



ASPECTOS DO ENSINO DE DERIVADA

ASPECTS OF DERIVATIVE TEACHING

*João Cláudio Brandemberg*¹

Universidade Federal do Pará

*Stephany Gláucia de Oliveira Paulo*²

Universidade Federal do Pará

Resumo

Neste artigo buscamos apresentar os aspectos que consideramos mais importantes relacionados ao Ensino de Derivada. Uma maior interação nos aspectos: epistemológico, da formação inicial discente, da formação de professores e disciplinar deve permitir um ensino de matemática que caminha na direção de uma formação especializada, relacionando os diversos campos do conhecimento matemático e refletindo sobre a sua evolução e seus fundamentos.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Ensino de Derivada. Epistemologia. Formação de Professores.

Abstract

In this paper we present the aspects that we consider most important related to the Derivative teaching. Greater interaction in the aspects: epistemological, of student's initial training, of teachers training and disciplinary it allows a math teaching that goes toward specialized training, listing the various fields of mathematical knowledge and reflecting on its evolution and its foundations.

Keywords: Mathematics Education. Derivative Teaching. Epistemology. Teacher Training.

Introdução

O ensino de conteúdos matemáticos, como o conceito de Derivada, mesmo, em cursos de licenciatura, apresenta um forte caráter lógico-formal, uma vez que sua abordagem é extremamente teórica e estrutural, uma apresentação do tipo: *definição – exemplo – teorema – exercícios* (DREYFUS, 1991); finalizando com uma avaliação, do tipo prova, geralmente escrita, garantindo apenas verificar uma “quantificação” do conhecimento, a atribuição numérica de uma nota. Um tipo de avaliação, que em essência, é responsável pelo expressivo percentual de reprovação e evasão nesses cursos.

¹ E-mail: brand@ufpa.br

² E-mail: stephanyglauucia@hotmail.com



Consideramos que um estudo de alguns aspectos³ importantes relacionados ao ensino do conceito de Derivada, como descrevemos a seguir, deve consistir em uma alternativa visando mudanças neste tipo de abordagem, uma vez que vamos considerar elementos fundamentais ao processo de ensino, a saber: o conteúdo, quem ensina e quem aprende. O objetivo do pesquisador é enunciar e descrever estes aspectos, buscando em sua interação propriedades ou relações (características) que minimizem as dificuldades que enunciamos; o objetivo do professor é sempre prover as ferramentas (métodos, técnicas, tecnologias) para efetivar o processo de ensino-aprendizagem. Cabe ao discente objetivar uma resposta a suas indagações e perceber de que forma a aprendizagem de conteúdos matemáticos, como Derivada, lhe permite uma interpretação dos fenômenos naturais e socioculturais que o envolvem.

Aspectos do desenvolvimento epistemológico do conceito

Em cursos de Cálculo ministrados em universidades modernas os conteúdos básicos, geralmente, são apresentados na seguinte sequência: Limite, Derivada e Integral. A abordagem ao conceito de Derivada e a construção de retas tangentes a uma curva precede ao cálculo de áreas sob o gráfico de uma curva. Essa abordagem, do ponto de vista do desenvolvimento histórico epistemológico desses conceitos se caracteriza por uma inversão.

Segundo Edwards (1979), a obtenção de áreas curvilíneas perpassa a antiguidade grega, enquanto que a construção de tangentes é característica do século XVII. Em suas palavras:

[...] o cálculo de áreas curvilíneas remonta os tempos antigos. No entanto, além da simples construção de retas tangentes para seções cônicas (com a visão estática grega de reta tangente como uma linha tocando a curva em um único ponto), e o isolado exemplo da construção de Arquimedes de uma tangente a uma espiral, retas tangentes não são estudadas até meados do século XVII (EDWARDS, 1979, p. 122).

Assim, consideramos a primeira metade do século XVII, para iniciarmos a apresentação de alguns métodos de obtenção (construção) de tangentes que influenciam diretamente na determinação do conceito de Derivada.

