

## **LIBER ABACI: CONTEXTO, COMPETÊNCIAS, HABILIDADES E POTENCIALIDADES**

### **LIBER ABACI: CONTEXT, COMPETENCES, ABILITIES AND POTENTIALITIES**

José dos Santos Guimarães Filho<sup>1</sup>; João Cláudio Brandemberg<sup>2</sup>

#### **RESUMO**

No presente trabalho, temos como objeto de investigação o *Liber Abaci* e os elementos historiográficos que o circundam, esse livro foi escrito por Leonardo de Pisa (1180 – 1250) em 1202 ao retornar de suas viagens pelo norte da África. Assim, objetivamos apresentar alguns elementos historiográficos da construção do *Liber Abaci*, com vistas a compreender o contexto histórico de construção do livro e de suas potencialidades para o ensino de conteúdos matemáticos. A fim de alcançar esse objetivo, fizemos uma revisão bibliográfica, na qual, encontramos autores, que serviram de base para a construção da malha histórica em que se encontrava o livro, estes são, Potro (2004, 2009, 2012), Garbi (2007), Vasconcelos (1925), Brito (2007), Franco Júnior (2001), Saito (2015) e Schramm (2001) e para a investigação das potencialidades nos apropriamos de uma edição de 1857 do *Liber Abaci*. Dividimos, dessa forma, este artigo, em três seções: elementos historiográficos, sobre a aritmética no texto e potencialidades de uso no ensino de matemática. Percebemos com a investigação que o livro possuía potencialidades para o século XIII e ainda possui para o século XXI para o ensino de conteúdos matemáticos do campo da aritmética.

**Palavras-chave:** Historiografia medieval; Aritmética; *Liber Abaci*; Potencialidades.

#### **ABSTRACT**

In the present work, we have as an object of investigation the *Liber Abaci* and the historiographical elements that surround it, this book was written by Leonardo de Pisa (1180 - 1250) in 1202 when he returned from his travels in North Africa. Thus, we aim to present some historiographical elements of the construction of the *Liber Abaci*, in order to understand the historical context of the construction of the book and of its potential for teaching mathematical contents. In order to achieve this objective, we carried out a bibliographic review, in which we found authors, who served as the basis for the construction of the historical mesh in which the book was found, these are, Potro (2004, 2009, 2012), Garbi (2007), Vasconcelos (1925), Brito (2007), Franco Júnior (2001), Saito (2015) and Schramm (2001) and for the investigation of potentialities we appropriated an 1857 edition of *Liber Abaci*. We therefore divide this article into

---

<sup>1</sup> Mestre em Educação em Ciências e matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Doutorando em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: TV. Padre Eutíquio, 3496, Condor, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66045-225. E-mail: [js\\_guima@hotmail.com](mailto:js_guima@hotmail.com).

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2839-2176>.

<sup>2</sup> Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Docente Associado IV da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Augusto Correa, sn, Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-000. E-mail: [brand@ufpa.br](mailto:brand@ufpa.br).

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-8848-3550>.

three sections: historiographical elements, about arithmetic in the text and potential use in mathematics teaching. We realized with the investigation that the book had potential for the 13th century and still has for the 21st century for the teaching of mathematical contents in the field of arithmetic.

**Keywords:** Medieval historiography; Arithmetic; *Liber Abaci*; Potentialities.

## Introdução

O matemático italiano Leonardo de Pisa (1180 – 1250) é também denominado como Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo ou Leonardo Fibonacci, no entanto, é simplesmente mais conhecido por Fibonacci – que significa filho de Bonaccio - alcunha dada seiscentos anos mais tarde por Guillaume Libre, este matemático italiano é considerado um dos matemáticos de maior destaque do cenário europeu. Leonardo Fibonacci obteve esse destaque a partir de suas obras publicadas no século XIII, em especial, seu primeiro livro intitulado de *Liber Abaci*, por trazer inovações para o cenário europeu, como os algarismos indo-arábicos e o sistema posicional decimal dos indianos. Temos também a partir desse livro questões bem famosas, como do crescimento populacional ou da reprodução de coelhos que gera uma sequência numérica que ficou conhecida como número de ouro ou proporção áurea, assim, esse matemático ocupa uma posição de grande relevância na história.

Muito embora, essa fala seja conhecida de muitos, temos algumas divergências por parte da historiografia medieval, a qual, apresenta que Leonardo Fibonacci não foi o primeiro a inserir as cifras indianas na Europa, antes dele temos Boécio (480 – 524) e Gebert d’Aurillac (950 – 1003), assim como Adelard de Bath (1180 – 1252), que também viajou pelo mundo Árabe no século XII tendo contato com matemáticas não divulgadas na Europa. Então, quais foram os elementos historiográficos e aritméticos que puderam dar ao *Liber Abaci* tanta visibilidade? Este livro teve potencialidades para o século XIII? E para o século XXI?

Tendo como referência esses questionamentos, objetivamos apresentar alguns elementos historiográficos da construção do *Liber Abaci*, com vistas a compreender o contexto histórico da elaboração do livro e de suas potencialidades para o ensino de conteúdos matemáticos. Para tanto, fizemos uma revisão bibliográfica de livros, artigos, teses e dissertações concernentes a história da idade média, história da matemática medieval, aritmética medieval, aritmética prática e mercantil. Onde encontramos autores como, Potro (2004, 2009, 2012), Garbi (2007), Vasconcelos (1925), Brito (2007), Franco Júnior (2001), Saito (2015) e Schramm (2001). Além disso, investigamos também o

conjunto de saberes contidos no *Liber Abaci* da edição de 1857, e a partir de um estudo deste documento, apontar suas possíveis potencialidades para o ensino de conteúdos matemáticos, em particular, conteúdos da aritmética.

