



A ENGENHARIA DIDÁTICA E A DIALÉTICA FERRAMENTA OBJETO: NA ORGANIZAÇÃO DO ENSINO AO DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES DA MATRIZ DE REFERÊNCIA DO SPAECE

DIDACTIC ENGINEERING AND DIALECTICS TOOL OBJECT: IN THE ORGANIZATION OF TEACHING TO DEVELOP SKILLS OF THE SPAECE REFERENCE MATRIX

Arlem Atanazio dos Santos¹; Maria Cristiane Magalhães Brandão²

RESUMO

Neste artigo apresentamos uma proposta de organização do ensino, que permita ao professor de Matemática, em seu trabalho de sala de aula, desenvolver habilidades específicas de uma matriz de referência; no caso, a do Sistema Permanente de Avaliação do Estado do Ceará (SPAECE). Nesse sentido, trazemos uma conexão entre as orientações curriculares, os recursos didáticos (livros) e a matriz de referência do SPAECE. Tal estruturação, foi realizada a partir das orientações metodológicas da Engenharia didática (ED), em articulação com as orientações didático metodológicas da Dialética Ferramenta Objeto (DFO). Organização que nos permitiu conhecermos o programa de ensino da disciplina e a matriz de referência do SPAECE, sendo tais documentos as orientações curriculares seguidas; realizarmos o estudo de um tópico específico da Geometria Analítica, o cálculo da área do triângulo dado três pontos no plano, como habilidade a ser desenvolvida. Como também, analisarmos a abordagem de ensino, de alguns livros didáticos utilizados no ensino médio, sobre tal tópico; e elencarmos os conhecimentos prévios dos alunos, necessários ao desenvolvimento da habilidade. Além disso, organizarmos uma sequência didática, com três situações problemas, direcionadas ao ensino da referida habilidade; estruturadas a uma futura aplicação, pelas fases da Dialética Ferramenta Objeto (DFO), como metodologia de ensino. Sendo assim, acreditamos que tal proposta, possa servir como um modelo, de orientação à professores de Matemática, que pretendam organizar situações de ensino e aplicá-las em sala de aula; pautadas nos seus aspectos didáticos e cognitivos, que

¹ Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE). Professor efetivo da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC-CE), Fortaleza, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Manoel Bindá, 555, Distrito de Cpongna, Cascavel, Ceará, Brasil. CEP: 62852-000. E-mail: arlem_mat@yahoo.com.br.

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2346-8242>.

² Doutora em Matemática pela Universidade Federal do Ceará (UFC). Professora efetiva da Universidade Estadual do Ceará (UECE), unidade de Limoeiro do Norte, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Tibúrcio Frota, 29, São João do Tauape, Fortaleza, Ceará, Brasil. CEP: 60130-300. E-mail: cristiane.brandao@uece.br.

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-7160-1872>.



permitam o desenvolvimento de habilidades da matriz de referência do SPAECE ou de outras matrizes.

Palavras-chave: Orientações curriculares. Engenharia didática. Dialética Ferramenta Objeto.

ABSTRACT

In this article we present a proposal for the organization of teaching, which allows the Mathematics teacher, in their classroom work, to develop specific skills from a reference matrix; in this case, that of the Permanent Assessment System of the State of Ceará (SPAECE). In this sense, we bring a connection between the curricular guidelines, the teaching resources (books) and the SPAECE reference matrix. Such structuring was carried out from the methodological guidelines of Didactic Engineering (ED), in conjunction with the methodological didactic guidelines of the Dialectic Tool Object (DFO). Organization that allowed us to get to know the discipline's teaching program and the SPAECE reference matrix, such documents being the curricular guidelines followed; we carry out the study of a specific topic of Analytical Geometry, the calculation of the area of the triangle given three points on the plane, as a skill to be developed. As well, we analyze the teaching approach of some textbooks used in high school on this topic; and list the students' prior knowledge, necessary for skill development. In addition, we organized a didactic sequence, with three problem situations, aimed at teaching that skill; structured for a future application, by the phases of the Object Tool Dialectic (DFO), as a teaching methodology. Therefore, we believe that such proposal can serve as a model for guidance to Mathematics teachers who intend to organize teaching situations and apply them in the classroom; based on their didactic and cognitive aspects, which allow the development of skills from the SPAECE reference matrix or from other matrices.

