudante independente e matematicamente ativo.

[3] Os nomes árabes no texto estão de acordo com a transliteração apresentada em *Islamic Scientific Manuscripts Initiative* (ISMI): https://ismi.mpiwg-berlin.mpg.de/

equações cúbicas através de seções cônicas, com auxílio do software Geogebra, e a partir dele exemplificar tarefas que podem ser elaboradas e utilizadas em sala de aula para discussão com alunos de ensino básico ou professores de matemática em formação.

Na primeira parte do artigo apresentamos um breve panorama dos estudos das seções cônicas no império islâmico medieval até a época de al-Khayyāmī. A parte seguinte trata dos referenciais teóricos do planejamento e desenvolvimento da atividade em tarefas, as quais são apresentadas de forma sintética. Por fim, destacamos uma delas para comentários, discussões e algumas considerações sobre a utilização da História da Matemática em sala de aula, e sobre a atividade em si.

A álgebra de ʿUmar al-Khayyāmī

Nos tempos do império islâmico medieval, o estudo sistemático das equações lineares e quadráticas era ferramenta conhecida desde os tempos de al-Khwārizmī (780-850). O mesmo não se pode afirmar sobre o estudo das equações cúbicas. Em palavras atribuídas a ʿUmar al-Khayyāmī (1048-1120)[4]:

> Nada veio dos gregos a respeito da teoria das equações cúbicas. Embora Arquimedes aponte um problema geométrico capaz de ser reduzido a uma equação cúbica, nem ele nem seus comentaristas foram capazes de formular esse problema algebricamente. (RASHED, 1994, p. 44)[5].

Vale salientar que a partir do século IX, os matemáticos islâmicos intensificaram os estudos envolvendo as equações cúbicas. Em geral, eles buscavam resolver essas equações por meio de radicais (YOUSCHKEVITCH, 1976). Porém, o estudo de equações através da intersecção de curvas não era novidade. Essa técnica era perfeitamente compreendida, como pode ser visto nas obras de Ibrāhīm ibn Sinān (909-946), al-Qūhī (940-1000) e ibn al-Haytham (965-1040), por exemplo. (RASHED, 1994, 2001; FAULKNER; GREGERSEN, 2018).

No entanto, as traduções algébricas e outros estudos da época não produziram um corpo de estudos sistemáticos sobre equações cúbicas. Em sua álgebra, al-Khayyāmī

[4] Ghiyāth al-Dīn Abū al-Fatḥ ʿUmar ibn Ibrāhīm al-Khayyāmī al-Nīshāpūrī é mais conhecido no Ocidente como ʿUmar Khayyām ou Omar Khayyam. Ele é um dos estudiosos proeminentes da época medieval, com notáveis contribuições nos campos da matemática e da astronomia. Mais informações em Silva, Gomes e Morey (2021).

[5] *Nothing came down from the Greeks concerning the theory of cubic equations. Though Archimedes states a geometrical problem capable of being reduced to a cubic equation, neither he nor his commentators were able to formulate this problem algebraically.* (RASHED, 1994, p. 44)

inclui uma classificação de equações e construções geométricas de raízes por meio das quais as condições de existência de soluções positivas são determinadas. (YOUSCHKEVITCH, 1976). Ainda, ele apresenta como resolver equações (lineares e quadráticas), tanto numericamente quanto geometricamente. Também como resolver equações cúbicas, embora apenas geometricamente. Podemos afirmar que al-Khayyāmī coletou, sistematizou e complementou estudos parciais anteriores sobre equações cúbicas.

Al-Khayyāmī classificou as equações cúbicas em quatorze tipos, listados na Figura 1 junto com os tipos de curvas (círculo, hipérbole, parábola) que ele usa para construir a solução positiva.

Figura 1 – Tipos de equações cúbicas[6].