Com a finalidade de alcançar nosso objetivo proposto, organizamos o presente trabalho em três seções, na primeira apresentamos os elementos historiográficos entorno do *Liber Abaci*, para visualizar o que Saito (2015) chama de malha histórica da construção do texto. Em seguida, apresentamos os elementos aritméticos que classificaram o *Liber Abaci* como um manual de aritmética e por fim apresentamos as potencialidades que encontramos após a investigação de uma edição de 1857 do texto em questão. Iniciamos, dessa forma, apresentando a seguir o entrelaçamento dos fatos históricos medievais.

### **Elementos historiográficos**

Nesta seção, trazemos elementos historiográficos que podem nos ajudar em uma ambientação medieval, na qual, Leonardo Fibonacci escreveu seu primeiro livro. Para tanto, faz-se necessário a elucidação de alguns posicionamentos que tomamos para este fim. Seguindo alguns pressupostos de Saito (2015), inicialmente, deixamos claro que não pretendemos nesta seção seguir uma linearidade dos fatos, mas propor uma organização historiográfica que permita uma aproximação com o cenário medieval, assim, nossa preocupação não se fixa nos fatos em si, mas sim nos acontecimentos dos fatos ou em suas projeções ou repercussões, na tentativa de identificar fatores influenciadores, sejam estes diretos ou indiretos para a construção do *Liber Abaci*.

Apontamos também, que embora seja comum a quebra do paradigma de que a Idade Média tenha sido a “idade das trevas”, é válido observar, a partir de Franco Júnior (2001), que até mesmo a rotulação de “idade média” foi dada posteriormente no século XVI, na tentativa de construir uma quebra com o passado, que segundo o autor, foi a partir de um desprezo indisfarçado com o período entre a antiguidade clássica e o próprio século XVI.

Seguimos, trazendo no período, que segundo Franco Júnior (2001), é compreendido pela maioria dos historiadores como idade média, informações que julgamos importantes e que perpassam estes séculos para nossas discussões e ambientações.

Desta forma, iniciamos lembrando da ruptura do Império Romano que rompeu fronteiras geográficas e culturais, bem como, de outros aspectos, tendo como consequência a quebra de relações importantes, como nas ciências e nas artes e o

distanciamento linguístico, o que dificultou cada vez mais o acesso a obras anteriores ao século III.

Como apontado por Brito (2007), um outro aspecto importante, foi a função absorvida pela igreja, de ser a principal mediadora da produção, divulgação e manutenção das ideias e saberes, assim como, da habilidade de leitura e da escrita centralizando o acesso e a produção de conhecimento no clero. Estando limitado os critérios de acesso e da produção de conhecimento, que não poderia ser de outra forma esta veiculação do saber, se não, de estar a serviço da igreja, do conhecimento de Deus e do aprofundamento da Teologia.

Um resultado esperado, pois todo grupo, como foi o clero, quer garantir uma estratégia de estímulo ao desenvolvimento individual e coletivo com o objetivo de sobrevivência e de transcendência de seu grupo, pois utilizam os saberes para explicar, entender e conviver com a realidade sensível, perceptível e imaginária (D'AMBRÓSIO, 1996).

Por consequência, muito das obras greco-romanas produzidas, serviram mais para subsidiar os dogmas cristãos, assim, os textos que divergiam destes foram deixados de lado, alegorizados, adaptados ou reduzidos com o intuito de não contradizerem os ideais religiosos.

Temos então, nos séculos VI e VII a construção de manuais dos saberes já produzidos, restringindo em sua maioria a traduções dos textos, como os feitos por Boécio (480 – 524), os compêndios de teologia, os manuais que tentavam reunir as artes liberais, com vistas a exegese bíblica, textos sobre as artes liberais de Cassiodoro (480 – 575), os livros dos números e as etimologias de Isidoro de Sevilha (550 - 636), manuais de gramática<sup>3</sup> que eram mais usados em situações práticas (BRITO, 2007).

Assim, esta matemática medieval se formou a partir da releitura que a sociedade ocidental da Idade Média fez de fragmentos da matemática grega, releitura esta muitas vezes revestida de aspectos simbólicos e realizada a partir das necessidades relacionadas tanto às especulações metafísicas quanto às questões de trabalho e de sobrevivência (BRITO, 2007, p. 128).

No entanto, o que nos chama atenção, é que esse contexto não era homogêneo em toda a parte ocidental, a qual, passaremos a denominar de Europa. Observamos primeiramente, que no período de sultanato, pós Maomé (571 – 632) e seus principais seguidores, iniciado com Al-Mansur (714 – 775) e seguido de outros, foi estabelecido

---

<sup>3</sup> Relativo à agrimensura e medição de terras a partir da groma, uma ferramenta utilizada pelos romanos.

Bagdá como a nova capital juntamente com uma escola científica denominada de *Bait al-hikma* (Casa da Sabedoria), cuja a biblioteca, segundo Garbi (2009), teve uma importância mundial garantindo estudos posteriores na Europa. Esta escola, não só garantiu a preservação das ciências e das artes conhecidas, como a divulgação, o estudo e a construção de novos saberes, os quais se estenderam pelas fronteiras.