Keywords: Curricular guidelines. Didactic engineering. Dialectic Object Tool.

Introdução

Apresentamos como motivações iniciais a realização do estudo, as leituras realizadas em (CEARÁ, 2017), texto que apresenta e discute um conjunto de orientações pedagógicas ao ensino de Matemática, com foco no desenvolvimento de habilidades específicas da matriz de referência do Sistema Permanente de Avaliação do Estado do Ceará (SPAECE). Isto é, neste estudo, temos por fundamento, a possibilidade de articulação entre as orientações das matrizes curriculares, dos livros didáticos, e da matriz de referência do SPAECE.

Nesse sentido (CEARÁ, 2017), orienta que o professor a partir das orientações das matrizes curriculares, descritas no plano de curso anual da disciplina, deve observar como as habilidades e competências da matriz de referência do SPAECE, juntamente com os recursos didáticos (livros), estão direcionadas à prática de sala de aula. Numa organização que permite ao professor o desenvolvimento de um conjunto de habilidades e competências específicas dessa matriz.



Com isto, diante da possibilidade sugerida em (CEARÁ, 2017), de organização do ensino ao desenvolvimento dessas habilidades, bem como a de realizarmos tal articulação, suscitamos o seguinte questionamento: *como realizar tal articulação, entre essas orientações, direcionadas ao ensino de habilidades específicas da matriz de referência do SPAECE? Desse modo, temos por objetivo organizar um estudo que articule as orientações curriculares, os recursos didáticos (livros) e a matriz de referência do SPAECE, direcionados ao ensino de habilidades específicas.*

A fim de alcançarmos tal objetivo tomamos como referenciais, na organização da pesquisa, as orientações metodológicas da Engenharia didática que nos permitiu *conhecermos as orientações e analisarmos a abordagem de alguns livros de Ensino Médio relativa a habilidades da matriz de referência do SPAECE*, bem como as orientações didático metodológicas de uma metodologia ao ensino da Matemática, no caso, a dialética ferramenta objeto, na *organização de uma sequência didática, direcionada ao ensino de uma habilidade específica da matriz de referência do SPAECE.*

Vale ressaltar que como lecionamos em turmas do 3º Ano do Ensino Médio, destacaremos no estudo uma habilidade relativa ao ensino da Geometria Analítica, no caso, a de obter a área de um triângulo dado três pontos no plano cartesiano, sendo o descritor 54 (cinquenta e quatro) da matriz de referência do SPAECE. Discutiremos a seguir, os referenciais teóricos utilizados na organização do estudo, em destaque, a Engenharia didática (ED) como metodologia de pesquisa, e as orientações didático metodológicas da Dialética Ferramenta Objeto (DFO).

A Engenharia didática e a Dialética ferramenta-objeto

Iniciamos destacando a Engenharia didática como metodologia de pesquisa seguida. Tal metodologia tem por princípio valorizar as práticas e experiências do professor, percebendo-o como um pesquisador em potencial, que pode “ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado objeto matemático e, em particular, a elaboração de gênesis artificiais para um dado conceito”. (ALMOULOUD, 2007, p.171).

Desse modo, o professor deve considerar que sua “prática de ensino é articulada como prática de investigação. A teoria da Engenharia didática pode ser vista como



referencial para o desenvolvimento de produtos para o ensino, gerados da junção do conhecimento prático com teórico”. (CARNEIRO, 2005, p.3).

Como ressalta Pais (2002), ao planejamento e execução de uma ED, o professor deve seguir quatro fases consecutivas, sendo estas: análises prévias (preliminares); construção das situações (concepção) e análise a priori; experimentação (aplicação da situação didática); análise a posteriori e a avaliação (validação). A seguir, destacaremos cada uma dessas fases, com suas respectivas orientações.

