BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

e-ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v9i25.6768

O PROBLEMA DE SNELL-POTHENOT

THE SNELL-POTHENOT'S PROBLEM

Leonardo David Marques dos Santos [1]; Eduardo Gonçalves dos Santos [2]

RESUMO

Os problemas de ordem prática na Matemática remontam praticamente ao seu início, mesmo ainda sem esta ser considerada como um corpo de conhecimentos. No caso da Geometria, a partir dos egípcios, com os problemas de medidas, ela tem se configurado como um ramo da Matemática com raízes eminentemente práticas. O termo "Geometria Prática" encontra-se apresentado sob dois aspectos: um relativo à atitude diante de um problema e outro ligado a um contexto educativo. O presente artigo é um recorte da parte histórica do trabalho de Santos (2020), com uma ampliação a respeito da Geometria Prática, sobre a qual visa apresentar um problema, conhecido como Problema de Ressecção ou, como é mais conhecido, Problema de Snell-Pothenot, em homenagem a Willebrord Snell (ca.1580-1626) e Laurent Pothenot (1650-1732). Trata-se de um problema de levantamento planar, em que são dadas as coordenadas dos três pontos A, B e C, e um observador, em um ponto desconhecido P, que observa o segmento AC sob um ângulo α e o segmento BC sob um ângulo β. Busca-se determinar a posição do ponto P. E ainda, de forma inversa mas inteiramente análoga, determinar a posição do ponto P, a partir de observações feitas dos pontos A, B e C. A apresentação é composta de um histórico sobre Willebrord Snell, pontuando aspectos importantes de sua vida, bem como de situações em que o problema teve origem. Segue-se então uma discussão a respeito do Problema de Ressecção, para depois fazermos um apanhado sobre Laurent Pothenot. Em seguida são apresentadas duas soluções desse problema, sendo uma delas classificada como moderna e outra como geométrica. O trabalho é finalizado com as considerações finais e referências.

Palavras-chave: Geometria Prática; Wilebrord Snell; Laurent Pothenot; Problema de Ressecção.

ABSTRACT

Practical problems in mathematics go back practically to its very beginning, even before it was considered a body of knowledge. In the case of geometry, since the Egyptians, with the measurement problems, it has been configured as a branch of mathematics with eminently practical roots. The term "Practical Geometry" is presented under two aspects: one this related to

[1] Mestre em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB). Professor efetivo da rede estadual de ensino de Pernambuco (SEE), Vitória de Santo Antão, Pernambuco, Brasil. Endereço para correspondência: Rua vinte e oito, número 45, bairro Bela Vista, Vitória de Santo Antão, Pernambuco, Brasil, CEP: 55608-660. E-mail: leomarques1@gmail.com.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-5170-4177

[2] Doutor em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Professor Associado da Universidade Federal da Paraíba (UFPB), João Pessoa, Paraíba, Brasil. Endereço para correspondência: Departamento de Matemática, Cidade Universitária, S/N, Conjunto Castelo Branco, João Pessoa, Paraíba, CEP: 58059-900. E-mail: eduardo@mat.ufpb.br.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-8582-6826
.

the attitude towards a problem and the other related to an educational context. The present work is a clipping of the historical part of the work of Santos (2020) with an expansion on Practical Geometry and aims to present a Practical Geometry problem, known as the Resection Problem or, as it is better known, the Snell-Pothenot Problem, in honor of Willebrord Snell (ca.1580-1626) and Laurent Pothenot (1650-1732). It is a planar survey problem, where the coordinates of the three points A, B and C are given and an observer at an unknown point P that observes the segment AC under an angle α and the segment BC under an angle β. The aim is to determine the position of point P. And also, inversely but entirely analogously, to determine the position of point P, based on observations made at points A, B and C. The presentation is composed of a biographical sketch of Willebrord Snell, pointing out important aspects of his life, as well as situations where the problem originated. This is followed by a discussion about the Resection Problem, so that we can later make an overview of Laurent Pothenot. Then, two solutions to this problem are presented, one of them classified as modern and the other as geometric, and the work is concluded with the final considerations and references.
Keywords: Practical Geometry; Wilebrord Snell; Laurent Pothenot; Resection Problem.

Introdução

Remontam ao antigo Egito as primeiras manifestações de uso da Geometria para fins práticos. Diversos historiadores concordam que a Geometria, mesmo sem ter se configurado como um corpo de conhecimentos, tem origem nesta civilização:

> Supõe-se que a geometria teve sua origem no levantamento topográfico; mas embora seja difícil dizer quando o estudo de números e cálculos - algum conhecimento dos quais é essencial em qualquer estado civilizado - se tornou uma ciência, é comparativamente fácil distinguir entre os raciocínios abstratos da geometria e as regras práticas da terra. agrimensor. Alguns métodos de levantamento topográfico devem ter sido praticados desde os primeiros tempos, mas a tradição universal da antiguidade afirmava que a origem da geometria deveria ser buscada no Egito. (ROUSE BALL, 1960, p. 5)

Mais especificamente na civilização egípcia foram tratados diversos problemas originados de situações cotidianas daquele contexto, como, por exemplo, o problema de demarcação das terras no vale do rio Nilo, fato este citado por Heródoto em sua obra *História*, conforme a tradução do livro II:

> Diziam que esse rei distribuiu o território entre todos os Egípcios, concedendo a cada um deles um lote quadrado igual e que fez disso uma fonte de renda, fixando o pagamento de um tributo anual. Se acontecesse de o rio tirar de alguém uma parte de seu lote, esse ia até o rei e lhe apontava o sucedido; o rei, então, enviava pessoas que examinavam e calculavam o quanto a terra fora diminuída, a fim de que, no futuro, o proprietário fosse taxado levando-se em conta a perda. Está aí, segundo penso, a origem da geometria, introduzida posteriormente na Grécia. Mas quanto ao relógio de sol, ao gnômon e a divisão do dia em doze partes, os Gregos devem-nos aos Babilônios. (MORAES, 1999, p.182)

O termo prático aqui tem o sentido da utilidade prática, ou seja, um conhecimento que é mobilizado para resolver um determinado problema. Essa é a perspectiva, aliás, defendida por Saito (2018, p.3), quando ele preceitua que "A geometria prática fazia parte de uma longa tradição em que os conhecimentos geométricos, euclidianos em essência, eram mobilizados para resolver diversos problemas de ordem prática".

A Geometria Prática, ainda de acordo com Saito (2018, p.3), acabou por estruturar-se em torno de duas grandes vias: a da Agrimensura, no sentido de medição e divisão de terras, e, para isso, podendo-se valer dos instrumentos. A outra via conecta-se à arte, no sentido da técnica, relacionando-se à busca de soluções para problemas mecânicos, pneumáticos e hidrostáticos (SAITO, 2018, p.1).

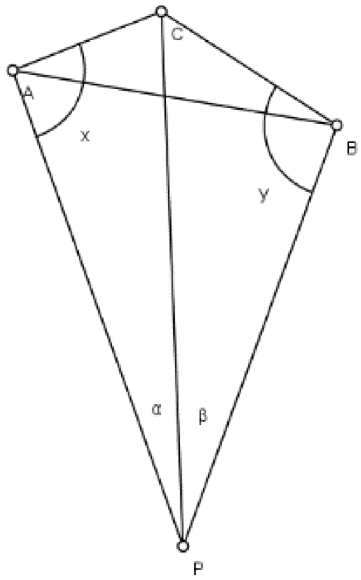
Uma outra concepção da expressão Geometria Prática está associada à História da Educação Matemática:

> O ensino da geometria prática se traduz pela prática de copiar modelos; e às práticas de copiar à mão livre, atreladas à prática de medir com os olhos. Não se teoriza sobre os conceitos geométricos, somente as práticas de um desenho perfeito (manuseio firme, observação detalhada e medida precisa com o olhar) respondem às demandas de ensino a uma prática escolar de desenhar. (SILVA 2021, p. 25-26)

Sendo assim, possuímos duas acepções para uma mesma expressão e, como dissemos antes, no contexto deste trabalho, nos filiaremos à primeira delas. A partir dessas ideias, compreendemos então tratar-se a Geometria Prática como uma espécie de contraponto àquilo que chamaríamos Geometria Teórica, vislumbrada como sendo a Geometria praticada no sentido dos Elementos de Euclides.

Neste trabalho, que é um recorte da parte histórica de Santos (2020), com uma discussão mais ampliada a respeito da Geometria Prática e de algumas reflexões que não foram suficientemente amadurecidas naquele trabalho, apresentaremos uma discussão a respeito de um problema de Geometria prática conhecido como Problema de Resseção, enfatizando as abordagens de Willbord Snell, em 1617, e de Laurent Pothenot, em 1692. O problema consiste em encontrar a posição de um ponto desconhecido P a partir de três outros pontos conhecidos e inacessíveis A, B e C, conforme a Figura 1. Após as abordagens de Snell e Pothenot, este problema passou a ser conhecido como *O Problema de Snell-Pothenot*. Trata-se de um problema de levantamento planar, no qual são dadas as coordenadas dos três pontos A, B e C, e um observador em um ponto desconhecido P, que observa o segmento AC sob um ângulo α e o segmento BC sob um ângulo β.

Figura 1 – Representação Geométrica para o problema de Snell-Pothenot



Fonte: Wikipedia (2020)[3]

Apresentaremos duas soluções para o referido problema: uma, a que chamamos de moderna, de caráter mais analítico, valendo-se de considerações trigonométricas, e outra, que chamamos de clássica, de feição mais geométrica, devida a Pothenot, por inserir-se no contexto das construções geométricas.

Um pouco sobre a vida dos personagens

Willebrord Snell era filho mais velho de Rudolph Snell (1546-1613), professor de Matemática em Leiden, na Holanda, e de Machteld Cornelisdochter. Não se sabe ao certo seu ano de nascimento, já que algumas biografias datam 1591, outras apontam o ano de 1580 ou 1581, mas afirmam que sua data é desconhecida.

> Decerto, não existe registro que comprove o ano de seu nascimento, no entanto a estimativa mais coerente é de 1580 ou 1581, pois pode ser deduzida com um certo grau de certeza a partir de uma carta de seu pai no aniversário de seu filho. (SANTOS, 2020, p.31)

O pai de Willebrord Snell havia ensinado grego, latim, hebraico e artes liberais no início de carreira em uma escola. Era um estudioso da Matemática, não possuindo,

[3] Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/d/d2/SnellPotFigure1.png 14/01/2020.

entretanto, formação específica. Apesar disso, acabou se tornando professor nomeado extraordinariamente de Matemática na Universidade de Leiden em 1581. Uma das principais influências de Rudolph era o trabalho de Peter Ramus, mesmo em desacordo com o que propunham as autoridades universitárias (DE WREEDE, 2010, p.390). Essa influência fica clara quando Rudolph declarou, referindo-se ao Livro X dos Elementos de Euclides, que

> "[...] o conteúdo do Livro X não aparece em nenhum lugar na obra de Arquimedes, Apolônio, Sereno, Teodósio, Menelau, Ptolomeu, Eutocio, Diofanto ou mesmo Euclides fora dos Elementos: Portanto, o Livro X deve ser descartado, pelo menos na educação" (DE WREEDE 2007, p.197)[4].