Também observamos que não havia uma hegemonia territorial e de governo único, ou seja, o território europeu não partilhava de uma só cultura, sociedade, economia e liderança, fazendo deste um território diversificado. O que permitiu a entrada, em alguns pontos da Europa, de novas literaturas, conhecimentos da língua árabe, estilos artísticos, técnicas para o comércio, para a agricultura e para manufatura, como a agricultura e a irrigação vinda do Egito, assim como, o conhecimento da bússola, do papel e da pólvora vinda da China (VASCONCELOS, 1925).

Temos nos reinos da Sicília um destes ambientes heterogêneos, Schramm (2001), apresenta este reino como um ponto de interesse para as potências estrangeiras, o qual, teve sua colonização com os gregos, mas conquistado pelos romanos seguidos pelos godos, bizantinos e árabes. Cada um deixou sua marca, sua influência na cultura, na sociedade, na ciência e nas artes, no entanto, os árabes foram os mais marcantes. Estes, em dois séculos, dominaram o *mar tirreno* e fizeram a religião, a cultura e a língua ganharem características tão próprias que deram a esse reinado um aspecto não europeu. Esta configuração muda com a conquista pelos normandos, sobrepondo os aspectos deixados pelos árabes, que trazem novamente as influências românicas e gregas bizantinas (SCHRAMM, 2001).

Desta forma, percebemos que esta sociedade passou por muitas transformações a curto prazo, gerando possíveis conflitos ideológicos, pois posturas que em outrora eram comuns, passavam a ser contraditórias e incompatíveis no novo reinado, bem como, outras passavam a ser aceitas e/ou unidas, transformando essa cultura em uma nova unidade que destoava em muitos aspectos da Europa. Outrossim, temos juntamente com estes conflitos, a oportunidade de acesso a livros em Árabe e em Grego em suas versões originais, os quais, boa parte da Europa só ia ter acesso tempos depois. Estes livros foram traduzidos para o Latim, tornando essa a língua da ciência e deixando para esse reinado o legado de maiores eruditos da época, haja vista, que os governantes normandos se reuniam entorno dessas obras.

Portanto, o fato desse reinado ter sido multicultural até na língua, pois alguns falavam em Grego, Árabe e Latim, tornaram os eruditos da Sicília tradutores de obras muito importantes, como apresentado em Schramm (2001),

Bizâncio recompensou a reaproximação entregando manuscritos preciosos. Os escritos de Euclides, Proclo e até Ptolomeu viajaram para o oeste em manuscritos gregos e foram traduzidos para o latim por tradutores acadêmicos da **universidade de Salerno antes mesmo que a tarefa fosse realizada em Toledo**<sup>4</sup> (SCHRAMM, 2001, p. 290, grifo nosso).

Schramm (2001) nos apresenta Amiratus Eugenius (1130 – 1202) como o tradutor da *Óptica* de Ptolomeu (90 – 168) de uma versão do Árabe, “sem Eugenius, ativo como Amiratus na corte normanda, nada desse trabalho – de importância incomparável e seminal para nossa física – jamais teria chegado ao Ocidente”<sup>5</sup> (SCHRAMM, 2001, p. 290).

Contudo, observamos que estes tradutores, diferentes do clero, não estavam subordinados aos interesses da igreja para suas traduções e estudos. Podemos observar que os reis sicilianos, ainda que no século XII com Roger II (1095 – 1154) e no século XIII com Frederico II (1194 – 1250), contemporâneo de Leonardo Fibonacci, estavam mais próximos de sultões orientais do que governantes europeus em seus estilos e princípios, suas políticas práticas, cultura e a sociedade que os sustentavam (SCHRAMM, 2001).

Essas diversidades na Europa repercutiram em muitos aspectos da vida medieval, no entanto, temos nas atividades comerciais um aspecto que permeou boa parte da Idade Média e por boa parte da Europa, influenciando áreas como as ciências e as artes. Mesmo tendo uma grande repercussão temos muitos nuances, podemos acordar com Potro (2012) quando esta apresenta que,

O precursor do século XI não é o mesmo comerciante do século XIII nem aquele que superou as dificuldades do século XIV e projeta seu domínio indiscutível sobre o século XV. O comércio mercantil passou por importantes transformações ao longo desses séculos que levaram à sua **profissionalização e aceitação social**<sup>6</sup> (POTRO, 2012, p. 202, grifo nosso).

---

<sup>4</sup> “Byzantium rewarded the rapprochement by handing over precious manuscripts. The writings of Euclid, Proclus, and even Ptolemy traveled westward in Greek manuscripts and were rendered into Latin by scholarly translators from the university of Salerno even before the task had been undertaken in Toledo” (SCHRAMM, 2001, p. 290).

<sup>5</sup> “Without Eugenios, active as Amiratus at the Norman court, nothing of this work – of incomparable and seminal importance to our physics – would ever have reached the West” (SCHRAMM, 2001, p. 290).

<sup>6</sup> “El precursor del siglo XI no es el mismo mercader que el del siglo XIII ni el que ha superado las dificultades del siglo XIV y proyecta su dominio indiscutido sobre el siglo XV. El oficio mercantil



Embora seja um fato essas diferenças no comércio e no comerciante ao longo da Idade Média, vejamos alguns pontos importantes e influenciadores deste aspecto da vida medieval. Começamos salientando a citação acima, quando Potro (2012) apresenta que essas transformações mesmo que heterogêneas, culminaram em sua profissionalização, bem como, na profissionalização de outros trabalhadores, como os cambistas, banqueiros e na organização da sociedade em grupos de ofícios, desse modo, a organização urbana e consequentemente social e econômica sofreram modificações. Embora, toda transição passe por divergências, visto que quase sempre temos partidarismos da permanência ou do desejo pelo novo e desconhecido, essas transformações tiveram em larga escala a aceitação social ao ponto de dar novas perspectivas ao clero, que em um dado momento era contra a taxaçoão acima do valor real do produto, posteriormente toma a posição de que é justo cobrar uma quantia a mais em prol do trabalho e empenho empreendido pelos comerciantes ou pelos artífices que fabricavam os produtos.