Análises preliminares: consiste da análise de como o conteúdo está sendo ensinado, a fim de propormos intervenções e modificações. Nesta análise, devemos incluir três dimensões: *epistemológica*, relacionada com o saber em estudo, podendo ser observado sua evolução histórica, os obstáculos relativos à sua natureza, dentre outros aspectos; *didática*, relativa à forma como o conteúdo é apresentado nos livros didáticos, como proposta de ensino ao professor; *cognitiva*, caracterizada pela análise de questões relativas aos conhecimentos dos alunos sobre a temática de estudo.

Análise a priori e concepção: etapa de descrição das escolhas realizadas, onde são definidas algumas variáveis (globais e locais) a fim de direcionar a pesquisa e propormos um plano de ação. As variáveis globais têm por finalidade direcionar as escolhas da pesquisa, enquanto que as variáveis locais são direcionadas a previsão dos possíveis comportamentos e entraves dos alunos, mediante as situações didáticas.

Experimentação: etapa de aplicação das situações didáticas e coleta dos dados relativos à pesquisa. Nesta coleta podemos fazer uso de vários instrumentais, tais como: relatórios, registros fotográficos, produções dos alunos, entrevistas, dentre outros recursos, a fim de formarmos o *corpus da pesquisa*.

Análise a posteriori: etapa caracterizada pela devida organização do *corpus da pesquisa*, a fim de uma avaliação posterior.

Validação da Engenharia: mediante o confronto das considerações da análise a priori, e as observações da experimentação, temos elementos para realizarmos uma análise sobre a reprodução ou não da engenharia proposta. Além de levantarmos possíveis questionamentos voltados à futuras pesquisas.

Dando continuidade, apresentamos as orientações didático metodológicas da Dialética Ferramenta Objeto como metodologia de ensino. Nesse sentido, como destacam Almoulud (2007) e Maranhão (2015), a dialética ferramenta objeto é um instrumento útil



à análise dos fenômenos de ensino e aprendizagem em Matemática, permitindo a concepção, execução e análises de engenharia didáticas, pois “[...] permitem uma leitura diferenciada da evolução de noções matemáticas e, também, uma análise da aprendizagem efetivamente existente [...]” (ALMOULUD, 2007, p.61).

Nesse referencial, as noções e teoremas matemáticos assumem um papel de *ferramenta*, quando são aplicados na resolução de um problema, num aspecto mais funcional. No entanto, tais instrumentos matemáticos são conhecimentos já estabelecidos e reconhecidos cientificamente, como *objetos* do conhecimento matemático.

Sendo assim “para um pesquisador ou professor, ferramenta é um objeto em seu funcionamento científico. Para um aluno, o uso de uma ferramenta é sempre prático.” (MARANHÃO, 2015, p.144). A dialética ferramenta objeto apresenta a uma organização do ensino, as seguintes fases e suas orientações:

Antigo: nesta fase da dialética ferramenta objeto, os alunos devem se valer dos conhecimentos antigos para resolver, ao menos em parte, o problema.

Pesquisa-novo implícito: nesta fase, os alunos não podem resolver totalmente o problema, sendo o objeto do ensino, a ferramenta necessária à resolução da situação proposta.

Explicitação-institucionalização local: esta fase da dialética ferramenta-objeto tem por finalidade que os alunos nas situações de comunicação apresentem suas produções aos demais alunos, sendo estas, conhecimentos que foram utilizados como ferramenta; cabe ao professor a seleção dessas informações a fim de dar aos conhecimentos discutidos, o estatuto de objeto.

Institucionalização-estatuto do objeto: nesta fase, o professor faz uma compilação dos conhecimentos apresentados e discutidos, na fase anterior; com o objetivo de que os conhecimentos sejam formalizados, como objetos do saber matemático.

Familiarização-reutilização numa nova situação: nesta fase, o professor deve realizar o reinvestimento do objeto do conhecimento matemático formalizado, como uma ferramenta explícita. Com isto, desenvolvem-se vários exercícios, com o que foi formalizado, numa familiarização com o que é novo; a fim de que o novo objeto torne-se antigo, para ser utilizado em outro ciclo da dialética ferramenta objeto.

Complexificação da tarefa ou novo problema: esta fase prevê a reutilização dos conhecimentos matemáticos formalizados em tarefas, de maior complexidade, que



envolvam outros conceitos, propriedades e procedimentos gerando um novo ciclo da dialética.

