BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática
V SCHM
V Seminário Cearense de História da Matemática
11 e 12 de abril de 2022
FORTALEZA - CEARÁ - BRASIL

e-ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v9i26.7953

ASPECTOS HISTÓRICOS DOS CONCEITOS DE DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

HISTORICAL ASPECTS OF THE CONCEPTS OF LINEAR DEPENDENCE AND INDEPENDENCE

Renan Marcelo da Costa Dias[1]; João Cláudio Brandemberg[2]

RESUMO

Este trabalho teve por objetivo investigar a refletividade do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear no desenvolvimento histórico dos conceitos de Dependência e Independência Linear. Para tal, foi realizado um estudo acerca da constituição histórica da Álgebra Linear e identificado quatro diferentes noções matemáticas concebidas ao longo desse processo e que remontam aos atuais conceitos de Dependência e Independência Linear, a saber, dependência inclusiva trabalhada por Euler em 1750; a dependência unificada para equações e n-uplas apresentada por Frobenius no ano de 1875; generalização da dependência para o espaço n-dimensional abordada por Grassmann em 1844 e a Dependência e Independência linear axiomatizada por Peano no ano de 1888. Com exceção da dependência inclusiva de Euler, as outras noções explicitam um certo grau do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear, haja vista que quando concebidas por seus idealizadores elas unificaram as noções anteriores por meio de uma linguagem mais formal e posteriormente axiomática.
Palavras-chave: História da Matemática; Álgebra Linear; Dependência e Independência Linear.

ABSTRACT

This work aimed to investigate the reflectivity of the unifying and generalizing character of Linear Algebra in the historical development of the concepts of Linear Dependence and Independence. To this end, a study was carried out on the historical constitution of Linear Algebra and four different mathematical notions conceived during this process were identified, which go back to the current concepts of Linear Dependence and Independence, namely, inclusive dependence worked by Euler in 1750; the unified dependence for equations and n-tuples presented by Frobenius in the year 1875; generalization of dependence to n-dimensional space addressed by Grassmann in 1844 and linear dependence and independence axiomatized by Peano in 1888. With the exception of Euler's inclusive dependence, the other notions explain a certain degree of the unifying and generalizing character of Algebra Linear, given that when conceived by their creators, they unified the previous notions through a more formal and later axiomatic language.
Keywords: History of Mathematics; Linear algebra; Linear dependence and independence.

[1] Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Docente da Universidade da Amazônia (UNAMA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Tv. do Cruzeiro, 1230, Cruzeiro, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66810-010. E-mail: renanmarcelo1998@gmail.com.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4305-9948.
[2] Doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Docente Associado IV da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Augusto Correa, sn, Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-000. E-mail: brand@ufpa.br.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8848-3550.

Introdução

O presente artigo traz elementos de uma pesquisa de mestrado[3] que teve por objetivo investigar de que forma os aspectos históricos dos conceitos de Dependência e Independência Linear podem ser abordados em cursos de Álgebra Linear, de modo a viabilizar uma melhor compreensão desses conceitos por licenciandos em Matemática. Neste recorte, contudo, limitamo-nos em apresentar esses aspectos históricos, mais precisamente, as noções matemáticas concebidas ao longo da constituição histórica da Álgebra Linear, enquanto zona de inquérito, e que remontam aos atuais conceitos de Dependência e Independência Linear.

O processo de ensino e de aprendizagem em Dependência e Independência Linear, ainda que de maneira pontual, tem sido alvo de pesquisas no campo da Educação Matemática, tais como Grande (2006), Andreolli (2009), Andrade (2010) e Souza (2016). Esses estudos, de um modo geral, pontuam que uma das principais dificuldades encontradas pelos estudantes na aprendizagem desses conceitos é a de não conseguir visualizá-los em outros objetos matemáticos diferentes das n-uplas, tais como equações, matrizes, funções etc. e, ainda, que a natureza desta dificuldade encontra-se na linguagem formal e axiomática com a qual tais conceitos são abordados.

Apesar das críticas lançadas nessas investigações, Dorier (1995a; 1998) defende que a linguagem formal e axiomática utilizada nos estudos em Álgebra Linear configura-se, na verdade, como elemento chave da disciplina, uma vez que possibilita ao estudante compreender seu caráter unificador e generalizante. Tal assertiva, segundo o autor, fundamenta-se no fato de que o nascimento e adoção dessa linguagem esteve diretamente relacionada a uma necessidade, no final do século XIX, de unificar e generalizar diferentes métodos e técnicas existentes ao longo do desenvolvimento histórico da teoria dos espaços vetoriais e suas transformações lineares.