Vemos que os elementos historiográficos se entrelaçam à medida que absorvemos as informações contidas na história europeia pois, o crescimento comercial só portou um avanço devido, dentre outros aspectos, aos três que são mencionados por Potro (2012), o crescimento demográfico, crescimento da produção agrícola e uma maior estabilidade política.

Outrossim, o aumento da produção agrícola, o aumento da produção artesanal urbana e o contato com povos orientais, possibilitou ao comerciante gerar um impulso para desenvolver rotas locais e internacionais, tanto para o norte quanto para o sul, garantindo um grande aumento e a consolidação das atividades comerciais (GUIMARÃES FILHO; BRANDEMBERG, 2018).

Potro (2012) nos garante essa concepção quando apresenta que,

A conjunção desses três fatores, logo após o apocalíptico ano 1000, estabeleceu as condições ideais e totalmente necessárias para o desenvolvimento do comércio. A princípio lentamente, depois mais rapidamente, a sociedade medieval contemplou como o crescimento da população e o rendimento agrícola permitiam que um maior número de produtos fosse colocado em circulação. Primeiro foram produtos agrícolas, alimentos, panos e tecidos... pouco a pouco foram acrescentados produtos exóticos: perfumes, especiarias, tecidos finos... chegados de terras distantes e que a recente prosperidade do Ocidente tornou possível adquirir<sup>7</sup> (POTRO, 2012, p. 203).

---

experimentó importantes transformaciones a lo largo de estos siglos que le llevaron a su profesionalización y aceptación social” (POTRO, 2012, p. 202).

<sup>7</sup> “La conjunción de estos tres factores, apenas superado el apocalíptico año 1000, establecieron las condiciones idóneas y totalmente necesarias para el desarrollo del comercio. Al principio lentamente, después con mayor celeridad, la sociedad medieval contempló como el crecimiento de la población y del

Temos ainda, em conformidade com Potro (2012), os avanços tecnológicos dos navios e instrumentos de navegação, um aspecto importante para o crescimento comercial que possibilitou o aumento considerável de suas rotas. Estes avanços assistiam o desenvolvimento de serviços de transportes para longas viagens como um ofício complementar, possibilitando nas intermediações do século XIII a separação de algumas funções, dentre as quais, temos os comerciantes fixos, intermediários e transportadores, assim como, o grande comerciante que administrava todo seu negócio da cidade em que morava, confiando algumas etapas de comercialização a agentes localizados em diferentes lugares e/ou terceirizando alguns serviços.

Havia também, a ascensão de alguns serviços urbanos, como os banqueiros, já mencionados, que necessitavam de operações financeiras cada vez mais elaboradas e maiores, pois havia as operações de escambo, depósitos e empréstimos, bem como, movimentos de quantias consideráveis e transferências de dinheiro sem o seu transporte físico. Então, vemos que o crescimento do comércio não só estimulou o desenvolvimento dos banqueiros, como também da circulação monetária e do crédito comercial.

Percebemos com esses desenvolvimentos a necessidade de materiais que orientassem os trabalhos exercidos por essas profissões urbanas, mais especificamente livros técnicos, que em geral eram de aritmética, pois a grande parte do ofício destes trabalhadores era constituído de cálculos conhecidos como aritméticos, influenciando na maior circulação desses conhecimentos.

Potro (2009) salienta que toda produção desses livros técnicos de aritmética europeus dos séculos XIII, XIV e XV parecem estar intimamente ligados ao crescimento comercial, como instrumentos essenciais de apoio às atividades contabilísticas e fiscais, tudo para ter mais eficiência no desenvolvimento de seus serviços.

Toda essa movimentação leva, ao que Potro (2009) se refere, de alfabetismo de cunho utilitário, prático e profissional que unido a aritmética constituía um conhecimento indispensável para um bom negócio mercantil em qualquer escala, bem como, para a administração empresarial e patrimonial e para outros setores urbanos.

Vemos que a complexidade dos problemas enfrentados pelo mercado com sua expansão, exigiram cálculos mais elaborados e confiáveis, chegando um novo desafio

---

rendimiento agrario permitía poner en circulación un mayor número de productos. Primero fueron productos agrícolas, alimenticios, paños y telas... poco a poco se les añadieron productos exóticos: perfumes, especies, telas finas... llegadas de tierras lejanas y que la reciente prosperidad occidental permitía adquirir” (POTRO, 2012, p. 203).



para o mercador em suas atividades: ser entendido em suas contas. Este atributo exigia do mercador um papel importante da aprendizagem que ia para além da vida cotidiana, no qual necessitavam de manuais técnicos que trouxessem uma sistematização dos cálculos com a finalidade de entender e ser entendido. Neste aspecto, podemos dizer que os italianos, orquestrados por Leonardo Fibonacci, se destacaram a partir do *Liber Abaci* escrito em 1202, o qual, será evidenciado na seção seguinte (POTRO, 2012).