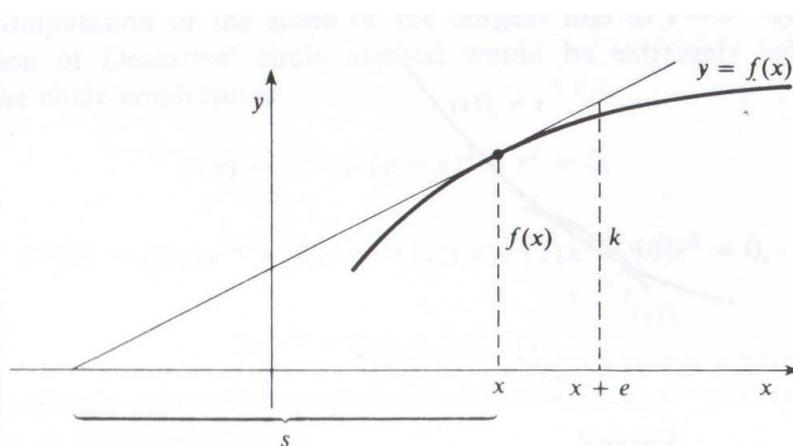
Pierre de Fermat (1601-1665), em 1636, é um dos primeiros a atacar o problema das tangentes a partir de uma *pseudoigualdade* utilizada na obtenção de máximos e

³ Utilizamos o termo aspectos no sentido de faces, características, entes ou mesmo fatores. São elementos essenciais ao processo de ensino, descritos de forma menos formal ou panorâmica. Isto posto, mantemos o termo.



mínimos. Um exemplo esclarecedor é a divisão do segmento de comprimento b em duas partes de medidas x e $b - x$. Fermat utiliza uma versão dessa técnica para construir retas tangentes. Ele utiliza basicamente as relações de semelhança de triângulos obtidos a partir dos pontos da curva $y = f(x)$ de abscissas x e $x + e$, para construir uma subtangente s e posteriormente, obter a tangente a curva (figura 1); uma vez que a inclinação da reta tangente é dada por $f'(x) = f(x) / s$.

Figura 1: A Subtangente de Fermat

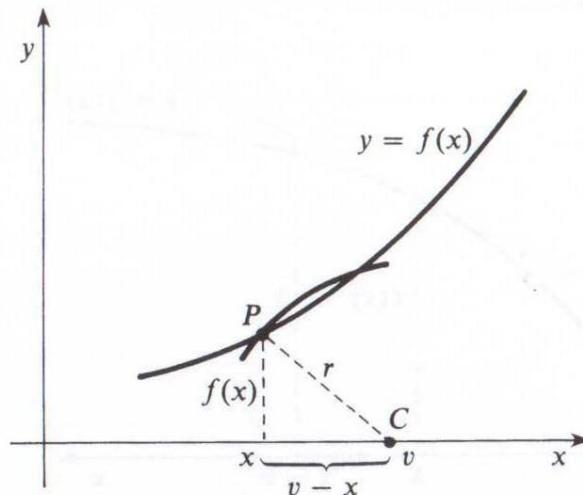


Fonte: Edwards (1979).

Pela mesma época, René Descartes (1596-1650) introduz seu método de determinação de retas tangentes a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(x, f(x))$ e que envolve a construção de uma circunferência, ou ao menos a determinação do seu centro $C(v, 0)$.

Aqui, temos a proposição clássica: *uma reta tangente a circunferência, é perpendicular ao raio no ponto de tangência*. Descartes usa a definição de subnormal $v - x$ em vez da subtangente s de Fermat (figura 2).

Figura 2: A Subnormal de Descartes



Fonte: Edwards (1979)

Enquanto que o método de Fermat considera valores infinitesimais o método de Descartes é essencialmente algébrico e em acordo com Edwards (1979) oferece maior influência ao desenvolvimento do cálculo, em particular, a definição de Derivada.

Descartes desenvolveu um método de construção de retas tangentes que foi de caráter algébrico, em vez de infinitesimal. Embora a abordagem de Fermat tenha chegado mais perto do coração infinitesimal da matéria, a abordagem algébrica de Descartes provavelmente exerceu uma influência maior sobre o imediato desenvolvimento do cálculo (EDWARDS, 1979, p.125).

Para Edwards (1979) estes trabalhos, junto aos de outros matemáticos contemporâneos, como: os métodos computacionais de Johann Hudde (1628-1704) e François Sluse (1622-1686) e os infinitesimais de Giles de Roberval (1602-1675), Isaac Barrow (1630-1677) e Blaise Pascal (1623-1662) foram fundamentais para a formulação do conceito de derivada por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716).

Segundo Edwards (1979), para Descartes a importância do método de construção de tangentes é inestimável.

[...] Sua constatação da importância do problema da construção de retas tangentes está expressa em sua declaração de que não é apenas "o problema mais útil e geral que eu conheço, mas o que eu mesmo desejava saber em geometria" (EDWARDS, 1979, p. 125-126).