Nessa perspectiva, tendo em vista as dificuldades encontradas pelos estudantes na aprendizagem dos conceitos de Dependência e Independência Linear e, ainda, a imprescindibilidade da linguagem formal e axiomática na visualização do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear, levantamos a hipótese de que a visualização do caráter unificador e generalizante das noções de Dependência e Independência Linear

[3] Para maiores esclarecimentos consultar Dias (2022)

poderia contribuir para uma compreensão desses conceitos, pelos licenciandos em Matemática, com mais significado.

Com o propósito de validar a hipótese em discussão, surgiu a necessidade de investigar a refletividade do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear no desenvolvimento histórico dos conceitos de Dependência e Independência Linear. Essa necessidade materializou-se na seguinte questão de pesquisa: **De que forma o desenvolvimento histórico dos conceitos de Dependência e Independência Linear reflete o caráter unificador e generalizante de Álgebra Linear?**

A fim de possibilitar uma melhor compreensão acerca da sistematização do trabalho, este contempla a seguinte organização: na primeira seção, apresentamos a problemática da qual emergiu a questão de pesquisa e o objetivo que balizou sua execução. Na segunda seção, discutimos o caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear. Na terceira seção, exibimos a noção de dependência inclusiva desenvolvida por Euler em 1750. Na quarta seção, expomos a noção de dependência unificada para equações e n-uplas concebida por Frobenius em 1875. Na quinta seção, apresentamos a noção de dependência no âmbito do espaço n-dimensional trabalhada por Grassmann em 1844. Na sexta seção, exibimos a noção de Dependência e Independência linear axiomatizada por Peano em 1888. E, na sétima seção, apresentamos os elementos que nos possibilitaram responder à questão de pesquisa enunciada inicialmente.

O caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear

Conforme discutido na seção anterior, a linguagem formal e axiomática com a qual os conceitos de Dependência e Independência Linear são trabalhados em cursos de licenciatura em Matemática é visualizada como sendo o aspecto problemático que impossibilita a compreensão do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear. Entretanto, é necessário ressaltar que essa linguagem emergiu de sua própria constituição a partir do século XIX, tendo em vista seu potencial em unificar diferentes métodos e ferramentas existentes e generalizando-as (DORIER, 1998).

Dorier (1995a) concebe a teoria dos espaços vetoriais como um exemplo de teoria unificadora e generalizante, haja vista sua concepção de conceitos dessa natureza, a saber,

> Conceitos unificadores e generalizantes unificam e generalizam diferentes métodos, ferramentas e objetos, que existiam anteriormente em uma variedade de ambientes. Este tipo de conceito é então um conceito formal que unifica os vários objetos dos quais foi abstraído. Não foi necessariamente criado para

> resolver novos problemas, mas para tornar a solução de muitos problemas mais fácil ou mais semelhantes entre si (DORIER, 1995a, p. 177, tradução nossa)

Desse modo, podemos observar que a linguagem formal e axiomática exerce um papel fundamental nos processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos da Álgebra Linear, uma vez que ela possibilita ao estudante compreender o caráter unificador e generalizante da referida disciplina por meio da visualização de diferentes objetos matemáticos em diversos contextos como elementos coesivos passíveis de generalização, mediante características comuns entre si. Esse aspecto pode ser visualizado na constituição histórica da Álgebra Linear.

O tratamento intuitivo de equações lineares no início do século XVIII foi o marco inicial da emersão de conceitos da Álgebra Linear. Entretanto, a adoção dos determinantes em problemas de linearidade resultou em uma superposição do caráter operatório em detrimento do intuitivo, e não permitiu que novas ideias pudessem ser descobertas. Posteriormente, com a unificação das equações e n-uplas com relação a linearidade, os determinantes foram usados com mais ênfase em problemas desse tipo, e forneceram bases para a constituição das matrizes, que tiveram papel fundamental na representação das transformações lineares. (DORIER, 2000)

A geometria também se constituiu como terreno no qual as ideias relacionadas à Álgebra Linear foram desenvolvidas. A busca por um cálculo geométrico intrínseco proposto por Leibniz (1646 – 1716) foi perseguida por muitos matemáticos e possibilitou grandes contribuições ao cálculo vetorial e até mesmo aos espaços vetoriais. Os esforços empreendidos pelos matemáticos na representação das quantidades imaginárias para a sua legitimação foi de grande valia, haja vista que culminou no nascimento dos sistemas de William Hamilton e de Hermann Grassmann. Tais sistemas, de modo geral, foram tomados como subsídios por outros matemáticos para as primeiras noções axiomáticas em Álgebra Linear. (DORIER, 2000)

