



**O MÉTODO DE REDUÇÃO AO ABSURDO NO LIVRO I DO
ELEMENTOS DE EUCLIDES
METHOD OF REDUCTIO AD ABSURDUM IN BOOK I OF EUCLID'S
ELEMENTS**

João Paulo Carneiro Barbosa¹

Universidade de Pernambuco - UPE

Mateus de Souza Galvão²

Universidade de Pernambuco - UPE

Leilane Araújo dos Santos³

Universidade de Pernambuco - UPE

Resumo

Historicamente o método de redução ao absurdo, também conhecido como mecanismo indireto de demonstração ou negação, aparece na matemática como uma das ferramentas de grande poder para o desenvolvimento e fortalecimento desta ciência. Mesmo sem ter sua origem bem definida e em meio às críticas, de escritores da antiguidade até a atualidade, a técnica de redução ao absurdo foi e ainda permanece sendo aplicada no trabalho de diversos matemáticos e, principalmente na obra de inestimável valor para a matemática de todos os tempos, o *Elementos* de Euclides. Esta valorosa obra, composta por treze volumes, destinada principalmente ao estudo de geometria elementar, exerceu e continua a exercer vasta influência no conhecimento científico e apresenta pela primeira vez o método revolucionário na história da matemática, que é o método dedutivo e axiomático, responsável por caracterizar a matemática até mesmo nos dias de hoje. E é sobre esta obra que nos inclinaremos à procura das proposições do livro I nas quais Euclides aplica o método indireto de demonstração, com o intuito de descrever algumas delas, em linguagem atual, e identificar as demais. Caracterizando assim o objetivo deste trabalho, que servirá de base posteriormente para o desenvolvimento de outro, que é o de catalogar as proposições nas quais Euclides emprega em sua obra o raciocínio indireto de demonstração, isto é, identificar relações entre as proposições que são marcadas por este método. Para alcançar os objetivos aqui mencionados, utilizou-se a pesquisa de caráter bibliográfico, em que foram consultados livros e artigos publicados que abordem o assunto em questão.

Palavras-chave: demonstração; redução ao absurdo; *Elementos* de Euclides; livro I.

Abstract

¹ joao.barbosa@upe.br.

² matheusgalvao@hotmail.com.

³ leilane_leila10@hotmail.com.



Historically the *reductio ad absurdum* method, also known as indirect mechanism of demonstration or denial, appears in mathematics as one of the great power tools for the development and strengthening of this science. Even without having a well-defined source and amid criticism from older writers to the present, the absurd to the reduction technique was and is still being applied in the work of several mathematicians and, especially in the work of inestimable value to the mathematics of all time, the elements of Euclid. This valorous work, consisting of thirteen volumes, destined mainly to the study of elementary geometry, exerted and continues to exert vast influence on scientific knowledge and presents for the first time the revolutionary method in the history of mathematics, which is the deductive method and axiomatic, responsible for characterizing the math even today. And it is on this work that we will tilt us looking for the propositions of the book I in which Euclid applies the indirect method of demonstration, in order to describe some of them, in current language, and identify the others. Featuring so the aim of this work, which will serve as a basis for the later development of another, which is to catalog the propositions in which Euclid employs in his work the indirect reasoning, that is, to identify relationships between propositions that are marked by this method. To achieve the objectives mentioned here, we used the research of bibliographic character, where were queried.

Keywords: demonstration; *reductio ad absurdum*; Euclid's elements; book I.

Introdução

Sabemos que em matemática, quando necessitamos firmar a validade de determinado argumento, devemos recorrer a algum método que nos possibilite tal efeito. Dentre as diferentes formas de comprovação, o método de redução ao absurdo, também conhecido como método de demonstração indireta ou negação, configura-se como uma das ferramentas mais poderosas da matemática quando se trata de demonstração.

Diferentemente do método de demonstração direta, ou “redução ostensiva”, que se inicia assumindo a hipótese como verdadeira, fazendo-se uma sequência de passos lógicos dedutivos e, por conseguinte, chegando diretamente à tese, o método de redução ao absurdo consiste inicialmente em admitir como verdadeira a negação de determinada afirmação e continuando-se o processo de demonstração observa-se, como consequência, o surgimento de uma contradição, o que torna a negação da hipótese inicial um absurdo.

