BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática
V SCHM
V Seminário Cearense de História da Matemática
11 e 12 de abril de 2022
FORTALEZA - CEARÁ - BRASIL

e-ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v9i26.7964

O CONCEITO DE FUNÇÃO NA TEORIA DAS FUNÇÕES ANALÍTICAS DE JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1813)

THE CONCEPT OF FUNCTION IN JOSEPH-LOUIS LAGRANGE'S THEORY OF ANALYTICAL FUNCTIONS (1813)

Alailson Silva de Lira[1]; João Cláudio Brandemberg[2]

RESUMO

O século XVIII, com o advento da revolução industrial, presenciou um grande desenvolvimento científico e intelectual na Europa. Na França, além destes fatores, houve também o impulsionamento gerado pelas ideias iluministas e pela Revolução Francesa. Dentre os Matemáticos na França, Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) foi um dos responsáveis pelo desenvolvimento do conhecimento neste período. Considerando as obras que obtiveram grande importância, destaca-se a intitulada *"Théorie des Fonctions Analytiques" (TFA),* publicada em 1797 e com segunda edição ampliada em 1813. Assim, o objetivo deste artigo é apresentar os conteúdos pertencentes à primeira parte da segunda edição e o conceito de função como elemento central de todo o seu embasamento no TFA. Para tanto, realizamos uma pesquisa histórica a partir da obra digitalizada. Com isso, podemos perceber que o conceito de função estabelecido no *Théorie* está conformado ao pensamento matemático da época, cujo desenvolvimento ocorre em uma tentativa de moldar o cálculo infinitesimal no que tange ao estabelecimento de "padrões rigorosos" com foco no pensamento algébrico desconsiderando, portanto, questões geométricas enfatizadas por Newton e Leibniz.
Palavras-chave: História da Matemática; Conceito de Função; Funções Analíticas; Joseph-Louis Lagrange.

ABSTRACT

The 18th century, with the advent of the industrial revolution, witnessed a great scientific and intellectual development in Europe. In France, in addition to these factors, there was also the boost generated by the Enlightenment ideas and the French Revolution. Among the mathematicians in France, Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) was one of those responsible for the development of knowledge in this period. Considering the works that obtained great importance, the one entitled "Théorie des Fonctions Analytiques" (TFA), published in 1797 and with a second enlarged edition in 1813, stands out. Thus, the objective of this article is to present the contents belonging to the first part of the second edition and the concept of function as the central element of all its foundations in the TFA. To this end, we conducted a historical research based on the digitized work. With this, we can see that the concept of function established in the Théorie is

[1] Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Docente do Instituto Federal do Pará. (IFPA), Belém, PA, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Augusto Correa, sn, Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-000. E-mail: alailson@outlook.com
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-0115-527X.
[2] Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Docente Associado IV da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Augusto Correa, sn, Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-000. E-mail: brand@ufpa.br.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8848-3550.

conformed to the mathematical thought of the time, whose development occurs in an attempt to shape the infinitesimal calculus in terms of the establishment of "rigorous standards" with a focus on algebraic thinking disregarding, therefore, geometric issues emphasized by Newton and Leibniz.
Keywords: Concept of Function; Analytic Functions; Joseph-Louis Lagrange.

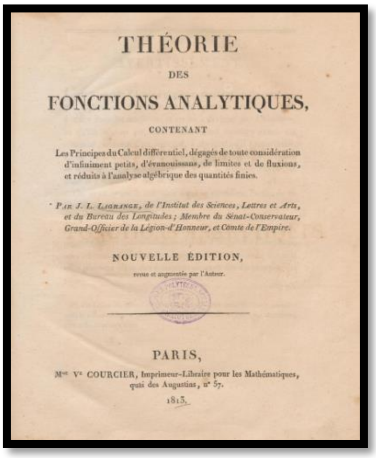
Introdução

O século XVIII foi o momento no qual as ideias referentes ao Cálculo Infinitesimal (CI) afloravam. As academias, interessadas neste assunto, dedicavam concursos de prêmios voltados à metafísica do cálculo e a questões infinitesimais. Dentre os expoentes deste contexto, destaca-se Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813).