De fato, conhecer a declividade (inclinação) da reta tangente a uma dada curva tem importante significado físico, principalmente, no estudo do movimento dos corpos. Fatos como este, apontam a necessidade de sua determinação e definição. Com os conhecimentos de Geometria Analítica já bem avançados no século XVII, pode-se



determinar a equação da reta tangente a uma circunferência ou outra curva conhecida em um ponto dado e defini-la como a reta que intercepta localmente essa curva em um único ponto. Isto nos permite tomar decisões sobre determinadas propriedades dessas curvas e assim estudar questões relacionadas aos fenômenos associados. Este é um dos aspectos que nos mostra a importância de tomarmos o conceito de Derivada e suas propriedades, como conteúdo a ser trabalhado no ensino de graduação em Matemática (licenciatura e bacharelado) e em áreas afins.

Aspectos da formação inicial dos discentes

Segundo Bisognin e Bisognin (2011, p. 509), “o conhecimento que os alunos adquirem sobre Derivada depende, em grande parte, das diferentes representações e abordagens apresentadas pelos professores e como elas são relacionadas a fim de evidenciar seu significado.” Assim, o processo de formação inicial dos alunos de Cálculo na graduação depende de elementos abordados no momento do curso e de elementos da formação anterior, como, por exemplo: o domínio das operações fundamentais com números racionais que se torna importante para o tratamento dos números reais (racionais e irracionais) e da representação de elementos geométricos (pontos, retas) no plano e no espaço.

De fato, as dificuldades em analisar informações na construção do conceito de Derivada a partir de uma abordagem gráfica é resultado tanto de uma excessiva abordagem analítico-algébrica quanto da falta de conhecimento de “conceitos básicos” de Geometria. Para Bisognin e Bisognin (2011, p. 509), se faz importante priorizar uma abordagem gráfica no ensino deste conteúdo (conceito de Derivada).

Como apontado por Tall (1993), estudantes universitários apresentam dificuldades em fazer a conexão entre as representações gráfica e analítica do conceito de Derivada. Sendo que, isto está relacionado aos tipos de abordagem, realizadas em sala de aula, onde prevalecem os aspectos técnicos.

Para Tall (1993), estas dificuldades podem ser minimizadas, de várias maneiras, como, por exemplo, através da utilização de um ambiente computacional, para garantir o apoio necessário. Um software pode ser produzido (ou utilizado) para realizar alguns dos processos (algoritmos), possibilitando ao aluno se concentrar em outros processos (interpretação, dedução), escolhidos para ser seu foco de atenção. Uma sequência de aprendizagem em crescimento vertical pode ser modificada se fornecermos ambientes



que permitam o estudo de conceitos de nível superior de forma intuitiva antes, ou ao mesmo tempo, que são construídos.

Assim, em acordo com Rosa, Rodrigues e Silva (2011), acreditamos que para um estudante ser bem-sucedido em disciplinas de conteúdo matemático, ele precisa assumir a condução de seu processo de aprendizagem utilizando de forma ativa, estratégias para gerenciar sua motivação, seu comportamento e sua aprendizagem. Além disso, deve, continuamente, ser capaz de refletir suas ações, avaliá-las e fazer as devidas correções, quando necessário. Em síntese, deve desenvolver a habilidade de aprender a aprender (autonomia).

Aspectos da formação Docente

Concordamos com Leite e Darsie (2009), ao afirmar que o ensino de Cálculo em cursos de graduação apresenta forte caráter tradicional, uma vez que sua abordagem é extremamente teórica e expressa em um formato estruturado. E que este tipo de abordagem se reflete em um percentual expressivo de reprovação e evasão.

faz-se necessário refletir sobre essas práticas pedagógicas no intuito de se buscar por uma melhoria na qualidade da formação inicial dos professores. Vale ressaltar que para que haja uma mudança significativa nesse processo formativo faz-se necessário que o professor universitário se torne consciente da responsabilidade que possui como mediador do conhecimento no processo de formação desses estudantes, uma vez que a sua prática refletirá na atuação dos futuros educadores (LEITE; DARSIE, 2009, p. 3872).

Para Paulo (2016, p. 13) esta forma de abordagem é influenciada diretamente pelos saberes mobilizados pelos docentes em sua prática. São esses saberes oriundos de sua formação profissional, do conhecimento dos conteúdos relacionados à disciplina, da sua experiência em anos de sala de aula e da relação entre as diversas disciplinas que compõem a grade do curso, que possibilitam ao professor realizar uma abordagem de caráter mais inovador. Nas palavras de Dall'anese (2000),

Tais afirmações sinalizam que há uma relação entre a aprendizagem e os métodos adotados em geral. Utilizar uma prática pedagógica diferente das tradicionais traz algum ganho? A escolha feita para a apresentação do conceito de Derivada [...] acredito, ajudará a contornar algumas dificuldades apresentadas (DALL'ANESE, 2000, p. 14).