Apesar de Grassmann ter definido alguns conceitos da Álgebra Linear de forma generalizada, as suas abordagens axiomáticas tiveram que ser redescobertas outras duas vezes para que finalmente fossem aceitas. Na segunda, os espaços vetoriais sobre os números reais foram denominados de sistemas lineares e foram apresentados por meio de uma abordagem axiomática que pudesse evidenciar suas aplicabilidades e pertinência diante dos problemas da época. Contudo, muitos desses trabalhos não ultrapassaram os muros de seus países de origem e, assim, não obtiveram uma grande notoriedade diante da comunidade acadêmica internacional. (MOORE, 1995)

Os espaços vetoriais foram redescobertos uma terceira vez no contexto da análise funcional por meio de uma abordagem axiomática que permitiu a unificação e generalização de diversos contextos, dentro os quais, o das funções. Paralelamente a isso, álgebra moderna foi o contexto de amadurecimento e consolidação da definição de espaço vetorial como um módulo topológico sobre um anel. Essa definição permitiu que a Álgebra Linear fosse concebida como a área que estuda os módulos sobre um anel e seus homomorfismos (transformações lineares), os quais são representados por matrizes quando o módulo tem uma base finita. (MOORE, 1995)

De fato, a partir dos escritos de Dorier (2000) e Moore (1995), é possível observar que apesar da Álgebra Linear se concebida como uma disciplina relativamente nova no meio acadêmico, os conteúdos que a compõem têm suas origens desde os tempos das civilizações antigas e suas raízes encontram-se em diversos contextos e momentos da História da Matemática. Este fato ratifica a conceituação dada por Dorier (1995a; 1998) como uma disciplina unificadora e generalizante de conceitos e objetos existentes ao longo do tempo, e assim explicita a linguagem formal e axiomática como uma ferramenta universal e necessária para o fazê-lo.

Entretanto, para Dorier (1995a; 1998), a praticidade do formalismo e da axiomatização da Álgebra Linear não é de fácil entendimento ao estudante, uma vez que para isto seria necessário que ele conhecesse todos os contextos matemáticos que a subsidiaram. O desafio do professor, portanto, concretiza-se em dar um aspecto funcional ao formalismo como sendo o único meio de compreender diferentes aspectos anteriores dentro de uma mesma linguagem, por meio de uma noção mais intuitiva, para que o estudante consiga visualizá-lo em qualquer objeto matemático compreendido como um elemento do espaço vetorial, tais como funções, matrizes, n-uplas, polinômios etc.

Nesse contexto, Dorier (1995a) distingue duas etapas na construção de um conceito unificador e generalizante, que segundo ele correspondem a dois processos mentais na aprendizagem: (I) O reconhecimento de semelhanças entre objetos, ferramentas e métodos dá vida ao conceito unificador e generalizante e (II) A explicitação do conceito unificador e generalizante como objeto induz uma reorganização de antigas competências e elementos do conhecimento. Desse modo, a linguagem formal e axiomática deve ser apresentada como a resposta a um problema que os estudantes são capazes de compreender e fazer por conta própria.

A ideia, portanto, consiste em inserir o estudante em uma atividade matemática na qual ele possa resolver e ao mesmo tempo refletir sobre algumas possibilidades de generalização e unificação dos métodos que ele mesmo desenvolveu, no intuito de visualizar suas praticidade e simplificação. Para Dorier (1998), isso implica não somente em dar exemplos de objetos diferentes em distintos contextos, mas também em mostrar como todos esses exemplos estão conectados e qual é o papel dos conceitos formais em relação a atividade matemática envolvida nessas tarefas.

É nessa perspectiva que visualizamos a potencialidade didática emergente da abordagem dos aspectos históricos dos conceitos de Dependência e Independência Linear em cursos de Álgebra Linear a fim de oportunizar a compreensão do seu caráter unificador e generalizante. Assim, no decurso do desenvolvimento histórico da Álgebra Linear, identificamos quatro diferentes noções matemáticas que remontam aos atuais conceitos de Dependência e Independência Linear. A frente dissertamos acerca dessas noções em seus contextos histórico e matemático de concepção.