Dando continuidade, apresentamos uma organização do ensino, pautada nos pressupostos da ED e da DFO, direcionada ao descritor 54 (cinquenta e quatro), da matriz de referência do SPAECE, que trata da obtenção da área de um triângulo dados três pontos no plano.

Organização do ensino segundo a Engenharia didática e a Dialética ferramenta objeto

No intuito de organizarmos o ensino segundo a Engenharia didática e a Dialética ferramenta objeto; iniciamos destacando a primeira etapa de uma ED, as **análises preliminares**; ressaltamos que nesta etapa, discutimos apenas duas das três dimensões de análise, no caso, a dimensão *didática* e a *cognitiva*.

Assim, começamos a *análise didática* pela observação do referencial curricular de orientação ao trabalho em sala de aula, em termos de conteúdo; no caso, o planejamento anual de 2019, para a disciplina de Matemática, no 3º ano do ensino médio. Dessa análise, destacamos já haver uma articulação entre as habilidades e competências da matriz de referência do SPAECE e o programa anual da disciplina em 2019.

Diante de tal constatação, focamos a *análise didática* na matriz de referência do SPAECE. Tal matriz se caracteriza como um recorte do currículo, trazendo um conjunto de habilidades bem específicas, os descritores. Assim, a matriz de referência do SPAECE para o 3º ano do ensino médio é composta por 24 (vinte e quatro) descritores (habilidades específicas), organizadas em 4 (quatro) temáticas: interagindo com os números e funções, convivendo com a geometria, vivenciando as medidas e tratamento da informação.

Da análise da matriz de referência do SPAECE, observamos que esta apenas mostra quais habilidades devem ser desenvolvidas, a cada etapa do ensino médio, não trazendo nenhuma orientação ao professor, no sentido de como este pode organizar o ensino para o desenvolvimento das habilidades propostas. Sobre tal lacuna, esta é discutida no conjunto de orientações pedagógicas encontradas em (CEARÁ, 2017). No entanto, essas orientações não são associadas a uma metodologia específica do ensino da Matemática, sendo tal fato, a nosso ver, uma necessidade a ser complementada, em termos de orientações pedagógicas.



Como temos pretensão de trazer algo voltado à sala de aula, no caso, uma sequência didática que trate de uma habilidade específica da matriz de referência do SPAECE, realizamos, na *dimensão didática*, a análise de alguns livros do ensino médio, sendo estes, Giovanni (2001), Iezzi et al (2016), Dante (2016), Longen (2003) e Buchi (1998).

De tal análise, observamos qual era a abordagem do conteúdo relacionado a obtenção da área de um triângulo dado três pontos no plano, sendo tal habilidade relacionada ao conteúdo trabalhado no terceiro ano do Ensino Médio, turmas na qual leciono.

Com isto, destacamos da análise dos estudos de Giovanni (2001), Iezzi et al (2016) e Dante (2016), que para o aluno obter a área de um triângulo dado seus vértices, seguindo a abordagem clássica apresentada, o aluno tem que realizar o estudo de diversos conceitos relacionados à Geometria Analítica, em destaque: representação e localização de pontos no plano cartesiano, distância entre dois pontos e distância de um ponto a uma reta.

No entanto, em Longen (2003), Buchi (1998), Kindle (1973) e Papa Neto (2019), estes apresentam uma abordagem relativa à obtenção da área de um polígono dado três pontos no plano, que consideramos alternativa, sendo esta, fundamentada na representação e localização de pontos no plano cartesiano e na composição e decomposição de áreas de figuras no plano cartesiano parecendo ser, a nosso ver, uma sequência conceitualmente mais simples, por apresentar conceitos, digamos, não exclusivos da Geometria Analítica, diferentemente da abordagem clássica, que discute a obtenção da área de um polígono a partir dos conceitos de distância entre dois pontos e distância de um ponto a uma reta.