Os seus escritos, relacionados ao CI, foram redigidos no ápice desse movimento intelectual, garantindo a ele uma reputação na Europa em vida e que assegurava a sua presença neste contexto. De acordo com Gillispie (2009), este período também é destacado pelos trabalhos de cálculo diferencial e integral de Euler, o que configura um momento importante para o desenvolvimento da Análise Matemática.

Uma das obras em destaque, que diferenciava dos outros escritos sobre os infinitesimais, foi o *Théorie des Fonctions Analytiques* (TFA) de Lagrange, publicado em 1797, com ideias enfatizadas em seu próprio título: *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de touté consideration d'infiniment petits, d'evanouissans, de limites et de fluxions, et réduité a l'analyse algèbrique des quantités finies* (Teoria das Funções Analíticas contendo os princípios do cálculo diferencial, desvinculados a partir de qualquer consideração de infinitamente pequeno, evanescente, limites e fluxões e reduzidos à análise algébrica de quantidades finitas).

Figura 1 : capa do Théorie des Fonctions Analytiques


THÉORIE
DES
FONCTIONS ANALYTIQUES,
CONTENANT
Les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

Par J. L. Lagrange, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, et du Bureau des Longitudes; Membre du Sénat-Conservateur, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, et Comte de l'Empire.

NOUVELLE ÉDITION,
revue et augmentée par l'Auteur.

PARIS,
Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.
1813.

Fonte: Lagrange (1813).

Já em 1813, foi publicada uma segunda edição, a qual havia sido devidamente ampliada por Lagrange, antes do seu falecimento. Assim, o objetivo deste artigo é apresentar os conteúdos pertencentes à primeira parte da segunda edição e o conceito de função como elemento central de todo o embasamento no TFA. Para tanto, realizamos uma pesquisa histórica a partir da obra digitalizada.

Nesta perspectiva, entendemos as Histórias da Matemática, conforme disposto em Saito (2015), ao considerar que estas sempre foram escritas em diferentes épocas e contextos que, de alguma forma, atendesse às contingências do período. Com isso, o referido autor procura estudar os elementos pertencentes à História da Matemática a partir do que considera como "historiografia atualizada", realizando uma reconstituição histórica para olhar o passado sob a perspectiva do passado. Assim:

> Historiadores da matemática, que desenvolvem seus estudos baseados em tendencias historiográficas atualizadas, tem insistido na necessidade de se compreender o processo da construção do conhecimento matemático por meio de acurada investigação, não só das diferente técnicas e conteúdos matemáticos, mas também das circunstâncias nas quais tais técnicas e conteúdos foram elaborados. Para tanto, os historiadores nas últimas décadas, procuram reformulas suas questões, fazendo novas perguntas ao passado a partir de diferentes fontes documentais. (SAITO, 2015, p. 26)

Neste sentido, podemos entender que, em um dado período, um texto histórico matemático foi escrito visando estabelecer certo sentido para o enfrentamento de um dado problema e, por conseguinte, possuir seu significado para a época. No caso da TFA, Lagrange desenvolve sua teoria, a fim de evitar o problema das quantidades infinitamente pequenas. Com isso, o foco principal era realizar a redução a métodos puramente algébricos, bem como suas relações operacionais, descartando a utilização de métodos infinitesimais.

Assim, de maneira geral, no *Théorie des Fonctions Analytiques* é apontada a:

> [...] tentativa de reduzir qualquer função real à forma polinomial, de modo a limitar o uso não só de funções transcendentais (e números), mas também de funções irracionais e fracionárias. Este duplo uso sugere que a teoria de Lagrange é algébrica na medida em que realiza uma redução da análise (tanto finita como infinitesimal) à álgebra, e retrata esta última como um campo elementar de estudo, no qual toda a matemática deve ser baseada. (FERRARO; PANZA, 2012, p. 99, tradução nossa)

As ideias do trabalho estavam atreladas, segundo Bottazzini (1986), à necessidade de fornecer aos alunos da *École polytechinique* francesa um livro-texto. Tal fato o estimulou a publicar suas aulas intituladas de TFA seguidas de suas *Leçons sur des Calcul des Fonctions* (Lições Sobre o cálculo de funções), um complemento do TFA, o que posteriormente levou muitos dos trechos dessas obras a serem incorporados a textos didáticos para ensinar matemática, como é o caso dos estudos das tangentes de curvas e superfícies e do "resto de Lagrange" no desenvolvimento das funções em séries de Taylor.