Equation $(a, b, c > 0)$:	Solutions:	Curves:
1. $x^3 = c$	$x_1 > 0;\ x_{2,3} \in \mathbb{C}$	P, P
2. $x^3 + bx = c$	$x_1 > 0;\ x_{2,3} \in \mathbb{C}$	C, P
3. $x^3 + c = bx$	$x_{1,2} > 0$ or $\in \mathbb{C};\ x_3 < 0$	P, H
4. $x^3 = bx + c$	$x_1 > 0;\ x_{2,3} < 0$ or $\in \mathbb{C}$	P, H
5. $x^3 + ax^2 = c$	$x_1 > 0;\ x_{2,3} < 0$ or $\in \mathbb{C}$	P, H
6. $x^3 + c = ax^2$	$x_{1,2} > 0$ or $\in \mathbb{C};\ x_3 < 0$	P, H
7. $x^3 = ax^2 + c$	$x_1 > 0;\ x_{2,3} \in \mathbb{C}$	P, H
8. $x^3 + ax^2 + bx = c$	$x_1 > 0;\ x_{2,3} < 0$ or $\in \mathbb{C}$	C, H
9. $x^3 + ax^2 + c = bx$	$x_{1,2} > 0$ or $\in \mathbb{C};\ x_3 < 0$	H, H
10. $x^3 + bx + c = ax^2$	$x_{1,2} > 0$ or $\in \mathbb{C};\ x_3 < 0$	C, H
11. $x^3 = ax^2 + bx + c$	$x_1 > 0;\ x_{2,3} < 0$ or $\in \mathbb{C}$	H, H
12. $x^3 + ax^2 = bx + c$	$x_1 > 0;\ x_{2,3} < 0$ or $\in \mathbb{C}$	H, H
13. $x^3 + bx = ax^2 + c$	$x_1 > 0;\ x_{2,3} > 0$ or $\in \mathbb{C}$	C, H
14. $x^3 + c = ax^2 + bx$	$x_{1,2} > 0$ or $\in \mathbb{C};\ x_3 < 0$	H, H

Fonte: Sesiano (2009, p. 88).

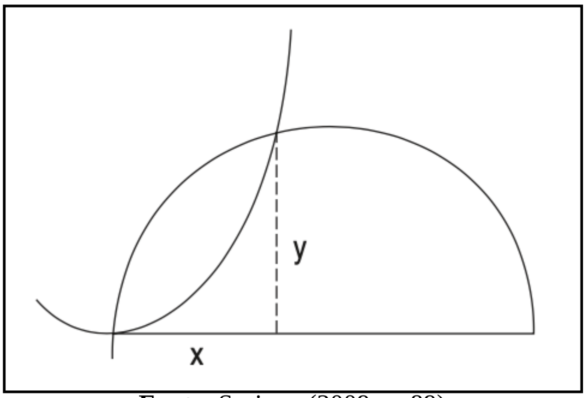
Segundo Rashed (1994), o estudo de al-Khayyāmī às vezes foi assimilado como uma teoria geométrica de equações cúbicas. No entanto, se por teoria geométrica se entende usar figuras geométricas para determinar raízes positivas reais dessas equações, a assimilação é sem dúvida imprópria, uma vez que a figura geométrica apenas cumpria uma função auxiliar na álgebra de al-Khayyāmī. Assim, se as soluções para essas equações são obtidas por meio da interseção de duas cônicas, em ambos os casos a interseção ainda é demonstrada algebricamente, ou seja, usando equações de curva.

[6] Em notação contemporânea para simplificar a utilização na atividade em sala de aula.

Nesse sentido, em particular, este trabalho concentra atenção na resolução da equação $x^3 + ax = b$ (Um cubo e os lados são iguais a um número) apresentada por al-Khayyāmī. (YOUSCHKEVITCH, 1976). Vejamos a resolução.

Com efeito, tome $p = \sqrt{a}$ e $q = \frac{b}{a}$. Assim, a equação $x^3 + ax = b$ equivale a $x^3 + p^2x = p^2q$. Desenhe uma semicircunferência de diâmetro q e uma parábola com parâmetro p com vértice interceptando a circunferência perpendicularmente em um extremo do diâmetro (Figura 2)

Figura 2 – Curvas auxiliares.



Fonte: Sesiano (2009, p. 89).

Assim, pelo teorema da altura de um triângulo retângulo inscrito em uma semicircunferência, temos que $\frac{q-x}{y} = \frac{y}{x}$. Por outro lado, usando propriedade da parábola, temos que $\frac{y}{x} = \frac{x}{p}$. Portanto, $\frac{q-x}{y} = \frac{x}{p}$. Assim, $pq - px = xy = \frac{x^3}{p}$. Segue que $x^3 + p^2x = p^2q$. Portanto, o segmento x correspondente à solução da equação $x^3 + ax = b$.