### **Sobre os elementos de aritmética no texto**

O *Liber Abaci* escrito por Leonardo Fibonacci em 1202 e que teve uma reedição em 1228, pelo próprio autor, a partir de algumas considerações feitas por Michael Scott<sup>8</sup>, o qual é citado no início da reedição, teve um papel importante na Europa, como o de ser um dos responsáveis pela divulgação das cifras indianas. Mas, para o século XIII foi aquele que proporcionou uma organização das técnicas exigidas pelo comércio em suas diversas atividades, bem como, pelos ofícios urbanos.

Ao traduzir *Liber Abaci* para língua portuguesa, comumente se traduz como livro do ábaco, isso faz com que o leitor tenha a convicção de que este livro seria um manual de como manusear um ábaco, a final, os europeus neste contexto histórico, tinham com essa ferramenta uma ligação muito forte por ser um grande auxílio nas atividades que requeriam cálculos. No entanto, ao adentrarmos no estudo deste texto percebemos que é um livro que trata de cálculos sem a necessidade do ábaco, que julgamos ter sido um grande choque para aquela sociedade, mas também ofereceu um certo conforto para as atividades urbanas e comerciais. Essa troca de métodos e ferramentas, que eram utilizadas nas operações aritméticas, não foram aceitas de imediato, mas, endossadas pelo comércio. Assim, inferimos que uma melhor tradução do título do livro é livro do cálculo, em uma compreensão que se dá pelo conteúdo do texto, que aponta na direção da instrução de cálculos a partir dos algoritmos das operações aritméticas.

Em contato com o livro, o leitor se depara com a fala inicial de Leonardo Fibonacci, o qual apresenta sua própria postura sobre o assunto de sua obra. Vale ressaltar, que tivemos acesso apenas a edição de 1857 do Códice Magliabechiano<sup>9</sup> a partir de Baldassarre Boncompagni, que é uma edição completa referente a reedição de 1228 revisada por Leonardo Fibonacci, assim, não temos como afirmar quais foram os

---

<sup>8</sup> Um dos estudiosos da corte de Frederico II.

<sup>9</sup> Composto por cerca de 6.000 manuscritos, o Magliabechiano é o acervo mais antigo da Biblioteca Nacional Central de Florença.

acréscimos ou possíveis correções que o autor fez nessa segunda edição. Mas, a partir de sua fala inicial, podemos afirmar que este livro se trata de cálculos, ou melhor, da sistematização dos cálculos com a utilização das cifras indianas e com o seu sistema numérico decimal, pois Leonardo Pisano (1857) declara em sua obra, publicar a doutrina completa dos números, segundo o jeito dos indianos. Isso mostra, de uma forma bem direta, que Leonardo Fibonacci considerava seu livro como um livro do ramo da aritmética e pelo seu histórico de familiarização com as atividades comerciais de seu pai, podemos sugerir que o livro além de teórico e sistematizado estava a serviço de uma aritmética prática, influenciado pelos árabes e pelos indianos, porém, ajustado a uma matemática comercial italiana, pois o autor deixa claro o desejo do povo italiano ser instruído acima de todos os outros (LEONARDO PISANO, 1857).

Como não tivemos acesso a primeira edição do *Liber Abaci* não temos como dizer se possuía uma preocupação com a instrução, todavia, nesta segunda edição podemos perceber sem muito esforço, que há esta preocupação. Podemos evidenciar tal intenção, quando Fibonacci reorganiza os capítulos para ser melhor compreendido permitindo que os futuros leitores ou aprendizes pudessem entender de uma forma mais clara seu conteúdo, dando a chance para os discípulos alcançarem a perfeição (LEONARDO PISANO, 1857). Percebemos também, a intenção de ser um manual, quando o autor apresenta a corte sua intencionalidade em facilitar o ensino em sua nova organização, este pensamento coaduna com Potro (2004) quando afirma ser o primeiro manual europeu em língua latina.

Para além dos indícios de Leonardo Fibonacci em sua fala inicial, quando adentramos ainda mais no livro, percebemos que se trata de fato de um conjunto de métodos aritméticos, os quais são introduzidos pelas cifras indianas e o funcionamento do sistema numérico decimal adotado, explicando de forma minuciosa a valoração posicional que cada cifra passa a ter a partir de seu posicionamento (Figura 1), nossas conhecidas unidades, dezenas, centenas e etc.

Leonardo Fibonacci, também tem o cuidado de ensinar como ler esses números, para tanto, ensina a separação, que chama de varas, de três em três cifras (parte inferior da Figura 1), sempre da direita para a esquerda apresentando desta forma a regra de como deve ser lido cada valor. Ainda no primeiro capítulo do livro, é mencionado os cálculos digitais, ou seja, os cálculos e os registros dos cálculos com as mãos para sua otimização, terminando com tabelas de adição e multiplicação com unidades e dezenas.

**Figura 1** – Valoração posicional e leitura dos números com a regra das varas.

M .I	MMXXIII	MMMXXII	MMMXX	MMMMDC
1001	2 0 2 3	3 0 2 2	3 0 2 0	5 6 0 0

dere regulam leuiam que (sic) poteris citissime legere numerum plurium figurarum. Verbi gratia: proponamus numerum 15 figurarum  $\widehat{678935784103296}$ , dimissis tribus primis figuris,

Fonte: Leonardo Pisano (1857).