Além disso, na *análise cognitiva* elencamos as competências matemáticas que o aluno deve possuir, a fim de abordar e resolver, ao menos parcialmente, a situação-problema proposta. Nesse sentido, este deve ser capaz de: realizar operações com números inteiros; representar e localizar pontos no plano cartesiano; construir e reconhecer figuras planas, a partir de pontos no plano cartesiano; calcular distância entre dois pontos no plano cartesiano; obter a área de figuras planas; e, finalmente, ser capaz de obter a área de um triângulo no plano cartesiano, por composição e decomposição de figuras planas.



Desse modo, tais competências matemáticas são essências a uma apreensão adequada da obtenção da área de um triângulo dado três pontos no plano, sendo necessário sua retomada e/ou reforço. A seguir, destacamos as escolhas realizadas na *análise a priori* a partir das observações das *análises preliminares*.

Com isto, na *análise a priori*, apresentamos uma organização do ensino, fundamentada numa metodologia específica ao ensino de Matemática que permita uma abordagem alternativa de ensino da área de um triângulo dado seus vértices, como destacam Longen (2003), Buchi (1998), Kindle (1973) e Papa Neto (2019); diferentemente da abordagem clássica, apresentada em Giovanni (2001), Iezzi et al (2016) e Dante (2016).

Além disso, trazemos a possibilidade de observar e diagnosticar possíveis dificuldades dos alunos, relacionadas aos conhecimentos matemáticos, tidos como requisitos, ao desenvolvimento da referida habilidade. Com isto, na fase de *concepção*, organizamos algumas situações problemas discutidas a partir das orientações didático metodológicas da Dialética Ferramenta Objeto, situações mostradas a seguir:

Situações problemas direcionadas ao ensino da área de um triângulo dado três pontos no plano

Nesse sentido, apresentamos algumas situações problemas direcionadas ao ensino da área de um triângulo dado três pontos no plano; desse modo, na fase de *concepção*, organizamos uma sequência de situações problema relacionadas com o descritor 54 (cinquenta e quatro), que trata da obtenção da área de uma região triangular, a partir das coordenadas de seus vértices; habilidade da matriz de referência do SPAECE, relativa ao tema Convivendo com a Geometria, conteúdo específico da Geometria Analítica, do terceiro ano do ensino médio. As situações propostas foram estruturadas, segundo as orientações didático metodológicas da Dialética Ferramenta Objeto. Vejamos:

Quadro 1-Situação problema 1.

Situação problema 1: dados os pontos A (1,1), B(4,2) e C(5,4), a partir da representação desses pontos no plano cartesiano, obtenha:

- a) A figura plana, a partir dos pontos A, B e C. (Utilize o plano cartesiano dado ou o caderno, para representar a figura).
- b) Com base, na figura obtida anteriormente, obtenha sua área.

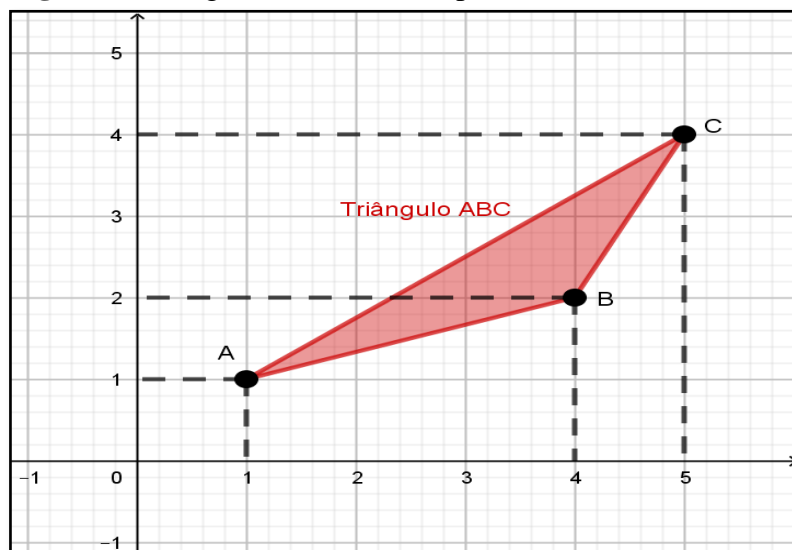
Fonte: Elaborado pelos autores.