Uma boa maneira de perceber a importância de um método demonstrativo é vê-lo sendo utilizado nas mais importantes obras de matemática da história. No caso da redução ao absurdo, o *Elementos* de Euclides (325 – 265 AEC) é um dos muitos textos em que este método demonstrativo é utilizado. Textos como os de Eves (2004, p. 170) comprovam isso



Na proposição I 6 estabelece a recíproca da proposição I 5 [...] É nessa proposição dos *Elementos* que se usa pela primeira vez no texto o método de demonstração indireta ou de *reductio ad absurdum*. Posteriormente ele é empregado com frequência por Euclides.

Pela grande relevância desta obra para a matemática, o fato da presença da demonstração indireta se configura como ilustração para o valor deste método para a matemática.

De posse da informação de que Euclides utiliza a redução ao absurdo e debruçando-se sobre as 48 proposições do livro I, uma pergunta foi natural: quais são as proposições, no livro I do *Elementos*, em que Euclides faz uso da redução ao absurdo? Sendo sua obra de inestimável valor para a matemática faz-se importante dissecá-la à procura das proposições em que ele emprega o método de redução ao absurdo, intuindo num trabalho ulterior catalogar em que tipo de proposição ele utiliza tal método, ou seja, buscar relações entre as proposições que apresentam o mecanismo indireto de comprovação.

No presente trabalho, o principal objetivo foi identificar as proposições em que a redução ao absurdo está sendo utilizada. Além de identificar pretendeu-se apresentar, em linguagem atual, algumas das proposições. Para atingir o objetivo mencionado anteriormente utilizou-se a pesquisa de caráter bibliográfico. Foram consultados livros e artigos publicados que abordem o assunto em questão.

Redução ao absurdo

A história de como surgiu o método de demonstração por redução ao absurdo, assim como outros temas que se originam numa época remota da antiguidade, está permeado de algumas inconsistências. Garbi (2009) sugere que essa ideia tenha surgido na época dos pré-platônicos, ou seja, por volta dos séculos VI e V AEC e indica Hipasus de Metaponto, pitagórico que viveu aproximadamente em 470 AEC, como um dos possíveis nomes a ter utilizado o método para demonstrar a existência das grandezas incomensuráveis.

Diferentemente de Garbi que indica um período, Escher apud Valente (2007) indica um nome: Zenão de Eléia (488–430 AEC). Este teria introduzido o absurdo aparente como princípio de raciocínio filosófico; ele é considerado o criador da dialética, isto é, da lógica entendida como redução ao absurdo. Os paradoxos de Zenão e as provas matemáticas de impossibilidade do movimento são hoje de conhecimento da



sociedade contemporânea. Nesse sentido, Dinucci (2008) corrobora com Valente ao afirmar que Aristóteles (384 - 322 AEC) é quem teria creditado a invenção do método indireto a Zenão.

Ainda que desde seu início o método tenha sido bastante utilizado, o mesmo não ficou livre de críticas ou depreciações. Aristóteles (1987, p.81), em *Segundo Analíticos*, versa da seguinte maneira sobre a redução ao absurdo: “Como a demonstração afirmativa é superior a demonstração negativa, torna-se evidente que é também superior a demonstração por redução ao absurdo”. Aristóteles utiliza o termo “superior” no sentido de melhor demonstração, que para ele seria a que nos oferece um melhor conhecimento. Já Garbi (2009) diz que tal método é uma espécie de último recurso ao qual se apela quando falham todas as formas diretas de demonstração de uma verdade. Por fim, para Ottoni apud Valente (2007)

Dos diversos métodos de demonstração com que S. Ex. mais simpatiza é o de demonstrar por absurdo; e o uso que faz dele é tão extenso e quase exclusivo, que se torna em abuso (...). A demonstração por absurdo é pouco analítica, menos convincente que as outras, e por isso menos própria para o ensino. É pouco analítica porque, segundo ela, o geômetra não procede por caminho direto, de dedução em dedução, das verdades conhecidas para as desconhecidas. É menos do que as outras convincente, e própria para o ensino; porque exige que o leitor abranja com o pensamento o todo da demonstração, e requer às vezes não pequena tensão de espírito para bem compreender-se a relação necessária entre a hipótese feita e o absurdo ou contradição que resultou, relação frequentemente complicada e composta. (p. 139)

Mesmo Aristóteles atacando severamente o método indireto, ao dizer que o mesmo é inferior ao mecanismo de demonstração direta, ele não se furta em utilizá-lo até mesmo para apresentar uma explicação do que seria uma demonstração por absurdo.