Sua importância como livro texto, didático, fez com que seu trabalho fosse traduzido para diversas línguas, incluindo o português, com a tradução de Manuel Jacinto Nogueira da Gama, em 1798, a qual influenciou o estudo das funções analíticas nos países de língua portuguesa. Entretanto, não é o escopo deste artigo realizar uma investigação voltada para o ensino.

Para realizarmos a composição da TFA, consideramos apresentar seus traços biográficos, com vistas à sua localização histórica.

Traços Biográficos de Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813)

De família de origem Francesa, nascido em 1736 em Turim, na Itália, pouco se sabe sobre a vida pessoal de Lagrange. Todavia, sua vida como pesquisador e acadêmico apresenta diversos detalhes e esteve, em sua maioria, voltada ao estudo e ensino da matemática.

Figura 2 – Joseph-Louis Lagrange

Fonte: Pepe (2014, p. 4)

Segundo Gillispie (2009), podemos dividir a vida acadêmica de Lagrange em três momentos e lugares distintos. O primeiro, estabelecido em sua cidade natal no período entre 1736 a1766.

Neste período, Lagrange emerge como um professor, estudioso e cuidadoso em suas atividades. Foi na Universidade de Turim que ele descobriu o interesse pelas ciências e matemática, pelas quais, imediatamente, teve apreço e, assim, caminhou lendo os trabalhos *Calculo Integralium* de Johann Bernoulli (1667 – 1748), o *Mechanica* de Leonhard Euler (1707 – 1783), os dois primeiros livros *Principia* de Isaac Newton (1643 – 1727), o *Traité de dynamique* de Jean D'Alembert (1717 – 1783) e o *Traité du calcul integral* de Bougainville (1729 – 1811), este último, composto dentro do grupo de D'Alembert e dos enciclopedistas.

Em 1754, abordou em seu primeiro trabalho, de maneira puramente analítica, um estudo da monografia de Euler. Tal realização propiciou a Lagrange uma nomeação como professor da Real Escola de Artilharia, em 1755, aos 19 anos de idade. Mais tarde, junto com outros jovens cientistas, criaram uma sociedade cientifica (1757) que, posteriormente, tornou-se a Real Academia de Ciências de Turim, cujo objetivo inicial era a publicação de uma miscelânea em francês e latim de seus escritos, nos moldes da *Miscellanea Berolinensia* alemã.

Sendo assim, os diversos trabalhos publicados por Lagrange, de acordo com Belhoste (2014), levaram-no a alcançar e consolidar um lugar de destaque na sociedade intelectual da Europa. Fato corroborado pelas correspondências nas quais se comunicava com Euler, D'Alembert, Daniel Bernoulli (1700 – 1782), Simon Laplace (1749 – 1827) e Condorcet (1743 – 1794).

O segundo momento na vida de Lagrange, se conecta com o seu desenvolvimento, empenho e maturidade na matemática, o que o faz, em 1766, aceitar o cargo na Alemanha de diretor da classe de Matemática da Academia de Berlim (cargo deixado por Euler ao se mudar para São Petersburgo). Porém, as exigências deste trabalho estavam voltadas, exclusivamente, às suas pesquisas, ou seja, não possuía obrigações docentes.

Nesses pouco mais de vinte anos em que permaneceu em Berlim, Lagrange publicou trabalhos em várias áreas, como mecânica celeste, teoria dos fluidos, aritmética, álgebra, teoria dos números e cálculo das probabilidades.