Euler e a noção de dependência inclusiva

Leonhard Euler (1707 – 1783) foi o primeiro matemático a lançar um olhar mais intuitivo sobre os sistemas de equações lineares a partir da publicação, em 1750, de sua obra intitulada *Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Ligna Courbes*, na qual ele estudou o conhecido paradoxo de Cramer e a premissa de que um sistema linear de n equações e n incógnitas teria uma única solução. Euler percebeu que nem sempre isso era verdade, e para demonstrá-lo fez um estudo analítico e intuitivo de sistemas de equações em que o número de incógnitas era igual ao número de equações e chamou atenção para um ‘incidente’. (DORIER, 2000)

Euler tomou, inicialmente, um sistema contendo duas equações, a saber, $3x - 2y = 5$ e $4y = 6x - 10$, e evidenciou que ao tentar resolvê-lo por eliminação e substituição uma incógnita sempre permaneceria indeterminada e salientou o motivo de tal acontecimento:

> Veremos que não é possível determinar as duas incógnitas x e y, pois ao eliminar uma x, a outra desaparece sozinha e obtemos uma equação idêntica da qual nada podemos determinar. A razão para este incidente é primeiro óbvia, uma vez que a segunda equação muda para 6x – 4y = 10, que sendo

> apenas a primeira 3x – 2y = 5 dobrada, não difere dela (EULER, 1750 *apud* DORIER, 2000, p. 7, tradução nossa)

Segundo Dorier (1995b), é bem verdade que uma observação trivial como esta, mesmo para a época, fosse notada por outros matemáticos, porém não era suficiente para justificar tal incidente. Este fato, segundo o autor, evidencia o motivo que fez com que Euler tivesse que resolver o sistema para provar suas conjecturas, além do que permite-nos observar que a solução de um sistema era sua real preocupação. Euler ainda apresentou outros exemplos com três equações, sendo um exemplo com duas equações semelhantes e outro em que uma era o dobro da soma das outras duas, porém ao invés de resolvê-los, ele concluiu que:

> Então, quando dizemos que para determinar três incógnitas, basta ter três equações, devemos adicionar esta restrição, que essas três equações diferem tanto uma das outras que nenhuma já esteja incluída nas outras (EULER, 1750 *apud* DORIER, 2000, p. 8, tradução nossa)

Euler ainda discutiu um exemplo com um sistema contendo quatro equações e observou que, nesse caso, duas incógnitas poderiam não ser determinadas (DORIER, 1995b). Ele tomou o seguinte sistema:

$$5x + 7y - 4z + 3v - 24 = 0$$
$$2x - 3y + 5z - 6v - 20 = 0$$
$$x + 13y - 14z + 15v + 16 = 0$$
$$3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0$$

e ao resolvê-lo percebeu que valeriam apenas duas equações, pois tendo trabalhado com a terceira chegou ao seguinte resultado:

$$x = -13y + 14z - 15v - 16$$

e após substituí-lo na segunda equação, obteve:

$$y = \frac{33z - 36v - 52}{29} \; e \; x = \frac{-23z + 33v + 212}{29}$$

A substituição do valor de x e y na primeira e na quarta equação levaria a equações idênticas, ou seja, as incógnitas z e v permaneceriam indeterminadas. Novamente percebemos que a prova de Euler é dada em função da resolução do sistema por eliminação e substituição, porém este não salienta nenhuma relação linear entre as equações, apesar de ser possível observar que a diferença entre a primeira e a segunda equação resulta na quarta, ou ainda que a diferença entre a primeira e o dobro da segunda resulta da terceira. (DORIER, 1995b)

Após apresentar e discutir todos esses exemplos, Euler apresentou uma condição a ser inserida na premissa de que em um sistema de n equações n incógnitas seriam suficientes para determiná-las:

> Quando sustentamos que, para determinar n quantidades desconhecidas, é suficiente ter n equações que expressam sua relação mútua, devemos adicionar a restrição de que todas as equações são diferentes umas das outras, ou de que nenhuma das equações está contida nas outras (EULER, 1750 *apud* DORIER, 1995b, p. 230, tradução nossa)

Assentados em uma visão moderna da Álgebra Linear, visualizaríamos o termo 'uma equação contida nas outras', empregado por Euler, como o atual conceito de Dependência e Independência Linear, entretanto, tais conceitos referem-se a uma relação entre vetores emergentes de diferentes naturezas, enquanto que a noção trabalhada por Euler está imersa em um contexto particular de equações. Desse modo, Dorier (1995b; 2000) defende que Euler, em seus trabalhos sobre sistema de equações, trabalhou com a noção de dependência inclusiva.