Rudolph também estudou Medicina e as obras de Aristóteles, e administrava sua própria escola particular. Nesse ambiente de estudo cresceu Willebrord Snell. Aprendeu latim, grego e filosofia com seu pai que, mesmo com o desejo que seu filho estudasse Direito na universidade, percebeu seu gosto pela Matemática, consentindo que estudasse em casa como aluno particular de Ludolph Van Ceulen[5].

Rudolph Snell viajou para vários países da Europa, discutindo, principalmente, temas ligados à Astronomia. E numa dessas viagens foi apresentado, em Praga, a Tycho Brahe, astrônomo dinamarquês que assumiu um papel vital no progresso da ciência. Brahe foi um dos mais destacados astrônomos observacionais antes do surgimento do telescópio. Os instrumentos construídos por ele e relacionados em 1598 na obra *Astronomiae instaurate mechanica* (Renovação da Astronomia Mecânica) são parte fundamental da história da Astronomia dos séculos XVI e XVII (BRAHE, 1602).

Anteriormente, o pai de Snell havia combinado que ele fosse educado em Praga por Brahe, em uma troca com o seu filho, que seria educado em Leiden, mas o acordo nunca aconteceu na prática.

> Snell aprendeu bastante nesse período que o ajudou, mas sua experiência teve fim em 1601 com a morte de Tycho Brahe. Snell também conheceu Johannes Kepler, pois era assistente de Brahe nessa época. Ele voltou para Leiden em 1602 e começou a trabalhar em manuscritos para publicação. Em 1603 foi a Paris continuar seus estudos em Direito, mas também teve muitos contatos com

---

[4] Existem alguns trabalhos que tratam dessa preferência de Rudolph por Ramus; entre eles, destacamos De Wreede (2010).

[5] Matemático alemão, que ficou conhecido por aperfeiçoar o método para calcular do número irracional Pi(π). Calculando em 1596 um valor com 35 casas decimais. Consultado em 15 de janeiro de 2022, em: http://lhldigital.lindahall.org/cdm/ref/collection/math/id/14980.

> matemáticos. Logo depois, desistiu de estudar Direito e passou a maior parte do resto de sua vida em Leiden. (SANTOS, 2020, p.32)

A ligação entre pai e filho estreitou-se ainda mais, por conta do estado saúde do primeiro. Conforme Santos (2020, p. 32)

> Snell passou a ensinar na universidade para ajudá-lo, e por muitos anos trabalhando juntos ensinando Matemática em Leiden. Apenas em 1609 ele foi designado professor das aulas do sábado pela manhã e, em julho de 1610 foi acrescentado ensino diário a tarde. Em 1612 passou a receber pagamento adicional por seu trabalho e lhe foi prometido a cadeira de Matemática logo após a aposentadoria de seu pai.

Nesta fase, Snell publicou traduções, comentários e edições de várias obras de diversos autores, dentre eles, Peter Ramus. A influência de Ramus sobre Snell é claramente vista na troca de correspondências entre pai e filho em 1607:

> Como você me estimulou desde a juventude a aplicar-me verdadeira e plenamente à bolsa de estudos e me estimulou quando hesitei, nada era mais importante para mim do que examinar mais atentamente a exatidão, clareza e brevidade nas provas dos antigos por meios de seus preceitos, como regras e normas, porque seu Apollo [Ramus] insistiu resolutamente em fazê-lo no *Prooemium Mathematicum*[6]. (SNELL, 1607b, apud DE WREEDE, 2007, p. 59)

Após defender teses sobre artes liberais (Gramática, Retórica, Lógica, Aritmética, Geometria, Análise/Álgebra, Física, Ótica, Astronomia, Geografia, Estática e Ética), Snell recebeu o diploma, em 1608, de Master of Arts, da Universidade de Leiden. Em 1613 assume o lugar de seu pai como professor de Matemática nesta Universidade, onde, após anos brigando por reconhecimento, só em 1618 passou a receber um valor adequado para a sua posição. Em 1626, aos 46 anos, Snell faleceu.

Os dados a respeito de Laurent Pothenot são bastante escassos na literatura. Sabe-se apenas que nasceu em 1650 em Chaumont en Bassigny, na diocese de Langres, e que faleceu em Paris em 31 de agosto de 1732, tendo sido enterrado em Saint Ktienue du Moût (SÉDILLOT, 1869, p. 87). Em 1726 foi convidado por Pedro, o Grande, e por Catarina para ir até a Rússia substituir Joseph Nicolas De Lisle, professor real de Matemática. Trabalhou ainda com Jean-Dominic Cassini na elaboração do Grande Meridiano da França (RÜMKER, 1818, p. 257). Trabalhou ainda com Philippe de La Hire, no projeto de nivelamento do Rio Eure. Foi membro da l'Académie Royale des