O último momento destacado é caracterizado na França, de 1789, quando Lagrange deixa Berlim em direção a Paris. Aqui suas atividades matemáticas estavam relacionadas ao ensino em matemática elementar e análise. Consequentemente, resultaram em trabalhos publicados posteriormente, destacando as *Leçons élémentaires sur les mathématique données* à l'École Normale" (Lições elementares de matemática dadas a escola normal), a *Theorie des Fonctions Analytiques* (Teoria das Funções Analíticas) e o *Leçons sur le calcul des fonction* (Lições sobre o cálculo das funções). Em síntese, a vida de Lagrange esteve centrada no desenvolvimento de pesquisas e no ensino de matemática.

Rodeado de matemáticos importantes e influentes da época, soube posicionar-se, pois, de acordo com Gillispie (2009), preservou sua originalidade com suas generalizações, sistematizações e aprofundamentos das ideias de seus antecessores.

Podemos considerá-lo também um genuíno cidadão Europeu conforme apontado por Belhoste (2014):

> Através de sua carreira europeia, em três capitais, o matemático de Turim personificou o modelo do cientista cosmopolita sem Estado que parecia caracterizar o século do Iluminismo. Ele pensou e agiu como um cidadão europeu, ignorando as fronteiras e rivalidades entre os poderes [...] Ele correspondia, geralmente em francês, com todos os grandes matemáticos da Europa. Apesar de manter um contato epistolar com seu país de origem, ele privilegiou as conexões com a elite acadêmica de Paris, naquela época o centro de gravidade da "República das Letras" em todo o continente (BELHOSTE, 2014, p. 27, tradução nossa)

Considerado “a alta pirâmide da matemática” por Napoleão, seu excelente desenvolvimento científico se dava pela sua regularidade e seriedade em seu trabalho. Lagrange manteve sua atividade científica, revisando seus trabalhos até sua morte em março de 1813.

Composição da Obra *Théorie des Fonctions Analytiques* de Lagrange

A TFA de Lagrange, está dividida em introdução, com ideias historiográficas fundamentais do Cálculo, e mais três partes: a primeira diz respeito à exposição da teoria e seu uso na análise; a segunda contém as aplicações da teoria das funções à geometria; e por último, a que trata da mecânica.

Os trechos em cada parte se encontram enumerados, exceto a sua introdução. Logo, estão organizados da seguinte forma:

Quadro 1 - Organização dos trechos no Théorie des Fonctions Analytiques

Théorie des Fonctions Analytiques (TFA)		
DIVISÃO	**CAPÍTULOS**	**TRECHOS**
Introdução	-	-
Primeira parte	16	95
Segunda parte	14	87

Terceira parte	7	47

Fonte: Organizado pelos Autores

Com relação ao conteúdo constante no trabalho, encontra-se organizado conforme o sumário a seguir:

Quadro 2 – Sumário do Théorie des Fonctions Analytiques de 1813

XII	entre os termos do desenvolvimento de uma função de várias variáveis, e aqueles que resultam do desenvolvimento destes termos propriamente ditos.	
XIII	Onde apresentamos o caminho para desenvolver as funções de qualquer número de variáveis em uma série acabada, e composta de tantos termos quantos quisermos, e para ter o valor dos restos.	134
XIV	Equações derivadas de uma equação entre três variáveis; Funções arbitrárias que entram em equações primitivas completas entre três variáveis.	139
XV	Fórmula notável para o desenvolvimento em série de qualquer função do desconhecido z na equação z = x + yfz.	146
XVI	Método geral para encontrar a equação primitiva de uma equação de primeira ordem entre várias variáveis, quando as funções derivadas são lineares, e para encontrar a equação primitiva de qualquer equação de primeira ordem entre três variáveis.	152

Fonte: Lagrange (1813), tradução nossa.

A partir dos elementos apresentados em seu sumário, conseguimos identificar a existência de conteúdos que foram discutidos no século XVIII, como por exemplo, as séries e o conceito de função. Diante disso, a ideia estabelecida por Lagrange, primordialmente com essa obra, não é de produzir novos resultados matemáticos, mas de apresentar novos fundamentos a partir dos resultados já conhecidos.