Segundo Dorier (1995b; 2000), ambas as dependências se equivalem quando trabalhadas no contexto das equações, porém a de Euler é mais local e a noção de Dependência e Independência Linear carrega consigo um caráter unificador e generalizante, uma vez que generaliza e unifica essa definição de dependência para os demais objetos matemáticos, tais como n-uplas, matrizes, funções etc. Vejamos mais a frente outras noções precedentes desses conceitos.

Frobenius e o tratamento unificado para equações e n-uplas

Conforme discutido anteriormente, o uso dos determinantes na resolução de sistemas de equações lineares fez com que a análise intuitiva apresentada na obra de Euler fosse substituída por técnicas procedimentais mecânicas, e assim, os conceitos de Posto e de Dualidade demoraram um pouco mais de tempo para amadurecer, uma vez que a natureza desses conceitos está diretamente relacionada às relações existentes entre o número de incógnitas e o número de soluções de um sistema de equações. Contudo, tais conceitos ainda assim chegaram ao seu desenvolvimento dentro do contexto dos determinantes. (DORIER, 1995b, 2000)

Segundo Baroni (2009), entre os anos de 1840 e 1870 o conceito de Posto se tornou central no estudo dos sistemas lineares, porém diferentemente do modo como Euler os tratava, os aspectos operacionais eram mais usuais. Ainda segundo a autora, foi esse conceito que possibilitou um tratamento unificado para equações e n-uplas no que diz respeito a dependência. Georg Frobenius (1849 – 1917) foi o primeiro a apresentar, de forma clara e concisa, uma definição de dependência e independência para equações e n-uplas, sem o uso dos determinantes:

> Várias soluções particulares
> $$A_1^{(x)}, \ldots, A_n^{(x)}, (x = 1, \ldots, k)$$
> deve, portanto, significar independente ou diferente se $c_1 A_\alpha^{(x)} + \cdots + c_k A_\alpha^{(x)}$ não pode ser zero para $\alpha = 1, \ldots, n$, sem que todo $c_1, \ldots, c_k$ seja igual a zero, ou seja, se a forma k linear para $A_1^{(x)} u_1, \ldots, A_n^{(x)} u_n$ são independentes (FROBENIUS, 1875, p. 223 *apud* DORIER, 2000, p. 12)

A definição dada por Frobenius permitiu que a noção de dependência inclusiva trabalhada por Euler fosse unificada à noção de dependência tratada por ele no contexto das n-uplas. Ao considerar equações e n-uplas como o mesmo tipo de objeto em relação à linearidade, ele avançou significativamente em direção ao conceito moderno de vetor. Além disso, a abordagem de Frobenius foi totalmente diferente do processo de solução via Cramer, uma vez que não havia mais a separação arbitrária entre incógnitas e equações principais e secundárias. Assim, finalmente o conceito de Posto pôde ser definido em sua generalidade e características por Frobenius (DORIER, 2000).

A seguir, no decurso da apresentação de outras noções precedentes dos conceitos de Dependência e Independência Linear, é possível notar que a necessidade dos processos de unificação e generalização dos referidos conceitos se tornou mais frequente entre os matemáticos, ainda que estas noções estivessem inseridas inicialmente em outros contextos e/ou objetos matemáticos.

Grassmann e a generalização da dependência para o espaço n-dimensional

A busca por um cálculo geométrico tal qual Leibniz havia idealizado era perseguida por muitos matemáticos no final do século XIX. Nesse sentido, Hermann Grassmann (1809 – 1877) se destacou por sua tentativa em alcançá-lo a partir da criação de um sistema totalmente novo, alicerçado em bases filosóficas e geométricas do espaço. Publicou em 1844 sua *Die Lineale Ausdehnungslehre*, a qual fazia parte de sua nova teoria denominada *Die Ausdenungslehre*, porém nunca concluída. Segundo seu criador, apesar de poder ser aplicada à geometria, à mecânica e aos outros campos científicos, ela era independente deles. Na verdade, para Grassmann, a geometria nada mais era do que uma aplicação de seu novo sistema. (DORIER, 1995b; 2000)

Segundo Grande (2006), o real propósito de Grassmann era o de evidenciar a possibilidade de realizar operações com segmentos de reta, elementos geométricos, como se fazia com os números, como na adição e multiplicação, o que de fato se tornou possível com os vetores. Tal assertiva vai ao encontro das colocações de Táboas (2010), quando afirma que a consolidação de uma linguagem que pudesse relacionar a geometria sintética e a análise geométrica era também objetivo para Grassmann, que o fez por meio de uma abordagem de vetores (que ele concebia como deslocamentos ou extensões), através de operações de soma e produto entre eles.