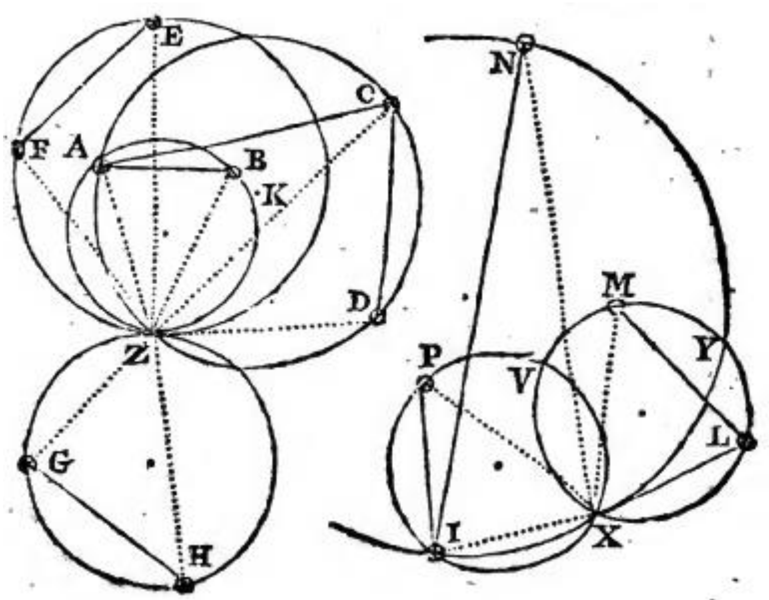
[6] Prooemium mathematicum ad Catharinam Mediceam, reginam, matrem regis La Ramée, Pierre de (1515-1572).

Sciences e professor do Collége Royal, atualmente, Collége de France. No livro de memórias que escreveu para a Academia em 1692, Pothenot explicou:

> Mas há muitos lugares que não têm marcas sensíveis que possam ser vistas à distância; por exemplo, os principais contornos de rios, vales e florestas; a junção de riachos e vales, suas cabeceiras, a situação das pontes e o encontro das rodovias; e assim não é fácil determinar a posição desses lugares, o que é necessário, no entanto, marcar em um mapa. O Sr. Pothenot frequentemente se encontrava nessa dificuldade quando trabalhava por ordem do rei no mapa das proximidades do novo canal do rio Eure [...]. (POTHENOT, 1723, p. 277)

Esse problema ficou conhecido como um dos mais famosos problemas de levantamento de terras e sua solução foi apresentada em um artigo enviado por Pothenot à Academia Francesa, em 1692. Na Figura 2 está uma maneira certa e fácil, segundo o próprio Pothenot, que ele encontrou e que se esforçou para determinar a posição desses pontos por observações feitas imediatamente no mesmo local.

Figura 2 – Construção da solução



Fonte: Imagem extraída de Pothenot (1732, p.277).

O Problema de Ressecção

Em Cartografia, o termo Ressecção pode ser definido como

> [...] a determinação da posição horizontal de uma estação topográfica por direções observadas, partindo da estação para os pontos de posições

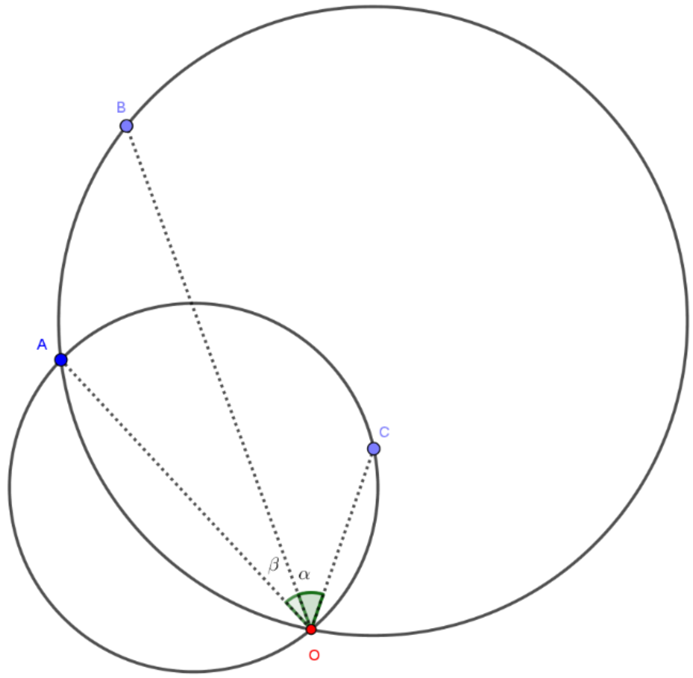
> conhecidas. Igualmente, a linha traçada através da situação determinada duma estação para a estação ocupada (OLIVEIRA, 1983, p.489).

Nesse sentido, o Problema de Snell-Pothenot pode ser classificado como um Problema de Ressecção, pois baseia-se na determinação da posição do ponto P a partir das medidas dos ângulos α e β, mostrados na Figura 1.

Entre as inúmeras contribuições de Snell, podemos destacar a publicação, em 1617, do *Eratóstenes Batavus*, que contém métodos para medir distâncias sobre a superfície da Terra. Ele propôs o método da triangulação e este trabalho é o fundamento da Geodésia. Em conexão com esse trabalho, Snell solucionou um Problema de Ressecção, que, do ponto de vista da Geometria, consiste em um problema de construção em que são dados três pontos conhecidos A, B e C, e os ângulos $A\hat{O}C = \propto$ e $A\hat{O}B = \beta$ a partir de um ponto desconhecido O. O problema é então determinar $\overline{AO}, \overline{OB}$ e $\overline{OC}$, conforme a Figura 3.