Posteriormente, no desenvolvimento da atividade propósito deste trabalho, voltaremos ao estudo de al-Khayyāmī. Por enquanto vamos compreender planejamento da atividade de ensino e aprendizagem envolvendo o episódio histórico em foco.

Aspectos metodológicos no planejamento e execução da atividade

O planejamento da atividade do ponto de vista da Teoria da Objetivação[7], devemos observar os seguintes aspectos: (1) considerações gerais, (2) os problemas matemáticos, e (3) as formas específicas de colaboração humana.

[7] Para informações sobre a Teoria da Objetivação recomendamos a leitura de Radford (2021).

Nas considerações gerais se deve levar em conta o que os alunos já sabem e envolver o uso de artefatos auxiliares. Estes artefatos podem ser tecnológicos, por exemplo. Sobre os problemas matemáticos, eles devem ser interessantes para os alunos, oferecer oportunidades de reflexão e aprofundamento de saberes matemáticos, e ter uma complexidade conceitual crescente. Por fim, com relação às formas específicas de colaboração humana, a atividade deve mobilizar reflexões críticas, e propiciar o diálogo e a interação entre professor e alunos. (RADFORD, 2021).

Além disso, a atividade deve mobilizar diferentes níveis de conceituação.

> O primeiro nível é associado a uma experiência sensorial concreta, isto é, a uma experimentação e reflexão através do uso de materiais concretos. O segundo nível de conceitualização envolve uma reflexão teórica baseada no uso de objetos concretos que poderiam realçar possíveis ligações emergentes que dão significado aos objetos matemáticos. O terceiro nível de conceitualização aparece com a manipulação de símbolos matemáticos com os quais os estudantes elevam a experiência anterior (experiência sensorial, concreta) para outro nível de consciência. (RADFORD, 2021, p. 176).

Por fim, considerando esses aspectos, a atividade deve ser elaborada relacionando seu objeto, seu objetivo e as tarefas com os problemas para a mobilização dos saberes matemáticos.

Com relação à metodologia de aplicação da atividade em sala de aula, aconselha-se a divisão da turma em grupos de 3 ou 4 alunos. Em geral, a atividade é apresentada pelo professor, os alunos trabalham nos pequenos grupos, o professor participa ativamente das discussões nos grupos através de questionamentos e comentários para movimentar o diálogo. A certa altura, o professor pode convidar a turma para uma discussão geral na qual os grupos podem apresentar as suas ideias e outros grupos podem desafiá-las, sugerir algo ou melhorar e generalizar o que outros grupos produziram. (RADFORD, 2015).

Porém, não basta simplesmente oferecer aos alunos a possibilidade para que eles ajam sozinhos ou em pequenos grupos na execução das tarefas em sala de aula. Para a Teoria da Objetivação, a aprendizagem acontece por meio do *labor conjunto*. Necessariamente,

> O labor conjunto implica um trabalho de professor e alunos que não é simplesmente realizar algo juntos, mas também realizar-se como sujeitos

> histórico-culturais, isto é, como sujeitos comunitários, solidários e responsáveis pelo Outro. (RADFORD, 2020, p. 29)[8].

Portanto, aprender matemática é mais que acumular saberes ou construir seu próprio conhecimento. Aprender requer uma ética comunitária (RADFORD, 2021) que mobiliza saberes e subjetividades.

Nesse sentido, dentro dos ideais metodológicos do *labor conjunto*, a atividade aqui apresentada está dividida em seis tarefas. Para efeito de compreensão geral, vamos situá-las de forma sintética e, posteriormente, detalharemos a quarta tarefa para efeito de explicações e considerações.

A primeira tarefa tem como objetivo investigar as raízes inteiras e positivas da equação $x^3 + ax = b$ através do gráfico da função polinomial $f = x^3 + ax - b$ construído no Geogebra. Para isso, atribuindo valores inteiros e positivos aos coeficientes a e b, investigar a possibilidade de existência das raízes de f marcando a a interseção de seu gráfico com o eixo das abscissas. Para movimentar o diálogo, o professor pode sugerir discussão nos pequenos grupos sobre as raízes de f quando $a = b = 1$ ou $a = 2$ e b =1, por exemplo.