O conceito de Função no Théorie des Fonctions Analytiques de 1813

Em seu TFA (1813), Lagrange demonstra os fundamentos e as bases de seu "Cálculo" bem como expõe aspectos históricos referentes ao desenvolvimento do cálculo integral (CI), ou seja, no decorrer de toda a sua introdução ele estabelece pressupostos históricos epistemológicos como forma de subsidiar e justificar seu trabalho. Para isso, utiliza-se de conceitos como o de função, método da compensação de erros e teoria de fluxão. Este último, tratado de forma crítica a fim de justificar a relevância de sua teoria.

Como ponto de partida, Lagrange exprime o conceito de função considerando alguns fatos históricos referentes ao conceito.

> Uma função de uma ou mais quantidades é qualquer expressão do cálculo em que essas quantidades entram de alguma forma, combinadas ou não com outras quantidades que são consideradas como valores dados e invariáveis, enquanto as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, em funções, apenas são consideradas aquelas quantidades que são consideradas variáveis, sem levar em conta as constantes que podem ser combinadas nelas.
> A palavra função foi usada pelos primeiros analistas para se referir, em geral, às potências da mesma quantidade. Desde então, o significado da função da palavra foi estendido para incluir qualquer quantidade que seja formada em qualquer outra quantidade. Leibniz e os Bernoulli foram os primeiros a utilizá-lo neste sentido geral, e agora é geralmente adotado. (LAGRANGE, 1813, p. 1, tradução nossa)

De acordo com ele, funções podem ser consideradas como expressões que possuem quantidades. Para Ferraro e Panza (2012), a palavra “quantidade” é usada por Lagrange no sentido algébrico, enquanto a ideia de “expressão do cálculo” remete à quantidade. Destarte, as funções de Lagrange são expressões, uma vez que são designadas como quantidades algébricas e as quantidades podem ser empregadas como expressões.

A essência textual do trabalho de Lagrange, referente ao conceito de função, está caracterizada na definição de função explicitada por Euler[3] quarenta anos antes e, seu significado, corresponde ao que grande parte dos matemáticos compreendiam: uma quantidade formada de qualquer forma por outras quantidades[4]. Esta exposição, por parte de Lagrange, representa, de certa forma, um fundamento histórico, pois afere que os conceitos adotados estão de acordo com a corrente de pensamento da época consoante ao que Lagrange assegura como “geralmente adotado”.

Além disso, observa-se que o conceito de função se torna o ponto de partida para toda a sua teoria, haja vista que todos os elementos desenvolvidos em sua obra trabalharam com funções e, no decorrer desta, identificará que, para toda e qualquer função, sempre seria possível expandi-las a partir de uma série de potência. Partindo deste conceito, Lagrange estabelece uma série de operações algébricas nas funções, o resultado para esta operação é designado por Lagrange de Funções Primitivas. Consequentemente, os próximos termos serão funções da variável anterior com suas potências, denominadas de funções derivadas.

O conceito de função, dado inicialmente, está em forma textual sem inserção de nomenclaturas, fórmulas ou simbologias. A forma simbólica como ele entendia a função é explicitada mais adiante em seu trabalho:

> Designaremos em geral pela característica f ou F, colocada em frente de uma variável, qualquer função desta variável, ou seja, qualquer quantidade dependente desta variável, e que varia com ela de acordo com uma dada lei. Assim, fx ou Fx irá designar uma função da variável x; mas quando quisermos designar a função de uma quantidade já composta desta variável, como x^2, $a+bx$, etc., enclausuraremos esta quantidade entre dois parênteses. Assim, fx irá designar uma função de x, $f(x^2)$, $f(a + bx)$, etc. irá designar funções de x^2, $a + bx$, etc.(LAGRANGE, 1813, p. 7, tradução nossa)

Portanto, Lagrange retorna com sua definição de função estabelecida em sua introdução, assim sendo:

[3] Em sua Introducction in analysin Infinitorum Euler expande funções elementares em séries de potências.
[4] Antes de Euler, Johann Bernoulli define função utilizando-se desta mesma ideia.