> Snellius resolveu um problema geométrico, o que lhe deu alguma fama duradoura. Chama-se o Problema da Ressecção. Snellius teve de determinar a distância da sua casa a três pontos em Leiden (duas igrejas, a Pieterskerk e Hooglandse Kerk, e a Câmara Municipal), cujas posições mútuas foram conhecidas. (DE WREEDE, 2007, p. 127)

Figura 3 – Problema de Ressecção



Fonte: Construída pelos autores

Em seu livro, Snell primeiro deu uma ideia geral da solução argumentando que o ponto O está na interseção de dois círculos dados, sendo que um está desenhado no arco capaz de AB com ângulo inscrito β, e o outro no arco capaz de AC com ângulo inscrito α. Em seguida, Snell deu uma construção geométrica exata do ponto O, construindo esses dois círculos.

Outros matemáticos resolveram este e outros problemas semelhantes de forma independente, como no caso dos trabalhos de Hiparco e Ptolomeu, fato este que poderia ser de conhecimento de Snell (DE WREEDE, 2007, p. 129). Entretanto, nada garante que ele possa ter pensado nisso quando trabalhava no Problema. Em 1692, tivemos uma outra contribuição importante feita por Laurent Pothenot. Erradamente foi considerado que ele tivesse resolvido o problema pela primeira vez, o que ocasionou que, por muito tempo, o problema ficasse conhecido como “Problema Pothenot". O problema teve bastante destaque em virtude da sua presença em diversas situações práticas, como, por exemplo, em Geodésia, Hidrologia e Navegação (RÜMKER, 1818, p. 257-258).

Soluções para o Problema de Snell-Pothenot

Apresentaremos duas soluções para o Problema de Snell-Pothenot, sendo que uma delas possui um caráter mais analítico e trigonométrico e, por isso mesmo, denominada moderna, ao passo que a segunda, por se basear em uma construção geométrica, será denominada clássica. Iniciaremos com a trigonométrica, que é uma solução necessária quando a precisão é importante.

Solução Moderna (Trigonométrica)

Esse tipo de solução é baseado na seguinte propriedade conhecida como Tangente Senoidal (Sine Tangent Theorem), que denominaremos apenas por Propriedade TS:

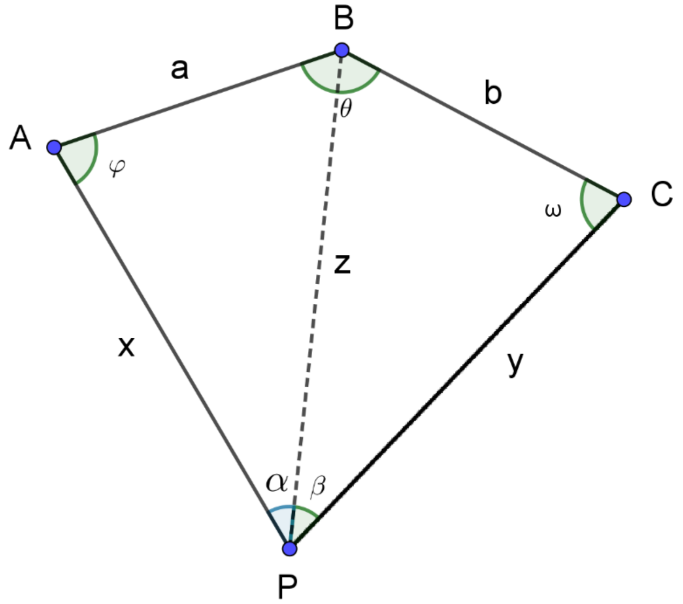
$$\text{Se } \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{m}{n}, \text{ então } \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{m-n}{m+n}$$

Por questões de espaço, não efetuaremos a demonstração dessa propriedade, mas indicamos Dörrie (1965, p. 194) para uma demonstração, bem como sua utilização em outros problemas de Geometria Prática. Fazendo uso desse resultado, podemos resolver o seguinte:

Problema: Suponhamos conhecidos os elementos $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $A\hat{B}C = \theta$, $A\hat{P}B = \alpha$ e $B\hat{P}C = \beta$, encontrar os elementos $\overline{AP} = x$, $\overline{CP} = y$, $\overline{BP} = z$, $B\hat{A}P = \varphi$ e $B\hat{C}P = \omega$.

É importante notarmos que o problema assim proposto é equivalente ao problema de Snell-Pothenot, com a diferença se dando na forma em que os dados foram apresentados.