No capítulo seguinte, Leonardo Fibonacci ensina o algoritmo da multiplicação, o que pode causar um certo desconforto para os leitores arraigados a matemática escolar, pois espera-se quase sempre que o ensino desses objetos matemáticos comece pela adição de um algarismo por um (unidade por unidade). Contudo, para a organização do século XIII, o autor inicia com a multiplicação de dois algarismos por dois (dezenas por dezenas). Em seguida apresenta mais uma multiplicação do mesmo tipo, mas diferente do cálculo anterior é proposto uma prova para verificação da confiabilidade do que foi calculado, o qual, podemos traduzir como método de resíduos módulo nove, que seria a prova real, em uma matemática moderna, o famoso “noves fora”, mas que Sigler (2002), apresenta como método de verificação “lançando noves”. Leonardo apresenta ainda a noção de multiplicação por zero. Todo capítulo é permeado pelo cálculo digital, seja para guardar os números como para calcular alguns.

É importante destacar que nos métodos de cálculos romanos, os algarismos tinham apenas a função de fazer os registros dos cálculos, estes por sua vez, eram feitos diretamente no ábaco. No entanto, com o método proposto por Leonardo Fibonacci em seu livro, os algarismos possuem a finalidade tanto do registro como do cálculo (SIGLER, 2002).

No terceiro capítulo, Leonardo Fibonacci apresenta um algoritmo para adição de números inteiros e para números de tamanho arbitrário. Para tanto, um sistema medieval chamado multiplicação do tabuleiro de xadrez é explicado, viabilizando o cálculo. Como anteriormente, uma prova resíduo nove é fornecida para ratificação do resultado. Neste mesmo capítulo é ensinado mais um método, a adição por colunas e um procedimento

para manter as despesas em uma tabela com colunas para libras, soldi e denari, sistemas monetários da época (Figura 2).

**Figura 2** – Exemplo de contas monetárias e despesas em tabela com *Libre, Soldi e Denari*.

pagine uel cartule. Verbi gratia: ut si quidam renuntiet in quadam expensa quod dedisset in tali et in talibus rebus, ut in sequenti pagina denotatur, adiscat scribere numeros librarum, soldorum et denariorum, sicut in eadem pagina describuntur, in qua pagina denarii qui sunt in ea sunt in summa 73, qui sunt soldi 6 et denarii 1: cum quibus soldi 6 junctis soldi, qui sunt in eadem pagina, fiunt 122 qui sunt libre 6 et soldi 2; et cum ipsis libris 6 colligat libras, reperiet in summa libras 368: est ergo summa librarum omnium soldorum et denariorum insimul iunctorum libre 368 et soldi 2 et denarii 1 que summa est reseruanda in fine pagine, de qua expensa collecta est; et sic per ordinem colligat expensas per paginas et unicuique pagine summa faciendo: post hec rescribat in tabula summas cunctarum paginarum, et faciet inde summam summarum; et sic poterit colligere quaslibet expensas bizantium, et karatorum, et auri unciarum, et tarenorum genouinorum, cantaniorum, etiam et rotulorum et cunctarum rerum numeris adiacentium.

368	2	1
libre	soldi	denarii
52	4	2
12	15	5
53		
80		
	15	
	18	
	9	10
		11
		7
5	6	11
8	7	5
87		9
8	6	
27	15	6
	13	
		7
30	8	
5	6	

Fonte: Leonardo Pisano (1857).

A partir desses capítulos iniciais, somos clarificados do teor aritmético que o livro possui, não deixando dúvidas de seu conteúdo, o qual, vai sendo composto ao longo dos capítulos por outros métodos aritméticos, dentre os quais encontramos, fração comum, fração composta, verificação da divisão pela aritmética modular, verificação não somente resíduo nove, mas sete, onze e outros que sejam números primos, frações egípcias, método de proporção, método de negociação entre outros, bem como, diversas aplicações para negócios, comércio, conversões monetárias de peso e conteúdo, métodos de permuta, parcerias comerciais e alocação de lucros, combinação de dinheiro, investimento de dinheiro, juros simples e compostos, tudo nas mais variadas situações, todos bem definidos, dando provas da funcionalidade dos métodos com recursos euclidianos.

Leonardo Fibonacci, também introduz algumas simbologias para uma melhor fluidez dos cálculos, uma vez que as equações eram escritas utilizando muitas palavras sem simbologias para coisas simples como para os valores desconhecidos e suas potências. Suprindo essa carência encontramos no *Liber Abaci* algumas simbologias (Figura 3) como, *res* e *radix* para representar os valores desconhecidos, *census* e *cubus* para representar respectivamente o quadrado e o cubo de um número, o R para representar a raiz quadrada, sendo um dos primeiros a usar um traço horizontal na representação das frações (GARBI, 2007).



**Figura 3** – Recortes de diferentes páginas com algumas simbologias.

nariis 7, sequitur necessario, illum habere quinque res minus denariis 7: quia cum ipse habuerit 7 de denariis secundi, tunc habebit quinque **res** integras; et secundo remanebit res una; et sic primus habebit quincuplum eius: quare si de portione primi hominis addantur 5 secundo, que petit ei; et habebit utique secundus rem, et denarios uel diminutus equabitur alicui numero. Sed ut hec apertius habeantur, ponantur 5 census equari denariis 45: diuides ergo 45 per 5, uenient denarii 9, qui equantur censui, hoc est **census**, est 9, et **radix** eius est 3. | Similiter cum census  $\frac{4}{3}$  equatur denariis 26, diuides 26 per  $\frac{4}{3}$  4, scilicet 78, per 13, exhibunt 6; quibus equatur unus census. Quare radix eius est surda, cum sit radix numeri non quadrati. Et cum  $\frac{3}{4}$  unius census numeri radicem cubicam non habeant: sed si primus numerus eorum, et ultimus essent cubi, uel habentes proportionem inter se sicut **cubus** numerus ad cubum numerum; tunc interciderent inter eos duo numeri ratiocinati. Verbi gratia: si primus numerus

Fonte: Leonardo Pisano (1857).