Embora sofrendo algumas depreciações, o método de demonstração indireta está presente na obra de grandes matemáticos. A exemplo, Arquimedes de Siracusa (287-212 AEC) que segundo Bassalo (1996), teria utilizado o argumento de redução ao absurdo para demonstrar importantes teoremas e proposições, que foram muito importantes na realização de seus cálculos. Outro matemático que utilizou, de acordo com Coxe (2013) foi Evangelista Torricelli (1608 -1648), que teria sido cuidadoso em usar argumentos de redução ao absurdo para provar quadraturas que obteve por indivisíveis.

Outro matemático que, segundo Juliani (2008), teria utilizado o método seria o monge italiano Girolamo Saccheri (1667 – 1733). “O mesmo teria obtido um dos



primeiros resultados de geometrias não euclidianas, embora não tivesse percebido, utilizando o método de redução ao absurdo”. E como já mencionado, o método indireto de demonstração também está presente na grande obra de Euclides, o *Elementos*. Façamos algumas considerações sobre essa obra.

O *Elementos* de Euclides

O *Elementos* de Euclides foi e continua sendo usado e estudado, exercendo provavelmente, uma das maiores influências no pensamento científico. O objetivo⁴ de Euclides ao escrever a obra parece ser consensual: teria sido reunir em 13 volumes, organizado em uma sequência lógica, material didático para o ensino de geometria elementar. É fato que a maior parte do trabalho de Euclides provinha de compilações de trabalhos anteriores. Para Eves (2004, p. 169)

Não há dúvida de que Euclides teve que dar muitas demonstrações e aperfeiçoar outras tantas, mas o grande mérito do seu trabalho reside na seleção feliz de proposições e no seu arranjo feliz numa sequência lógica, presumivelmente a partir de umas poucas suposições iniciais.

A obra de Euclides foi a primeira a utilizar minuciosamente o sistema dedutivo e axiomático, que teria sido idealizado por Aristóteles. Segundo Eves (2004, p. 132) Aristóteles foi “o sistematizador da lógica dedutiva, além de ter deixado vários escritos sobre temas da física, algumas partes de sua *Analytica Posteriora* revelam um domínio raro do método axiomático”.

Em tal sistema apresentam-se inicialmente definições, postulados e noções comuns. As definições consistem em uma espécie de abreviação que caracteriza o objeto matemático, sendo necessárias às demonstrações e aparecem na maioria dos volumes da obra. Já os postulados enunciam o que se pode fazer por meios geométricos, tendo em vista que “postular” significa “pedir para aceitar” e, diferentemente das definições, eles só aparecem no primeiro volume da obra. As noções comuns, denominadas comumente de axiomas, diferentemente dos postulados, tratam de questões de caráter geral e não específicas da matemática, são verdades evidentes e que são responsáveis por estruturar todo sistema dedutivo e axiomático. Assim como os postulados, as noções comuns também só estão presentes no livro I do *Elementos*.

⁴ Segundo Proclo apud Ávila (2003) existe outro objetivo para Euclides escrever sua obra: seria expor toda a geometria necessária para chegar às demonstrações do se último volume.



É a partir das definições, postulados e noções comuns que Euclides desenvolve as proposições presentes no decorrer de toda sua obra que, com os seus treze volumes, está organizado da seguinte maneira: no livro I, inicia-se com as definições, os postulados e as noções comuns. Neste capítulo, há 48 proposições, dividindo-se entre propriedades do triângulo, teoria das paralelas e relação das áreas de paralelogramos, quadrados e triângulos. No segundo volume encontram-se quatorze proposições que lidam com transformações de áreas e com a “álgebra geométrica”. O livro III é composto por trinta e nove proposições, no qual estão incluídos muitos dos teoremas familiares sobre círculos, cordas, secantes, tangentes e medidas de ângulos. O livro IV possui dezesseis proposições, em que se discute a construção, por meio da régua e compasso de três, quatro, cinco, seis e quinze lados, também a inscrição e circunscrição desses polígonos num círculo dado.

O quinto volume contém a exposição da teoria das proporções de Eudoxo e o livro VI destina-se a aplicação dessa teoria na geometria plana e também contém os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos; construções de terceiras, quartas e médias proporcionais e resolução geométrica de equações quadráticas. Os três volumes subsequentes, VII, VIII e IX contém um total de cento e duas proposições e tratam da teoria elementar dos números. Já o décimo livro com suas cento e quinze proposições é o mais extenso dos volumes da obra, destinado às grandezas incomensuráveis. Por fim, os três últimos livros, XI, XII e XIII tratam de geometria sólida.