Desta forma, existe uma preocupação do professor explicitada em um planejamento inicial que lhe permita definir os objetivos do ensino de determinado conteúdo e determinar as possibilidades de sua execução dentro de uma carga horária específica. Uma preocupação maior com o entendimento dos conceitos e suas aplicações em contraste ao excesso de formalismo das práticas tradicionais.

Aspectos relacionados às disciplinas

Ao observarmos o alto índice de reprovação verificado nas disciplinas de Cálculo em diversas Instituições de Ensino Superior (IES) e a carga horária disponível para sua execução é fundamental buscar melhorias no processo de ensino.

Geralmente, os conteúdos ensinados, Limite, Derivada e Integral, são trabalhados de forma integrada, por exemplo, a Derivada é definida como um tipo de Limite. Portanto, os aspectos técnico e formal são característicos dessas disciplinas. Técnico no sentido de se trabalhar de forma algorítmica, utilizando ferramentas da Álgebra e da Geometria que possibilitem um maior e melhor desempenho no processo de ensino aprendizagem com o domínio de suas terminologias (notação, fórmulas) e formal na análise de seu desenvolvimento a partir de sua dedução lógica (linguagem matemática). Conceitos como o de Derivada não podem ser trabalhados de forma isolada, estando relacionado a conceitos precedentes como os conceitos de Limite e Continuidade.

Dessa forma as disciplinas de Cálculo, por suas características, necessitam de uma dedicação maior por parte dos alunos e dos professores. Um cuidado que permita dar maior significado aos conteúdos ensinados, promovendo a integração destes significados aos conhecimentos iniciais, apresentados pelos alunos.

Considerações

Como podemos considerar, aos alunos cabe maior dedicação e participação nas aulas além de desenvolver uma capacidade de autonomia que lhe permita complementar os estudos de sala de aula com estudos extraclasse. De fato, é ao adquirir estes novos conhecimentos, sobre o conteúdo matemático, que o aluno amplia sua formação. Aos professores cabe dar significado e importância aos conteúdos, em particular ao conceito de derivada, através de sua contextualização e aplicações.

Assim, conhecer o aspecto epistemológico do desenvolvimento de determinado conteúdo matemático vai permitir ao professor um “aprofundamento” de seu conhecimento matemático, uma vez que lhe permite, além do conhecimento técnico (que envolve conhecer as definições e teoremas), uma reflexão sobre a fundamentação matemática, seu dinamismo interno e suas relações com outras disciplinas buscando respostas e propondo questões com significado para desenvolver o conhecimento de seus alunos, com a integração de novos significados, ao mesmo tempo em que amplia os seus



conhecimentos sobre o tema (Derivada), em um processo de reflexão para tomada de novas decisões.

Referências

BISOGNIN, E. BISOGNIN, V. Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. **Educ. Matem. Pesq.** São Paulo, v.13, n.3, pp.509-526, 2011

DALL'ANESE, C. **Conceito de Derivada: Uma Proposta para seu Ensino e Aprendizagem.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, 2000.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Process. In: **Advanced Mathematical Thinking.** Edited by David Tall. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

EDWARDS, C. H. **The Historical Development of the Calculus.** Springer-Verlag, New York, 1979.

LEITE, E. A. P. DARSIE, M. M. P. Formação Inicial de Professores de Matemática: o caso da Prática Pedagógica no Ensino de Cálculo. Em: **Anais do IX – EDUCERE: 2009**, p. 3872-3881.

PAULO, S. G. O. **Saberes Docentes na Licenciatura em Matemática acerca do Ensino de Derivada.** Dissertação (Mestrado em educação em ciências e matemáticas). UFPA, 2016.

ROSA, O. S. RODRIGUES, C. K. SILVA, P. N. Aspectos Motivacionais na Disciplina de Cálculo Diferencial e integral. **Revista Eletrônica TECCEN**, Vassouras, v.4, n.2, p. 49-62, 2011.

TALL, D. Computer environments for the learning of mathematics. In: BICHLER, R. et al (Ed.) **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.** Dordrecht, Kluwer Academy Publishers: 1993, p. 189-199.