Nessa perspectiva, observa-se que apesar de Grassmann ter trabalhado com suas ideias no contexto geométrico, ele não se limitou em apresentar suas definições em função de um espaço tridimensional, mas sim em um espaço n-dimensional. Com efeito, segundo Dorier (1995b), a singularidade da obra de Grassmann encontra-se no fato de nela conter bases pertinentes para uma teoria unificada da linearidade, uma vez que seu autor introduziu com precisão e em um contexto generalizado conceitos elementares da Álgebra Linear, como Dependência Linear, Base e Dimensão. Vejamos alguns excertos nos quais Grassmann apresentou seu conceito de Dependência:

GRANDE (2006) nos exibe alguns desses excertos nos quais Grassmann apresentou sua definição de dependência, a saber, "Dizemos que uma grandeza elementar de primeiro grau é dependente de outras grandezas elementares, quando ela pode ser representada por uma combinação linear dessas últimas" (GRASSMANN *apud* GRANDE, 2006, p. 101).

Além disso, ainda alicerçado em Grande (2006, p. 101), Grassmann também se referiu ao conceito de dependência como "espécie dependente de uma outra" quando um vetor poderia ser escrito como combinação linear de outros vetores. Uma outra definição também apresentada por Grassmann quanto ao conceito de dependência pode ser encontrada no seguinte excerto:

> Uma grandeza a é dita derivável (*ableitbar)* a partir de grandezas b, c, ... por meio dos números $\beta, \gamma, \ldots$ se:
> $$a = \beta b + \gamma c + \cdots$$
> dir-se-á ainda que a, b e c... estão 'numa relação numérica' (Zahlbeziehung), quando cada uma dessas grandezas for derivável das outras (GRASSMANN *apud* GRANDE, 2006, p. 101).

Caire (2020) também nos evidencia uma definição de dependência apresentada no contexto do que Grassmann chamou de magnitudes:

> [Grassmann] definiu o conceito de dependência, onde uma magnitude elementar de primeira ordem era representada como soma múltipla de magnitudes elementares de primeira ordem independentes e essas magnitudes independentes não podiam ser representadas como múltiplo ou soma do restante das magnitudes independentes (CAIRE, 2020, p. 80)

O conceito de dependência, no contexto dos deslocamentos ou extensões, foi também apresentado por Grassmann à luz do que ele nomeou como evoluções fundamentais, nas quais ele também evocou, em termos modernos, os conceitos de Geradores, Base e Dimensão:

> De acordo com o modo original de geração (que representa o aspecto real da teoria), um sistema de enésima ordem é gerado por n métodos fundamentais de evolução, que são dados como independentes (ou seja, nenhum está incluído em um sistema gerado por algum dos outros). Portanto, a ordem de um sistema, que é a dimensão 'natural', está intrinsicamente relacionada aos conceitos de geração e dependência, os quais representam a medida de extensão (DORIER, 1995b, p. 247, tradução nossa)

Desse modo, diante dos excertos apresentados, apesar da noção de dependência de Grassmann estar imersa em um contexto geométrico, ela concentrava um potencial – assim como toda a obra de Grassmann – para ser expandida para um lócus muito mais generalizado. Segundo Táboas (2010), ainda que o conceito de Dependência e Independência Linear não tenham sido criados por Grassmann, a pertinência reside no fato de que em sua obra eles ganharam um formato bem estruturado em termos axiomáticos, além do que, receberam um contexto numa visão global da matemática, permitindo assim que fossem aplicados em diferentes ramos a partir de uma associação adequada entre os elementos da teoria abstrata e os elementos do ramo escolhido.

Peano e a axiomatização da Dependência e Independência linear

Giuseppe Peano (1858 – 1932) trabalhou com os vetores de três maneiras distintas durante seus estudos, a saber, na forma de n-uplas; como a diferença A – B de dois pontos A e B e por meio da axiomatização do que chamou de Sistemas Lineares, que em sua essência constituíam-se em um espaço vetorial sobre os números reais. As duas últimas foram trabalhadas em 1888 em sua obra intitulada *Calcolo geométrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, na qual Peano discutiu as ideias do cálculo geométrico idealizado por Leibniz e que fora desenvolvido por Mobius, Bellavitis, Hamilton e Grassmann. (MOORE, 1995)