Figura 4 – Representação geométrica do problema



Fonte: Construída pelos autores

Para solucionarmos o problema enunciado, iniciamos aplicando a Lei dos Senos aos triângulos ABP e BCP. Feito isso, obteremos:

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\omega} = \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a\operatorname{sen}\beta}$$

O que nos permite determinar o ângulo auxiliar δ, cuja tangente é $(b \operatorname{sen}\ \alpha)/(a \operatorname{sen}\ \beta)$. Usando a Propriedade TS, obtemos:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi-\omega}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi+\omega}{2}\right)} = \frac{b\operatorname{sen}\alpha - a\operatorname{sen}\beta}{b\operatorname{sen}\alpha + a\operatorname{sen}\beta}$$

Donde após algumas manipulações, ficamos com:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi-\omega}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi+\omega}{2}\right).\operatorname{tg}\left(\delta-\frac{\pi}{4}\right)$$

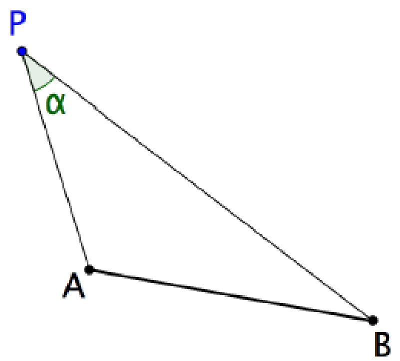
Por outro lado, como $ABCD$ mostrado na Figura 4 é um quadrilátero, temos que $\varphi + \omega = 2\pi - (\alpha + \beta + \theta)$. Com isso, obtemos $\left(\frac{\varphi-\omega}{2}\right)$. Portanto, conhecidos $\left(\frac{\varphi-\omega}{2}\right)$ e $(\varphi + \omega)$, basta agora resolver um sistema e encontrarmos os valores de φ e ω. A partir disso, as incógnitas x, y e z são obtidas aplicando a Lei dos Senos, conforme Santos (2020, p. 40). Caso as coordenadas de A: (x_A, y_A), B: (x_B, y_B) e C: (x_C, y_C) sejam conhecidas em algum sistema de coordenadas cartesianas apropriado, a posição de P poderá ser determinada.

Solução Clássica (Solução de Pothenot)

Essa solução foi apresentada por Laurent Pothenot em seu artigo enviado à Academia Francesa, em 1692. É uma solução pautada em construções geométricas, e, segundo ele, uma maneira fácil e certa de solucionar o problema de levantamento de terras. A ideia matemática que permeia a solução é a de Arco Capaz de um segmento que se vincula ao problema pelo fato de que ela

> [...] está ligada ao conceito "ângulo de visão". Dados um segmento $\overline{AB}$ e um ponto P, medimos o ângulo $\widehat{APB} = \alpha$. Esse é o ângulo de visão do segmento AB a partir do ponto P . Dizemos que o P ponto "vê" o segmento segundo um ângulo α . (WAGNER, 2020, p.4)

Figura 5 – Ângulo de visualização de um segmento



Fonte: Retirada de Wagner (2020, p.4)

Na Figura 5 podemos perceber a inter-relação entre a ideia de Arco Capaz e o Problema de Snell-Pothenot. A definição proposta por Wagner (2020, p.4) ampara-se justamente na perspectiva por ele sugerida na citação anterior, qual seja:

> Imagine agora que o ponto P esteja sempre em um mesmo semiplano determinado pela reta AB e que, dado o ângulo α , consideremos o conjunto de todas as posições de P tais que $\widehat{APB} = \alpha$. Esse conjunto de pontos é chamado de lugar geométrico do ângulo construído sobre o segmento. Dizemos ainda que todo ponto desse lugar geométrico é capaz de ver o segmento sob ângulo α. (WAGNER, 2020, p.4).

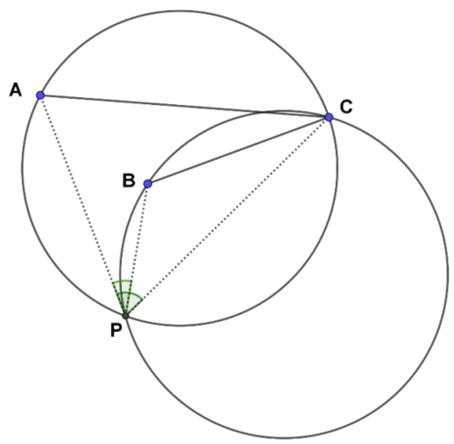
A solução desse problema como visto anteriormente, estava voltada para construção do mapa das proximidades do novo canal do Rio Eure, na França, que tinha como uma das maiores dificuldades o difícil acesso a algumas regiões. Assim sendo, o problema a ser resolvido é o seguinte:

Problema: Determinar a localização de um ponto inacessível P, tomados no mapa os pontos A, B e C, cujas distâncias $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e os ângulos $A\hat{P}C$ e $A\hat{P}B$ são conhecidos.

De fato, conhecidos os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, devem-se construir os arcos capazes dos ângulos $A\hat{P}C$ e $A\hat{P}B$. A intersecção das circunferências que contém esses arcos fornecerá o ponto que estamos procurando.

Importante ressaltar que é sempre mais apropriado escolher segmentos de reta com ponto em comum, como na Figura 6, em que temos o ponto C com essa característica. É verdade que podemos utilizar um quarto ponto D, e a partir dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, que não têm nenhuma de suas extremidades em comum, o ponto P também será determinado, mas isso só poderá ocorrer de três maneiras:

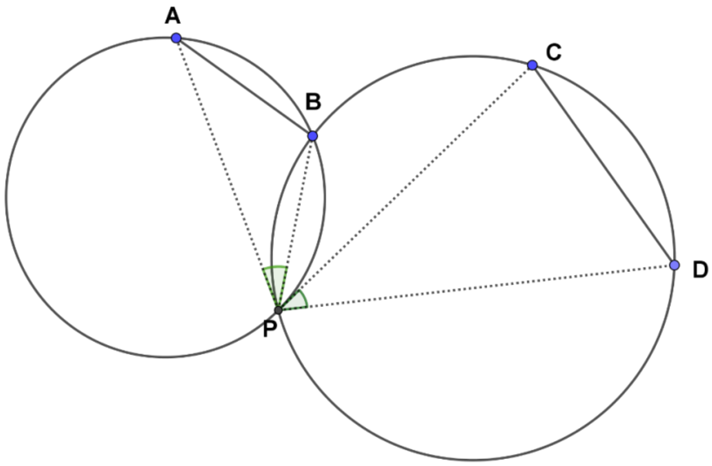
Figura 6 – Representação geométrica de uma solução pelo método de Pothenot