Muitos podem julgar, a partir de uma visão presentista, que o conteúdo desse livro é mais algébrico do que aritmético. Porém, devemos lembrar que os indícios mostram, a partir de livros como esse, que a álgebra no século XIII e XIV fazia parte da aritmética prática e comercial, servindo sempre para resolver problemas da vida cotidiana urbana e comercial, ou seja, de ordem prática. Não tendo um apreço nas universidades que apreciavam mais a especulação filosófica preservando a aritmética e a música da tradição inaugurada por Boécio (SAITO, 2015).

### Potencialidades para o ensino de conteúdos matemáticos

Para falar de potencialidades para o ensino, do *Liber Abaci*, temos que primeiramente fazer algumas colocações, com vistas a uma melhor compreensão de nossos apontamentos. Iniciamos, assim, deixando claro que a noção de potencialidade pedagógico/didático por nós adotado são todos os fatores e/ou qualidades que possam viabilizar a prática docente (GUIMARÃES FILHO e BRANDEMBERG, 2017).

Essas qualidades e/ou fatores serão extraídos de um texto histórico, o qual Brandemberg (2021), em sua concepção, balizada, define ser:

[...] **um documento** que, composto (impressão, pictografia, escrita) de formatos e materiais (argila, papiro, pergaminho, bambu, papel) variados em algum momento da história, **nos permite acessar** de maneira implícita e explícita **elementos do contexto de sua composição e da relevância de seu conteúdo** com vistas ao **entendimento** do conhecimento matemático, de sua produção, desenvolvimento e divulgação (BRANDEMBERG, 2021, p. 28, grifo nosso).

Tendo como base essa compreensão/definição de texto histórico, podemos acessar intencionalmente do texto, elementos de sua composição e de sua malha histórica que

viabilizem noções de conteúdos matemáticos, que para nossos apontamentos serão os de cunho aritmético, os mesmos que compõe uma das unidades de conhecimento propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC)<sup>10</sup>, oportunizando atender as competências e habilidades exigidas por esse documento oficial, relacionados a Educação Básica.

Como um overview de nossas colocações, em acordo com Brandemberg (2021, p. 28), temos a segurança de fazer nossos apontamentos, partindo da compreensão que as potencialidades a serem apresentadas são os fatores e/ou qualidades encontradas no texto histórico, a saber o *Liber Abaci*, que podem viabilizar, depois de passar por uma transposição (um tratamento) didática, o ensino de conteúdos aritméticos, seja em um contexto amplo (pedagógico) ou específico (didático) do ensino.

Vemos, dessa forma, a partir do conjunto de conceitos e ideias e das competências e habilidades do *Liber Abaci* para o contexto medieval, potencialidades emergentes para o ensino de conteúdos aritméticos, dos quais elencamos alguns: representações numéricas, sistema numérico decimal, algoritmos das quatro operações aritméticas, métodos de prova real, outras formas de multiplicação além da usual, operações com números racionais, frações comuns e compostas, proporcionalidade, séries de somas, algebrização de situações aritméticas.

Após ajustar nossa compreensão de potencialidade pedagógico/didático e apontar algumas potencialidades encontradas no *Liber Abaci*, vimos a necessidade, com vistas a uma sustentação melhor de nossos apontamentos, um diálogo com professores que estão atuando em escolas e universidades.

Para tanto, simulamos um contato com professores que lecionam, no nível fundamental, médio, educação de jovens e adultos (EJA), pré-vestibular e superior, para tentar cercar a maior área possível de ensino de conteúdos matemáticos. No qual consideramos os seguintes questionamentos: Quais são as competências e habilidades em aritmética necessárias ao aluno do ensino básico? E quais as maiores barreiras enfrentadas no ensino de conteúdos matemáticos que exigem noções aritméticas para suas soluções?

Inferimos, em nossa simulação<sup>11</sup>, que as respostas seriam conformadas por suas experiências de sala de aula (docentes) e com o intuito de apontar as dificuldades reais

---

<sup>10</sup> “[...] documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica [...]” (BRASIL, 2018, p. 7).

<sup>11</sup> Nossa simulação se constitui em algo esperado, nos moldes de uma *análise e concepções a priori* balizadas pela nossa experiência docente. Elegemos a simulação em função da Pandemia e a incluímos no



enfrentadas por seus alunos. Sendo orientados dessa forma, as respostas obtidas em sua maioria apresentariam as seguintes necessidades e dificuldades: noção conceitual de número; conjunto dos números racionais e irracionais; comparação de frações e números decimais; noção conceitual das operações aritméticas; operações básicas e seus algoritmos; tabuada básica das quatro operações aritméticas; operações aritméticas com números racionais; potenciação e radiciação; algebrização da aritmética; interpretação das situações problemas.

Ao observarmos as necessidades, as competências e habilidades mencionadas, que o *Liber Abaci*, com tratamento adequado para sua linguagem e simbologia, não teria “problemas” em contribuir junto aos professores para sanar tais dificuldades, que inferimos de nossa leitura do texto, ao passo que, podemos perceber, que o livro é permeado tanto das competências quanto das habilidades que são exigidas, em seus mais variados exemplos: sejam em situações do cotidiano (contexto) medieval e atual, como em situações escolares.