Dando continuidade, trazemos a análise da situação problema 1, de acordo com as etapas da dialética ferramenta objeto, destacadas em Almouloud (2007) e Maranhão (2015), sendo estas:

D) *Antigo*: nesta fase da dialética ferramenta objeto, os alunos devem se valer dos conhecimentos antigos para resolver, ao menos, em parte o problema. *Propósito*: que os alunos apresentem alguns conhecimentos preliminares, úteis à resolução do item (a), tais como: saber representar e localizar pontos no plano cartesiano; construir e reconhecer figuras planas, a partir de pontos no plano cartesiano. *Orientação ao professor*: sugerir aos alunos, que em duplas, e num *tempo* de 15 minutos, realizem a leitura da situação proposta, e posteriormente, sejam capazes de discutir e apresentar uma possível solução ao item (a); e que esta envolva a representação dos pontos A, B e C no plano cartesiano, e a construção de uma figura plana. Sugerimos ao professor, que forneça um plano cartesiano (material extra), aos alunos; ou peça para realizarem suas produções no caderno. *Descrição matemática da solução do item (a)*: inicialmente o aluno deve localizar e registrar os pontos A(1,1), B(4,2) e C(5,4), no plano cartesiano. Posteriormente a este registro, o aluno deve unir os vértices A e B; B e C; e C e A, obtendo os segmentos de reta AB, BC e CA; caracterizando, como a figura plana solicitada, o triângulo ABC; como apresentamos na figura 1, a seguir:

Figura 1-Triângulo ABC obtido a partir da união dos vértices.



Fonte: Elaborado pelos autores.

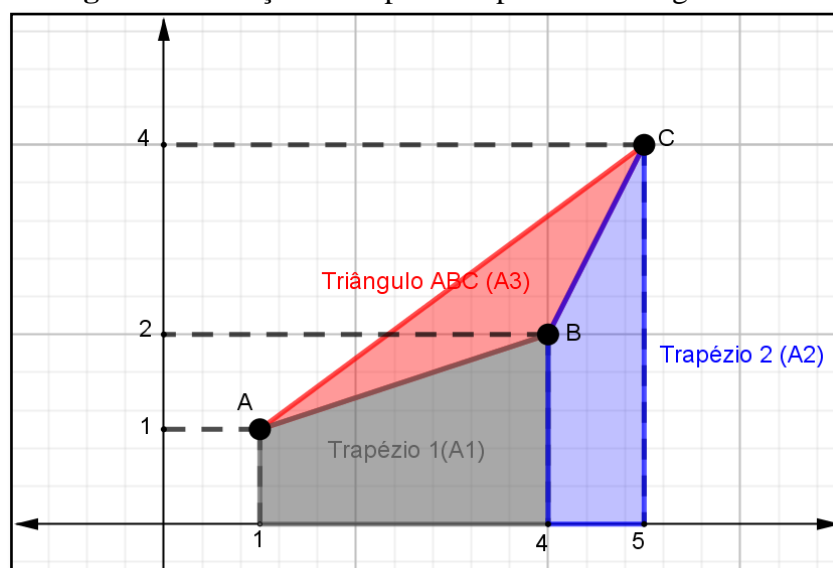


Discussão sugerida: ao final desta etapa, o professor pode realizar com os alunos uma discussão sobre como eles fizeram para representar e localizar os pontos no plano cartesiano, e construir a figura plana requisitada.

Após a etapa de verificação de alguns conhecimentos prévios que os alunos devem possuir, a fim de resolver a situação proposta; continuaremos a discussão da dialética ferramenta objeto, destacando agora, a etapa da pesquisa ou novo implícito. Para isso, sugerimos aos alunos, que retomem a situação proposta, resolvendo o item (b).