Fonte: Construída pelos autores

Primeira, considerando os quatros pontos A, B, C e D, três pertencem à mesma circunferência; sendo assim, o ponto P será determinado, porque as duas circunferências se intersectam em dois pontos, um dos quais é B, já dado; sendo assim, o outro será o ponto procurado P.

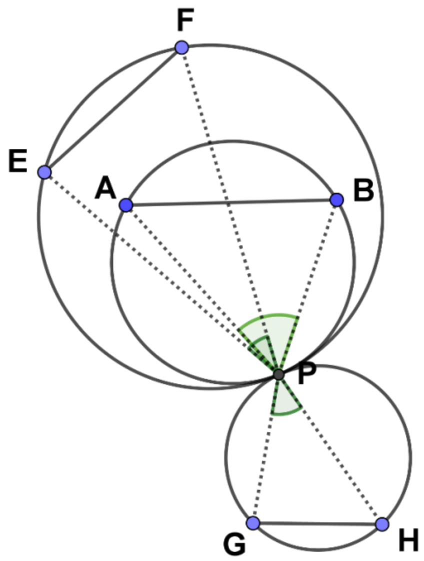
Figura 7 – Representação geométrica da primeira solução pelo método de Pothenot



Fonte: Construída pelos autores

Segunda, para encontrar o mesmo ponto P, podemos tomar os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ ou $\overline{GH}$ e, construídos os arcos capazes de $A\hat{P}B$, $E\hat{P}F$ ou $G\hat{P}H$, de sorte que as circunferências que contêm os arcos se intersectaram no ponto P. Mas este caso é raro.

Figura 8 – Representação geométrica da segunda solução pelo método de Pothenot

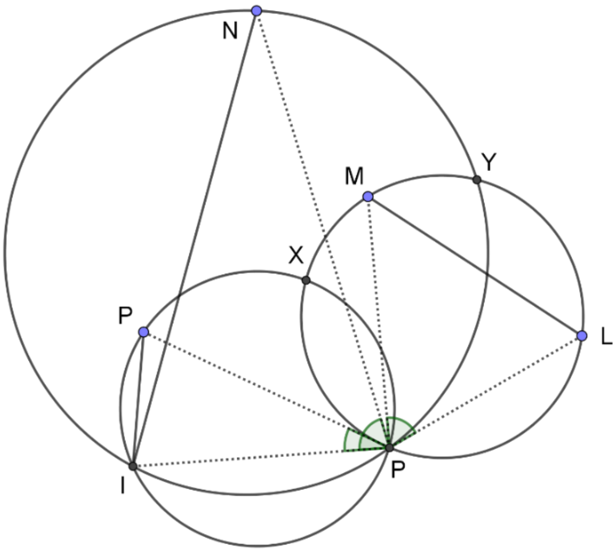


Fonte: Construída pelos autores

Terceira, podemos escolher os segmentos $\overline{LM}$ e $\overline{NI}$ e construir os arcos capazes $L\hat{P}M$ e $N\hat{P}I$; eles não serão suficientes para determinar apenas o ponto P, pois as circunferências também se intersectaram no ponto Y. No entanto, este ponto não pode satisfazer o problema, porque não pertence aos arcos capazes dos ângulos.

Mas, se tomarmos os segmentos $\overline{LM}$ e $\overline{HI}$ e construindo os arcos capazes $L\hat{P}M$ e $H\hat{P}I$, encontraremos dois pontos de intersecção X e P que satisfariam as condições dos ângulos; sendo assim, o ponto P seria indeterminado.

Figura 9 – Representação geométrica do caso indeterminado



Fonte: Construída pelos autores

No entanto, Pothenot relata que é fácil evitar esses inconvenientes, pois as escolhas dos pontos conhecidos na construção do mapa podem ser feitas de forma adequada. E finaliza sua demonstração dando uma orientação sobre a escolha dos pontos A, B e C: que o ponto do meio, como o B, deve estar acima da linha do segmento $\overline{AC}$. Caso esteja abaixo dessa linha, deve estar mais distante do ponto P, do que do segmento $\overline{AC}$.

A indeterminação de P acontece quando os três pontos A, B e C estão localizados na mesma circunferência, pois teremos infinitas soluções, já que qualquer ponto sobre ela verá os mesmos ângulos α e β que os do ponto P. A circunferência através do ABC é conhecida como _"Circunferência Perigosa"_, e as observações feitas nessa circunferência devem ser evitadas quanto à utilização desse método.