Peano foi um dos poucos matemáticos a se interessar pela teoria das extensões lineares de Grassmann e foi esse mesmo interesse que o fez tentar apresentar de maneira mais clara e acessível os fundamentos matemáticos contidos em *Die Lineale Ausdehnungslehre*. Entretanto, enquanto Grassmann deduziu as propriedades fundamentais dos seus ‘espaços vetoriais’ a partir da definição de operação nas coordenadas, Peano foi mais preciso e descreveu uma estrutura axiomática da qual eles emergiam, além de ter aperfeiçoado a formulação ao retirar algumas redundâncias e ter dado maior clareza aos conceitos de zero e de elemento oposto. (DORIER, 2000)

Nesse contexto, um dos aspectos mais interessante na obra de Peano diz respeito ao seu pioneirismo em utilizar uma abordagem axiomática na apresentação do que hoje conhecemos por espaços vetoriais sobre os números reais, bem como de seus conceitos adjacentes. No último capítulo do seu *Calcolo geométrico*, ele apresentou uma lista de axiomas que caracterizava o que ele chamou de *Sistemas Lineares* (em termos modernos, espaços vetoriais sobre os números reais), explicitando assim que a potencialidade de generalização contida na obra de Grassmann poderia ser aumentada por meio da axiomatização. (DORIER, 1995b; 2000)

Essa abordagem axiomática foi também utilizada para definir conceitos subjacentes aos espaços vetoriais, entre os quais, os conceitos de Dependência e Independência Linear.

Caire (2020), ao estudar a obra de Peano, explicita de que forma a definição dos conceitos em foco fora apresentada por ele, contudo, ressalta de antemão que Peano usou a palavra “ente” para se referir a um vetor e a palavra “grupo” para tratar de base:

> Na definição seguinte, página 142, Peano considerou os ‘entes’ de um sistema linear dependentes $a_1, a_2, \dots, a_n$ se determinados os *n* números $m_1, m_2, \dots, m_n$, não fossem todos nulos quando substituídos na equação: $m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots + m_na_n = 0$. Se o coeficiente de algum ‘ente’ fosse não nulo, ele poderia ser expresso numa função linear homogênea dos demais. Na página 143, $a_1, a_2, \dots, a_n$ seriam independentes entre eles, se na equação $m_1a_1 + m_2a_2 + \cdots + m_na_n = 0$, $m_1, m_2, \dots, m_n$ todos fossem nulos. $m_1 = m_2 =, \dots, m_n = 0$ (CAIRE, 2020, p. 96)

A partir da definição dada por Peano, reescrita nas palavras Caire (2020), aos conceitos de Dependência e Independência Linear, é possível compreendermos o potencial de simplificação e praticidade ofertado pela linguagem axiomática e formal com qual esses conceitos foram trabalhados por esse matemático. Ainda que a definição de Peano estivesse inserida no contexto dos seus ‘entes’ geométricos, ela pôde ser estendida a todos aqueles outros contextos discutidos anteriormente, tais como: a dependência inclusiva abordada por Euler, a generalização das n-uplas e equações de Frobenius e a abordagem da dependência para o espaço n-dimensional trabalhada por Grassmann.

Conclusão

Tendo em vista as dificuldades encontradas pelos estudantes na aprendizagem de Dependência e Independência Linear e, ainda, a imprescindibilidade da linguagem formal e axiomática para a visualização do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear, levantamos a hipótese de que a aprendizagem desses conceitos com mais significado poderia ser alcançada a partir da compreensão do seu caráter unificador e generalizante, expresso em seu desenvolvimento histórico. Assim, comprometemo-nos em investigar a refletividade do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear no desenvolvimento histórico dos conceitos de Dependência e Independência Linear.

Ao estudar a constituição histórica da Álgebra Linear identificamos quatro noções que remontam aos atuais conceitos de Dependência e Independência Linear. A primeira trata-se da dependência inclusiva, a qual foi concebida por Euler no contexto dos sistemas de equações lineares no ano de 1750, mais precisamente, quando ele se propôs a provar que nem sempre um sistema linear de *n* equações e *n* incógnitas teria uma única solução. A segunda diz respeito a dependência unificada para equações e n-uplas, desenvolvida por Frobenius em 1875 e que contribuiu para a emergência do conceito moderno de vetor, haja vista a unificação dos referidos objetos quanto à linearidade.