II) *Pesquisa-novo implícito:* Como nesta fase, os alunos não podem resolver totalmente o problema; sendo o objeto do ensino, a ferramenta necessária a resolução da situação proposta. *Propósito:* que os alunos utilizem seus conhecimentos e apresentem alguma estratégia à obtenção da área da figura plana, obtida no item (a). *Orientação ao professor:* pedir aos alunos, que nas duplas, e num tempo de 20 minutos, realizem discussões a fim de descrever as estratégias e procedimentos utilizados para obter a área do triângulo (ABC), da figura 1. *Descrição da solução matemática:* nesta fase, esperamos que os alunos possam a partir dos vértices A, B e C do triângulo (ABC), na figura 1; traçar segmentos paralelos ao eixo y e obter: o trapézio (AC51), trapézio maior; o trapézio (AB41), trapézio 1; e o trapézio (BC54), trapézio 2; mostrados na figura 2, a seguir:

Figura 2-Obtenção de trapézios a partir do triângulo ABC.



Fonte: Elaborado pelos autores.



Discussão sugerida: Como fechamento desta fase, o professor pode realizar com os alunos, uma discussão sobre as dificuldades na obtenção de uma estratégia ou procedimento que fornecesse a área do triângulo (ABC).

III) *Explicitação-institucionalização local:* esta fase da dialética ferramenta-objeto tem por finalidade que os alunos nas situações de comunicação apresentam suas produções, aos demais alunos, sendo estas, conhecimentos que foram utilizados como ferramenta. Cabe ao professor a seleção dessas informações, a fim de dar aos conhecimentos discutidos, o estatuto de objeto. *Propósito:* verificar dentre o grupo de alunos as estratégias e procedimentos utilizados a resolução do item (b). *Orientação ao professor:* pedir aos alunos que conseguiram estabelecer uma estratégia ou procedimento, de resolução da tarefa, que apresentem seus resultados à turma. Estipulamos um tempo de 20 minutos para as apresentações e discussões. *Descrição matemática:* com base na figura 2, obtida na fase anterior; e por composição e decomposição de áreas, os alunos devem obter a área do triângulo (ABC), a partir da relação:

Área do triângulo (ABC) = Área do trapézio (AC51) – Área de trapézio (AB41) – Área do trapézio (BC51). E ao substituírem, os valores das bases e alturas, observados na figura 2, obterem:

$$\text{Área do triângulo (ABC)} = \frac{(1+4) \cdot 4}{2} - \frac{(2+1) \cdot 3}{2} - \frac{(4+2) \cdot 1}{2} = 10 - 3 - 4,5 = 2,5u.a$$

Discussão sugerida: nessa fase o professor pode realizar, com a turma, uma discussão sobre quais foram às estratégias e procedimentos utilizados na obtenção da área do triângulo (ABC).

IV) *Institucionalização-estatuto do objeto:* nesta fase, o professor faz uma compilação dos conhecimentos apresentados e discutidos, na fase anterior; com o objetivo de que os conhecimentos sejam formalizados, como objetos do saber matemático. *Propósito:* a formalização dos conhecimentos utilizados a obtenção da área do triângulo (ABC). *Orientação ao professor:* destacar o que considera como importante das produções dos alunos, bem como o que estes devem reter, como objetos do saber matemático; num tempo sugerido de 20 minutos. *Descrição da solução matemática:* apresentaremos a seguir, a formalização do modelo matemático, discutidos em Papa Neto (2019, p. 2-4), Longen (2003, p. 116-117), Kindle (1973, p. 2-3) e Bucchi (1998, p. 72), que nos permite o cálculo da área do triângulo, a partir de seus vértices. Para isso, apresentamos o teorema relativo a área de um polígono em função das coordenadas de seus vértices. *Teorema:*