> Lagrange toma claramente sua definição para ser inteiramente consistente com este significado "geralmente adotado"; ou seja, ele a toma para ser consistente com a ideia de que uma função é uma "quantidade formada de qualquer forma a partir de outra quantidade", como Johann Bernoulli tinha declarado [...] (FERRARO; PANZA, 2012, p. 105, tradução nossa)

A partir desta perspectiva, Lagrange discorre sobre a expansão de toda e qualquer função a partir da uma série de potências.

Consequentemente, para garantir essa generalidade, de acordo com Botazzini (1986), Lagrange mostra que, quando *x* e *i* permanecem indeterminados, a série não pode conter potências fracionárias ou negativas de *i*.

No entanto, ainda consoante a Botazzini (1986), este é o ponto decisivo, não existe de fato qualquer prova da existência de tal expansão para uma dada função, e sim o caso de a série conter apenas potências positivas de *i*.

A partir do que foi apresentado sobre o conceito de função, Lagrange nos mostra a sua preocupação em organizar as bases do cálculo a partir de regras algébricas. Logo, nos parágrafos em tela, a partir de sua compreensão matemática, ele considera que o desenvolvimento do Cálculo pode ser tratado de maneira algébrica e, para isso, realiza uma série de argumentos de cunho histórico-epistemológico sobre as questões infinitesimais para, por conseguinte, estabelecer simbolicamente tais conceitos.

Considerações Finais

Ao longo de seu trabalho, Lagrange discorre textualmente sobre as bases históricas conceituais a respeito da Análise, bem como destaca sua compreensão a respeito de elementos conceituais pertencentes ao cálculo, incluindo alguns trechos o qual explicita as definições ou conceito matemáticos, ou seja, a forma textual também era utilizada para representar definições matemáticas.

O uso textual nas definições e conceitos não era algo exclusivo de Lagrange, mas pode ser identificado em seus trabalhos e nos de outros matemáticos do século XVIII. O fato deste aspecto ocorrer possui como motivo principal uma fase de construção, pois, naquele período, a matemática infinitesimal estava em fase de desenvolvimento, tanto em questões conceituais quanto simbólicas e, portanto, ainda não possuía elementos considerados universais para uso.

O conceito de função, estabelecido no *Théorie des Fonctions Analytiques* está moldado no pensamento matemático da época, no qual se estabelecem novos "padrões rigorosos" na direção de um pensamento algébrico relacionado aos conceitos matemáticos, como as funções.

Considerado o "coração" da análise, o conceito de função desenvolveu-se significativamente a partir dos trabalhos de Euler, sendo adotado e ampliado por diversos matemáticos, com destaque para Lagrange.

Dessa forma, a concepção de função, em sua nova roupagem, trouxe para a Análise um novo movimento para o estudo do Cálculo voltado às considerações algébricas. Em suma, o *Théorie des Fonctions Analytiques* é identificado, além de uma alternativa nesta reformulação, como a verdadeira teoria das funções, fato apontado por Lagrange ao final de sua introdução.

Referências

BELHOSTE, B. When an academician becomes professor: the case of Joseph-Louis Lagrange. **Lettera Matematica**, v. 2, n. 1–2, p. 25–34, 2014.

BOTTAZZINI, U. **The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass**. New York: Springer, 1986.

FERRARO, G.; PANZA, M. Lagrange's Theory of Analytical Fonctions and his Ideal of Purity of Method. **Archive for History of Exact Sciences**, v. 66, p. 95–197, 2012.

GILLISPIE, C. C. (ED.). **Dicionário de biografias científicas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 2009a. v. 2

GILLISPIE, C. C. (ED.). **Dicionário de biografias científicas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 2009b. v. 1

LAGRANGE, J. L. DE. **Théorie des Fonctions Analytiques**. Paris: Courcier, 1797.

LAGRANGE, J. L. DE. **Théorie des Fonctions Analytiques**. Paris: Courcier, 1813.

PEPE, L. Lagrange (1736–1813): una vita per la Matematica. **Lettera Matematica Pristem**, v. 88, n. 1–2, p. 4–14, mar. 2014.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

Recebido em: 20 / 02 / 2022
Aprovado em: 29 / 03 / 2022