Com seus treze volumes, o *Elementos* dominou o ensino da geometria por mais de dois milênios, e para Brito (1995) eles

Foram de suma importância para o desenvolvimento posterior da matemática, uma vez que neles está organizado todo o conhecimento matemático de uma época, com exceção dos estudos sobre seções cônicas e da geometria esférica. (p.34).

Como já mencionado, de todos os livros da obra de Euclides, nos deteremos ao primeiro de seus volumes, do qual apresentaremos em linguagem atual algumas das proposições que utilizam o método de redução ao absurdo. No livro I estão presentes os postulados, noções comuns e definições, que caracterizam a obra de Euclides. Façamos algumas asserções mais específicas a respeito do primeiro volume.

Método de redução ao absurdo no livro I do *Elementos*



O primeiro volume do *Elementos* inicia-se com vinte e três definições, cinco postulados e nove noções comuns. Tanto as definições, postulados e noções comuns serão aqui mencionados no decorrer das demonstrações, como também as proposições à qual Euclides recorre. Entre as 48 proposições analisadas do primeiro volume da obra, constatou-se que existem nove em que Euclides utiliza o método de redução ao absurdo, a saber: 6, 7, 19, 25, 26, 27, 29, 39 e 40. Para efeito deste trabalho, descreveremos quatro entre elas, que serão escolhidas pelo fato de que, possivelmente, elas apareçam com maior frequência na educação básica e até mesmo em outros níveis subsequentes de educação.

Observemos a demonstração da proposição 6, a primeira em que Euclides recorre ao método de redução ao absurdo e também as demonstrações das proposições 19, 25 e 27:

PROPOSIÇÃO 6 - *Caso os dois ângulos de um triângulo sejam iguais entre si, também os lados que se estendem sob os ângulos iguais serão iguais entre si.*

Nessa proposição, sabe-se que os ângulos da base do triângulo ABC são iguais, isto é, o ângulo ABC é igual ao ângulo ACB, e deseja-se provar que os lados AB e AC serão congruentes.

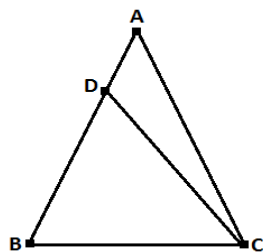


Figura 1 - Proposição 6

De início, supomos que os lados AB e AC sejam diferentes, ou seja, $AB > AC$ ou $AB < AC$. Tomemos então $AB > AC$ e subtraímos de AB uma DB congruente a AC (proposição 2). E então, liguemos DC (postulado 1). Como, de fato, $DB \equiv AC$ e BC comum aos triângulos ABC e DBC, também os ângulos DBC e ACB são iguais, portanto os triângulos ABC e DBC serão congruentes (proposição 4), o que é um absurdo, pois o triângulo ABC é maior que o triângulo DBC. Então, se os lados AB e AC não podem ser diferentes terão que ser congruentes, o que era preciso provar.



PROPOSIÇÃO 19 - *O maior lado de todo triângulo é subentendido pelo maior ângulo.*

Tomemos, portanto o triângulo ABC, no qual o ângulo ABC é maior que o BCA, temos que mostrar então que o lado AC será maior que o AB.

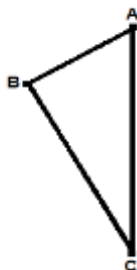


Figura 2 - proposição 19

Supomos que AC seja menor ou igual à AB. Se AC for igual a AB, o ângulo sob ABC será igual ao ACB (proposição 5), portanto, igual não pode ser. Por outro lado, se AC for menor que AB, o ângulo sob ACB se tornaria maior que o sob ABC (proposição 18), o que é absurdo, pois pela hipótese o ângulo ABC é maior BCA. Então, o maior lado de todo triângulo subentende o maior ângulo, o que era preciso provar.

PROPOSIÇÃO 25 – *Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais aos dois lados, cada um a cada um, mas tenham a base maior do que a base, também terão o ângulo maior do que o ângulo, o contido pelas retas iguais.*

Tomando dois triângulos ABC e DEF, e sabendo que os lados AB e DE são iguais, e também os lados AC igual ao DF, com a base BC sendo maior que a EF, queremos provar que o ângulo BAC será maior que o EDF.