A segunda tarefa tem como objetivo investigar as possíveis interseções de curvas graficamente. Para isso, devemos construir no Geogebra, a parábola dada por $x^2 = \sqrt{a}y$ e a circunferência dada por $\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$. É salutar destacar a abscissa do ponto de interseção dos gráficos. Para movimentar o diálogo, caso necessário, o professor pode sugerir discussão nos pequenos grupos sobre as possíveis relações entre a as duas primeiras tarefas.

A terceira tarefa tem como objetivo investigar as possíveis interseções de curvas analiticamente. Para efeito discussão, podemos determinar algebricamente as interseções da parábola $x^2 = \sqrt{a}y$ com a circunferência $\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$. Seria conveniente dialogar com os alunos sobre alguns requisitos matemáticos exigidos para a determinação da interseção entre curvas. Em outras palavras, efetuamos o desenvolvimento algébrico do sistema formado pelas equações das duas curvas. Tal procedimento mostra uma relação entre as duas equações das curvas e a equação cúbica $x^3 + ax = b$.

[8] *La labor conjunta implica un trabajo de profesores y estudiantes que no es simplemente realizar algo juntos, sino también realizarse como sujetos histórico-culturales, es decir, como sujetos comunitarios, solidarios y responsables del Otro.* (RADFORD, 2020, p. 29)

A quarta tarefa tem como objetivo investigar a resolução geométrica da equação $x^3 + ax = b$. Teceremos mais comentários sobre essa tarefa no decorrer do texto.

A quinta tarefa tem como objetivo resolver a equação $x^3 + ax = b$ através da fatoração algébrica. Vale salientar que esse é um caminho árduo, principalmente, para a compreensão de grande parte dos alunos do ensino médio com defasagem de aprendizagem nesse tipo de artifício. Caberá ao professor adequá-la de acordo com as necessidades e etapas de aprendizagem matemática dos seus alunos.

A última tarefa tem com o objetivo sintetizar os saberes mobilizados nas tarefas anteriores. Para tal, os grupos devem apresentar síntese de estudo comparativo entre a resolução da equação $x^3 + ax = b$ nas tarefas anteriores e a resolução apresentada por al-Khayyāmī (ver Figura 2).

Discussão

As pesquisas recentes da História da Matemática no campo da Educação Matemática põem à tona diversas reflexões teórico-metodológicas, inclusive no âmbito do papel que os fatos históricos podem desempenhar no auxílio do trabalho em sala de aula. Logicamente, essas reflexões partem das próprias questões de pesquisa, seus métodos etc. (SAD; SILVA, 2008). No sentido pedagógico, as pesquisas em História da Matemática "podem funcionar como uma forma de promover uma reflexão crítica e diálogo para contribuir para uma rica compreensão multifacetada da matemática, sua história e seu ensino e aprendizagem." (RADFORD, 2014, p. 89, Tradução nossa).

Nesse sentido, no intuito de explorar fatos históricos matemáticos em sala de aula, apresentamos um episódio envolvendo a álgebra de al-Khayyāmī e sua estreita ligação com a geometria. Em particular, os estudos de al-Khayyāmī são potencialmente ricos para o desenvolvimento de atividades envolvendo seções cônicas e a álgebra de equações polinomiais.

Anteriormente, apresentamos síntese das tarefas da atividade para compreensão global do processo de planejamento e execução. Vejamos agora na íntegra a quarta tarefa com análise parcial e algumas considerações visando sua utilização em sala de aula.

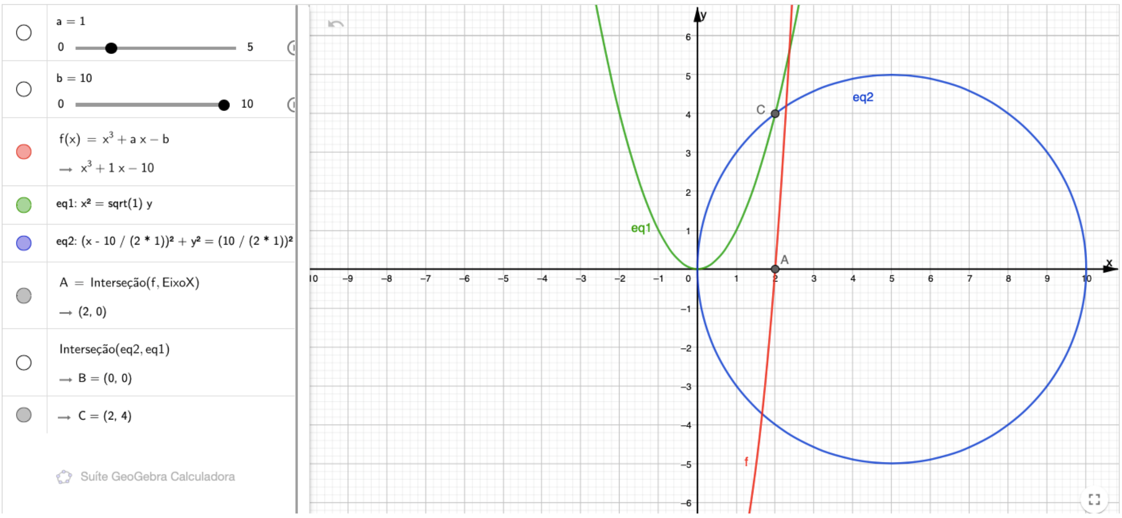
Tarefa 4: Investigando a resolução geométrica da equação $x^3 + ax = b$