A terceira noção constitui-se na generalização da dependência para o espaço n-dimensional promovida por Grassmann no ano de 1844, o qual trabalhou com a dependência no contexto dos segmentos orientados (os quais ele chamou de extensões e que são uma das corporificações de um vetor), e os abordou no âmbito do espaço n-dimensional, promovendo assim um caráter mais generalizado. A quarta noção refere-se à dependência e independência axiomatizada por Peano em 1888, a qual foi realizada sob a égide do que ele chamou de sistemas lineares e que em termos modernos figuravam um espaço vetorial sobre os números reais.

Com exceção da noção de dependência inclusiva concebida por Euler, é possível observar que as outras noções explicitam um certo grau do caráter unificador e generalizante da Álgebra Linear, haja vista que ao serem concebidas pela primeira vez por seus idealizadores elas unificaram as noções anteriores a partir de uma linguagem mais formal e que alcançou uma axiomatização no contexto dos sistemas lineares de

Peano no ano de 1888. Tais resultados sinalizam que a inserção dos referidos aspectos em cursos de Álgebra Linear poderá contribuir para a compreensão do caráter unificador e generalizante dos conceitos em foco.

Referências

ANDRADE, Juliana Pereira Gonçalves de. **Vetores: Interações a distância para a aprendizagem de Álgebra Linear.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife, 2010. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4038>. Acesso em: 12fev. 2022.

ANDREOLLI, Daniela Inés. **Análisis de los obstáculos en la construcción del concepto de Dependencia Lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad.** Tesis de maestría em Ciencias. Instituto Politécnico Nacional, México, 2009. Disponível em: < https://tesis.ipn.mx/handle/123456789/11736>. Acesso em: 12fev. 2022.

BARONI, Rosa Lucia Sverzut. **Aspectos Históricos de alguns Conceitos da Álgebra Linear.** Belém: SBHMat, 2009. Disponível em: <http://www.crephimat.com/visor_mnc.php?id_t=55>. Acesso em: 12fev. 2022.

CAIRE, Elaine. **Uma cronologia histórica sobre as ideias de conjuntos linearmente independentes e de base até o século XIX.** Tese de Doutorado em Educação. Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2020. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/192751>. Acesso em: 12fev. 2022.

DIAS, Renan Marcelo da Costa. **Um estudo acerca da inserção de aspectos históricos dos conceitos de Dependência e Independência Linear.** Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, 2022. Disponível em: <https://sigaa.ufpa.br/sigaa/public/programa/defesas.jsf?lc=pt_BR&id=379>. Acesso em: 30mar. 2022

DORIER, Jean-Luc. Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 29, n. 2, p. 175-197, 1995a. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/226438971_Meta_level_in_the_teaching_of_unifying_and_generalizing_concepts_in_mathematics>. Acesso em: 12fev. 2022.

DORIER, Jean-Luc. A general Outline of the Genesis of Vector Space Theory. **Historia da Mathematica**, v. 22, n. 3, p. 227 – 261, 1995b. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086085710245>. Acesso em: 12fev. 2022.

DORIER, Jean-Luc. The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. **Linear Algebra and its applications**, France, 275-276, p. 141-160, 1998. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379597100611>. Acesso em: 12fev. 2022.

DORIER, Jean-Luc. Epistemological Analysis of The Genesis of Theory of Vector Spaces. *In:* DORIER, Jean-Luc. **On the Teaching of Linear Algebra.** Grenoble, France: Kluwer Academia Publishers, 2000, p. 1 – 73. Disponível em: <https://link.springer.com/book/10.1007/0-306-47224-4>. Acesso em: 12fev. 2022.

GRANDE, André Lúcio. **O conceito de Independência e Dependência Linear e os Registros de Representação Semiótica nos Livros Didáticos de Álgebra Linear.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2006. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11123>. Acesso em: 12fev. 2022.

MOORE, Gregory H. The axiomatization of Linear Algebra: 1875 – 1940. **Historia Mathematica,** v. 22, n. 3, p. 262 – 303, 1995. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086085710257>. Acesso em: 12fev. 2022.

SOUZA, Mariany Layane de. **Dependência e Independência Linear: um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática.** Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina, 2016. Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UEL_f6ede9945d7c0ed01538679e020649d5>. Acesso em: 12fev. 2022.

TÁBOAS, Plínio Zornoff. Um estudo sobre as origens dos Espaços Vetoriais. **Revista Brasileira de História da Matemática.** v. 10, n. 19, 2010, p. 1 – 38. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/147>. Acesso em: 12fev. 2022.

Recebido em: 17 / 02 / 2022
Aprovado em: 21 / 03 / 2022