Considerações Finais

O presente artigo pretendeu apresentar um problema de Geometria Prática com caráter historicamente relevante. Pelo fato das duas soluções apresentadas possuírem abordagens diferentes, acreditamos em seu potencial com vistas à utilização em sala de aula nas duas direções apontadas por elas, tentando levar a cabo um diálogo entre História da Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). Numa das direções, que está associada à solução analítica, tencionamos trabalhar com planilhas eletrônicas, como o fizeram Sousa e Alves (2016), buscando fazer simulações com os dados e possíveis resultados. No caso da solução geométrica, apostamos no aparato da Geometria Dinâmica, como o fizeram Muñoz (2011), Silva (2014) e Brugnera e Dynnikov (2020), a fim trabalharmos com a ideia de lugares geométricos. Em ambas as perspectivas, teremos em conta o subsídio teórico fornecido por autores que apostam nesta perspectiva de diálogo, como Sousa e Costa (2017) e Sousa (2020). Pretendemos no futuro explorar mais e melhor essas vertentes, tendo em conta a riqueza de situações dentro da sala de aula que elas podem nos oferecer.

Referências

BRAHE, Tycho**. Astronomiae instauratae mechanica**. Nuremberg: Levinus Hulsius, 1602.

BRUGNERA, Elisangela Dias; DYNNIKOV, Circe Mari da Silva. GeoGebra, História da Matemática e Geometria Analítica. **REAMEC-Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, v. 8, n. 3, p. 153-172, 2020. Disponível em: <https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/10622/7526>. Acesso em: 15 jan. 2022.

DÖRRIE, Heinrich. **100 great problems in Mathematics:** Their history and solutions. New York: Dover, 1965.

DE WREEDE, Liesbeth Cornelia. **Willebrord Snell (1580-1626):** a humanist reshaping the mathematical sciences. Utrecht: Utrecht University, 2007.

______. A dialogue on the use of arithmetic in geometry: Van Ceulen’s and Snellius’s Fundamenta Arithmetica et Geometrica. **Historia Mathematica** v. 37, 2010.

MORAES, Erica Siane. **Herodoto e o Egito:** tradição e comentario do livro II das Histórias. 1999. 233 p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Estudos da Linguagem, Campinas, SP. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/268983>. Acesso em: 03 ago. 2021.

MUÑOZ, José Manuel Sánchez. Visualización de lugares geométricos mediante el uso de Software de Geometría Dinámica GeoGebra. **Pensamiento matemático**, n. 1, p. 1-20, 2011.Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3744260.pdf>. Acesso em: 15 jan.2022.

OLIVEIRA, Cêurio de. **Dicionário cartográfico I**. 3. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 1983.

POTHENOT, Monsieur. Trouver la position d'un lieu que l'en ne peut voir des principaux points d'oú l'on observe. In: **Mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de l'Académie royale des sciences Année 1692** . Paris: A. Amsterdam, 1723. p. 276-280.

ROUSE BALL, W.W. R. **A short account of the history of mahematics**. New York: Dover, 1960.

RÜMKER, Karl Ludwig Christian. Carta de 10 de agosto de 1818, In: DE ZACH, Baron, **Correspondance astronomique, hydrographique et statistique,.** vol. I. Paris: A.V. Ponthenier, 1818, p. 257-259.

SAITO, Fumikazu. Algumas breves considerações sobre os tratados de geometria prática publicados no contexto do 'saber-fazer' matemático quinhentista. In: **Anais do XII Seminário Nacional de História da Matemática**. São Paulo: SBHMat, 2018, p. 271-277.

SANTOS, Leonardo David Marques dos. **O Problema de Snell-Pothenot:** uma proposta de integração de história da Matemática, construção geométrica e tecnologias de informação e comunicação. 2020.63p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba - Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede (PROFMAT), João Pessoa, PB. Disponível em: < https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/18515/1/LeonardoDavidMarquesDosSantos_Dissert.pdf>. Acesso em: 15 jan.2022.

SÉDILLOT, Louis Amélie, **Les professeurs de mathématiques et de physique générale au collège de France**, Rome, Imprimerie des sciences mathématiques et physiques, 1869.

SILVA, Maria Celia Leme da. **Histórias do ensino de geometria nos anos iniciais e seus parceiros:** desenho, trabalhos manuais e medidas. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2021.

SILVA, Maria Deusa Ferreira. Resignificando o Teorema de Pitágoras com o uso do GeoGebra: uma articulação entre a história da matemática e o uso dos recursos computacionais. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo.** v. 3, n. 1, p. 35-46, 2014.

SOUSA, Giselle Costa de; ALVES, Juliana Maria Schivani. A regressão linear de Galton: atividades históricas para função afim e estatística básica usando planilhas eletrônicas. **Conexões-Ciência e Tecnologia**, v. 9, n. 4, p. 26-36, 2016.

SOUSA, Giselle Costa de. REFLEXÕES SOBRE ALIANÇA ENTRE HM, TDIC E IM. In: (Org.). **Aliança entre história da matemática e tecnologias via investigação matemática.** 1ed. São Paulo: Livraria Da Física, 2020, v. 1, p. 17-61.

SOUSA, Giselle Costa de; COSTA, A. E. . Investigando A Conjunção Entre História Da Matemática E Tecnologias De Informação E Comunicação, Por Meio De Um Levantamento Bibliográfico Em Eventos Internacionais De Educação Matemática. **Boletim Cearense De Educação E História Da Matemática**, v. 4, p. 6-21, 2017.

WAGNER, Eduardo.**Lugares Geométricos I**. Rio de Janeiro. IMPA. 2020. Disponível em:<https://impa.br/wp-content/uploads/2020/01/PAPMEM_JAN_2020_LG1-Papmem.pdf>. Acesso em 15.jan.2022.

Recebido em: 08 / 10 / 2021
Aprovado em: 20 / 01 / 2022