Vamos considerar as discussões e os direcionamentos observados nas tarefas anteriores. Para a equação $x^3 + ax = b$, construímos o gráfico de $f = x^3 + ax - b$ no Geogebra. Assim, foi possível visualizar algumas raízes positivas de f.

Em seguida, através da construção geométrica da parábola (eq1) $x^2 = \sqrt{a}y$ e da circunferência (eq2) $\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$, determinamos geometricamente as coordenadas dos pontos de interseção dessas curvas.

Agora, a tarefa será a construção no Geogebra da relação entre as interseções de (eq1) e (eq2) e os valores das raízes de f (Figura 3).

Figura 3 – Solução geométrica da equação cúbica.



Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Denomine de ponto A como sendo a interseção do gráfico de f com o eixo das abscissas, e o ponto C como sendo a interseção da parábola (eq1) com a circunferência (eq2). Complete a Tabela 1 movendo os cursores correspondentes aos valores de a e b.

Tabela 1 – Relações entre coeficientes e raízes

Valor de a	Valor de b	Raiz de f	Ponto de interseção C = (x; y)	Solução da equação
1	2			
1	10			
2	3			
3	4			
4	5			
5	6			

Fonte: Elaborado pelo autor (2022)

Por fim, perguntamos: qual a relação entre os valores das raízes de f, *das abscissas dos pontos de interseção das parábolas com as circunferências, e as soluções da equação* $x^3 + ax = b$ *?*

Para movimentar o diálogo, o professor pode sugerir discussão nos pequenos grupos sobre a Tabela 1 para valores de a *e* b *não inteiros.*

Após apresentação da quarta tarefa da atividade, vejamos algumas considerações. O primeiro ponto a ser analisado é com relação à utilização de artefatos (tabelas e computador com acesso a internet). O *software* de geometria dinâmica utilizado (Geogebra) é uma ferramenta fundamental na construção dos gráficos (Figura 3) para a análise e discussão dos problemas e mobilização dos saberes matemáticos envolvidos.

Um segundo ponto da análise consiste no encadeamento dos problemas propostos em cada tarefa da atividade. Observemos que as tarefas vão de problemas mais simples para questões mais complexas, partindo da construção de gráficos de funções, análise de suas raízes, passando pela interseção gráfica de curvas, depois pela interseção analítica com técnicas algébricas com a posterior resolução da equação $x^3 + ax = b$ geometricamente e algebricamente. Por fim, há uma tarefa de registro no qual cada grupo deve analisar e discutir sobre as relações entre a resolução da equação $x^3 + ax = b$ conforme cada grupo realizou e a resolução efetuada por al-Khayyāmī.

Vale salientar o papel do professor na interação nos grupos de alunos. O professor não é transmissor de saberes ou mediador entre o aluno e o saber matemático. Por exemplo, a Figura 3 apresenta diversas informações geométricas e algébricas no qual a interação entre professor e alunos pode oportunizar diálogo e reflexões críticas do ponto de vista da aprendizagem de saberes matemáticos.

Outro ponto destacado com relação a atividade como um todo, visualizando a quarta tarefa, é relativo ao público-alvo. Observemos que os saberes matemáticos mobilizados são intrínsecos aos tópicos matemáticos estudados ao final do ensino básico. Além dos saberes, o formato da tarefa também ilustra exemplificação a ser utilizada na formação de professores de matemática ou em sua atualização. Assim como outros *softwares* educacionais, o Geogebra oportuniza uma visualização agradável e precisa tanto de gráficos de funções como de entes geométricos.