### **Considerações finais**

Com o exposto conseguimos fazer algumas considerações, tanto historiográficas quanto didáticas, mediante um distanciamento de uma visão anacrônica dos fatos e do que acompanha o texto, seja historiográfico ou matemático. Assim, quando percebemos que as repercussões dos fatos podem permear alguns séculos como a ruptura do império romano, ocasionando interesses diferentes das ciências e das artes, e fazendo com que por alguns séculos os conhecimentos e obras ficassem centralizados em algumas regiões, povos ou classes sociais e eclesiásticas, vemos uma movimentação do saber que atendeu os interesses desses grupos, sejam esses interesses teóricos, filosóficos, comerciais, sociais, culturais ou religiosos.

Foi possível, dessa forma, perceber ao longo da idade média, que os elementos historiográficos, hora apresentados, nos auxiliam a compreender que os fatos que proporcionaram a construção do livro não foram isolados, mas foi um entrelaçamento dos acontecimentos desses fatos, ou seja, das repercussões de cada acontecimento se sobrepondo um ao outro, se misturando, se separando, se aglutinando, se excluindo, convergindo, divergindo, formando acordes que regeram os séculos medievais. Como a heterogenia europeia que permitiu a entrada de obras e tradutores na Europa que não

---

texto pensando em futuros desdobramentos de uma realização empírica concreta de verificação dessas dificuldades de ensino.

precisavam necessariamente atender as necessidades do clero, assim como, a ampliação do comércio interno e externo que impulsionou a praticidade, inovação e popularidade da aritmética.

É importante evidenciar, que quando falamos do sucesso de Leonardo Fibonacci ao compor o livro, não estamos falando de uma aceitação imediata, pois aquela sociedade possuía muitos conflitos de interesses no século XIII, assim como, um fator essencial para a não divulgação imediata, mesmo com o aval da corte, foi a forma de reprodução lenta dos livros, pois ainda não havia a imprensa que teria seu surgimento para a reprodução de livros em meados do século XV.

Falamos sim, de um sucesso a partir de uma visão mais ampla, da repercussão do livro nos anos posteriores, dos olhares diferenciados para o livro, da tamanha viabilidade do que foi proposto por Leonardo Fibonacci em seu *Liber Abaci*. Afinal, fazemos o uso, de maneira comum, da maior parte de suas propostas, como as cifras indianas e o sistema numérico posicional decimal em nossas salas de aula. Logo, podemos considerar que é um livro potencialmente rico para nossos dias, e com o tratamento didático necessário, pode atender as competências e habilidades das unidades de conhecimento, números e álgebra, propostos pela BNCC.

## Referências

BRANDEMBERG, J. C. Sobre Textos Históricos e o Ensino de Conteúdos Matemáticos. In **Investigações Científicas Envolvendo a História da Matemática Sob o Olhar da Pluralidade**. Curitiba: CRV, 2021. 12 p.

BRASIL. Ministério da educação. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília, 2018.

BRITO, Arlete de Jesus. Matemática na idade média: entre o místico e o científico. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Especial no 1, p. 127-141, 2007.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas, SP: Papyrus, 1996.

FRANCO JÚNIOR, H. **A Idade Média: nascimento do ocidente**. 2ª ed. rev. e ampl. São Paulo, SP: Brasiliense, 2001.

GARBI, Gilberto. G. **O Romance das Equações Algébricas**. 3ª ed rev. São Paulo, SP: Ed. Livraria da Física, 2007.

*José dos Santos Guimarães Filho e João Cláudio Brandemberg*  
*Liber Abaci: contexto, competências, habilidades e potencialidades*

---

GUIMARÃES FILHO, J. S.; BRANDEMBERG, J. C. O Livro dos Quadrados. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática** - Volume 05, Número 14, 2018, p. 279 – 288.

GUIMARÃES FILHO, J. S.; BRANDEMBERG, J. C. Um estudo do Liber Quadratorum (1225) e suas potencialidades para o ensino de Matemática. **REMATEC**/Ano 12/n. 26/set.-dez. 2017, p. 71 – 85.

LEONARDO PISANO. **Liber Abbaci**. Secundo la lezione del codice magliabrchiano, C. I, 2616, Badia Fiorentina, nº 73, Roma: 1857.

POTRO, B. C. Oficios Urbanos y Desarrollo de la Ciencia y de la Técnica en la Baja Edad Media: la corona de castilla. **Norba**. Revista de Historia, vol. 17, 2004, p. 41 - 68.

POTRO, B. C. Un Manual de Aritmética Mercantil de Mosén Juan de Andrés. **Pecunia**, n. 8, 2009, p. 71-96.

POTRO, B, C. El desarrollo del comercio medieval y su repercusión en las técnicas mercantiles: Ejemplos castellanos. **Pecunia**, n. 15 (julio-diciembre), 2012, p. 201- 220.

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Ed. Livraria da Física/SBHMat, 2015.

SCHRAMM, Matthias. Frederick II of Hohenstaufen and Arabic Science. **Science in Context** 14(1/2), 2001, p. 289-312.

SIGLER, L. E. **Fibonacci's Liber Abaci**: a translation into modern english of Leonardo Pisano's book of calculation. New York: Ed. Springer, 2002.

VASCONCELOS, Fernando de Almeida e. **História Das Matemáticas na Antiguidade**. Lisboa: Livrarias Aillaud e Bertrand, 1925.

*Recebido em: 21 / 02 / 2022*  
*Aprovado em: 27 / 03 / 2022*