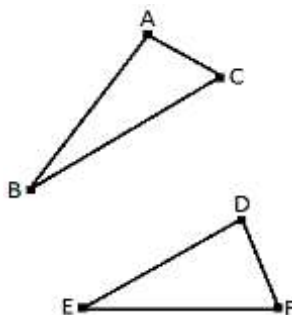


Figura 3 - Proposição 25



Supondo que o ângulo BAC não seja maior que o EDF, ou seja, ele será igual ou menor. De fato, o ângulo BAC não poderá ser igual ao EDF, pois a base BC seria igual à base EF (proposição 4) o que contrariaria a hipótese inicial. Por outro lado, também o ângulo BAC não poderá ser menor que o EDF, pois a base BC seria menor que a EF (proposição 24) e não é pela hipótese. Como os ângulos BAC e EDF não poderão ser iguais nem o ângulo BAC menor que EDF, teremos que o ângulo BAC só poderá ser maior que o EDF, o que era preciso provar.

PROPOSIÇÃO 27 - *Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos alternos iguais entre si, às retas serão paralelas entre si.*

Nesta proposição, queremos mostrar que se uma reta EF cair sobre duas retas AB e CD e formar os ângulos alternos AEF e EDF iguais, então as retas AB e CD serão paralelas.

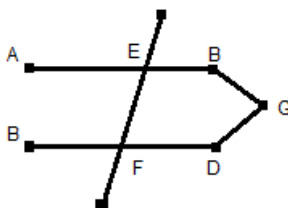


Figura 3 - Proposição 27

Supomos que as retas AB e CD não sejam paralelas, neste caso se as prolongarmos ou elas se encontrarão no lado B, D ou no lado A, C (postulado 2). Supondo que elas se encontrem no lado B, D, em um ponto G. Temos que o ângulo AEF, exterior ao triângulo GEF, será igual ao ângulo EFG, interior e oposto, o que é impossível (proposição 16), logo as retas AB e AC não poderão se encontrar quando prolongadas no lado B, D nem no lado A, C, podendo ser provado de forma análoga. Portanto, temos que as retas AB e AC serão paralelas (definição 23), o que era preciso provar.

4. Considerações finais

Na história da matemática, as demonstrações se caracterizam como a grande ferramenta no desenvolvimento desta ciência. Assim como todos os outros métodos de



demonstração, o mecanismo de redução ao absurdo possibilita que a matemática continue ampliando seus horizontes. Mesmo sendo alvo de críticas, esse mecanismo não deixou de fazer parte da grande obra da matemática, o *Elementos* de Euclides e também de diversas outras.

Na obra de Euclides, aparecem algumas proposições em que podemos ver o mecanismo de demonstração por redução ao absurdo sendo aplicado, seguindo o rigoroso método dedutivo e axiomático, que de tão plausível perdura até os dias de hoje. Das proposições descritas neste trabalho, do primeiro volume da obra, podemos ilustrar a aplicabilidade deste mecanismo e propiciar subsídios para um trabalho de ordem mais complexa posteriormente, que é o de investigar as características das proposições da obra de Euclides na qual se aplica o método indireto de demonstração.

Referências

ÁVILA, Patrícia de. **Os elementos de Euclides**. 2003. 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

ARISTÓTELES. **Analíticos posteriores**. / Tradução e notas de Pinharanda Gomes. 2. ed. Lisboa: Guimarães Editores, 2003.

BASSALO, José Maria Filardo. **A Crônica do Cálculo: I. Antes de Newton e Leibniz**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*. Pará, v. 18. n. 2, p. 103 – 112, jun. 1996.

BRITO, Arlete de Jesus. **Geometrias Não-Euclidianas: um Estudo Histórico-Pedagógico**. *Dissertação de Mestrado*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1995.

COXE, Infeliz Carvalho. **Funções racionais na integração: da técnica e tecnologia à discussão de conteúdos básicos em um curso de licenciatura em matemática**. *Dissertação de Mestrado*. Belo Horizonte: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2013.

DINUCCI, Aldo Lopes. **Análise das três teses do tratado do não-ser de Górgias de Leontinos**. *O que nos faz pensar*. n. 24, out. 2008.

EUCLIDES. **Os Elementos**. / Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. / Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas Editora da UNICAMP, 2004.



GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 3. ed. rev. e ampl. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

JULIANI, Rafael Tavares. **O desejo do absurdo**. In: 1º Congresso de História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia – UFRJ / HCTE, 2008. Rio de Janeiro. *Anais...* Rio de Janeiro, 2008.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730 – 1930**. 2. ed. São Paulo: Annablume, 2007.