Algumas considerações finais

Por fim, apresentamos no texto uma atividade baseada em estudo de ʿUmar al-Khayyāmī, aliada aos preceitos da Teoria da Objetivação e com auxílio do *software* Geogebra. Tal atividade é um simples exemplo para conhecimento de como professores ou futuros professores de Matemática podem utilizar um fato histórico em suas salas de aula.

Nossa expectativa é que devido à natureza não trivial da atividade com episódio histórico, aliada ao *labor conjunto* como metodologia de ensino postulada pela Teoria da Objetivação, o trabalho em sala de aula venha a promover uma atmosfera colaborativa e ética na qual os alunos se empenhem no desenvolvimento das tarefas e, consequentemente, desenvolvam-se tanto intelectualmente quanto como cidadãos responsáveis e conscientes de seus papéis em comunidade.

Referências:

FAULKNER, N.; GREGERSEN, E. (Eds.). **The History of Mathematics**. New York: Britannica Educational Publishing, 2018.

FURINGHETTI, F. The history of mathematics as a coupling link between secondary and university teaching. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 31, n. 1, p. 43-51. 2000.

FURINGHETTI, F.; RADFORD, L. Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In: ENGLISH, L. (Ed.), **Handbook of International Research in Mathematics Education**, New York: Routledge, Taylor and Francis, p. 626-655, 2008.

JANKVIST, U. T. Anchoring Students' Metaperspective Discussions of History in Mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 42, n. 4, p. 346-385, 2011.

JANKVIST, U. T. A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. **Educ Stud Math**, n. 71, p. 235-261, 2009.

KJELDSEN, T. H. Uses of history for the learning of and about mathematics: Towards a theoretical framework for integrating history of mathematics in mathematics education. In: S. Choi & S. Wang (Eds.). **Proceedings of HPM 2012**. Daejeon, South Korea: HPM. 2012. p. 1-21.

RASHED, R. Mathematics. In. AL-HASSAN, A. Y. (Ed.). **The Different Aspects of Islamic Culture 4**: science and technology in Islam. Beirut: UNESCO, 2001.

RASHED, R. **The development of Arabic Mathematics:** between arithmetic and algebra. Translate of Angela Armstrong. Boston: Springer, 1994
RADFORD, L. **Teoria da Objetivação**: uma perspectiva vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática. Tradução de Bernadete B. Morey e Shirley T. Gobara. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

RADFORD, L. ¿Cómo seria uma actividad de enseñanza-aprendizaje que busca ser emancipadora? La labor conjunta em la teoria de la objetivación. **Revista Colombiana de Matemática Educativa** (RECME), v. 5, n. 2, p. 15-31, 2020.

RADFORD, L. Methodological Aspects of the Theory of Objectification. **Perspectivas da Educação Matemática**. v. 8, n. 18, p. 547-567, 2015.

RADFORD, L. Reflections on History of Mathematics. In. FRIED, M. N.; DREYFUS, T. (Eds.). **Mathematics & Mathematics Education**: Searching for Common Ground. New York: Springer, 2014.

SAD, L. A.; SILVA, C. M. S. da. Reflexões Teórico-metodológicas para Investigações em História da Matemática. **BOLEMA**, ano 21, n. 30, p. 27-46, 2008.

SESIANO, J. **An introduction to the history of algebra**: solving equations from Mesopotamian times to the Renaissance. Providence: American Mathematical Society, 2009.

SIU, M.-K. No, I don't use history of mathematics in my class: Why? In: F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds.), **Proceedings HPM 2004 & ESU 4**. Uppsala: University of Uppsala, p. 368-382, 2006.

SILVA, R. A. da; GOMES, S. C.; MOREY, B. B. Al-Khwarizmi e Omar Khayyam: similaridades e diferenças entre álgebra e geometria. **Hipátia**, v. 6, n. 2, p. 215-225, 2021.

YOUSCHKEVITCH, A. P. **Les Mathématiques Arabes**: VIII^{e}-XV^{e} siècles. Tradução de M. Cazenaze e K. Jaouiche. Paris: VRIN, 1976.

Recebido em: 24 / 02 / 2022
Aprovado em: 15 / 03 / 2022