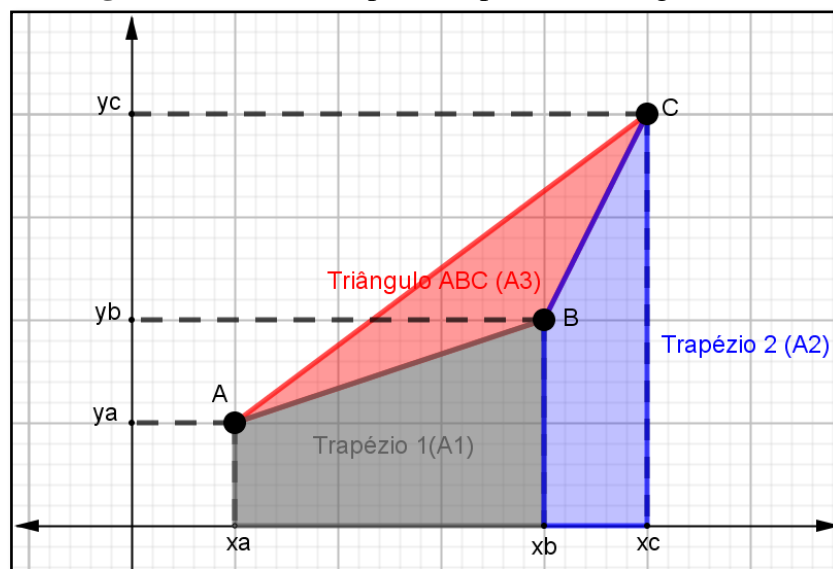


sejam $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, $C(x_c, y_c)$ os vértices de um triângulo. A área (A) em função das coordenadas dos vértices será dada pela expressão:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (x_a \cdot y_b + x_b \cdot y_c + x_c \cdot y_a - x_c \cdot y_b - x_b \cdot y_a - x_a \cdot y_c)$$

Vale destacar que na demonstração desse teorema, utilizamos como referência à discussão, a figura 3, a seguir. Vejamos:

Figura 3-Áreas dos trapézios a partir do triângulo ABC.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Desse modo, notemos que pela observação da figura 3, e com composição e decomposição de áreas planas, temos que:

Área do trapézio $(ACXcXa) = \text{Área do triângulo } (ABC) + \text{Área de trapézio } (ABXbXa) + \text{Área do trapézio } (BCXcXb)$. E, ao reorganizarmos esse resultado, temos:

Área do triângulo $(ABC) = \text{Área do trapézio } (ACXcXa) - \text{Área de trapézio } (ABXbXa) - \text{Área do trapézio } (BCXcXb)$ (I).

Notemos ainda, que pela análise da figura 3, as áreas dos trapézios são dadas por:

$$\text{Área do trapézio } (ACXcXa) = \frac{(y_c + y_a)(x_c - x_a)}{2};$$

$$\text{Área de trapézio } (ABXbXa) = \frac{(y_b + y_a)(x_b - x_a)}{2};$$

$$\text{Área do trapézio } (BCXcXb) = \frac{(y_c + y_b)(x_c - x_b)}{2};$$



E, ao substituírmos esses resultados, em (I), encontramos como resultado da Área do triângulo (ABC), o seguinte:

$$A = \frac{1}{2}(y_c + y_a)(x_c - x_a) - \frac{1}{2}(y_b + y_a)(x_b - x_a) - \frac{1}{2}(y_c + y_b)(x_c - x_b) = \dots$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (x_a \cdot y_b + x_b \cdot y_c + x_c \cdot y_a - x_c \cdot y_b - x_b \cdot y_a - x_a \cdot y_c) \text{ cqd}$$

Este resultado pode ser expresso de outra maneira, mais fácil de recordar; levando em conta, a notação de determinante (D), podemos escrever o resultado como:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}, \text{ e } D = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = (x_a \cdot y_b + x_b \cdot y_c + x_c \cdot y_a - x_c \cdot y_b - x_b \cdot y_a - x_a \cdot y_c)$$

Vale destacar sobre o resultado de D , que dependendo da posição dos vértices do triângulo no plano cartesiano, eventualmente podemos ter $D < 0$. Assim, para garantirmos sempre valores positivos para a área (A), utilizamos $|D|$. Daí temos que:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot |D| \quad (1)$$

Outra forma, muito útil, de expressar a área de um triângulo dado seus vértices, é a apresentada a seguir, em (2) e (3); observe que repetimos a primeira fila na quarta, resultados que podem ser expressos das seguintes formas:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \\ x_c & y_c \\ x_a & y_a \end{vmatrix} \quad (2) \text{ ou } A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c & x_a \\ y_a & y_b & y_c & y_a \end{vmatrix} \quad (3)$$

Discussão sugerida: ao final, o professor pode realizar uma discussão com a turma sobre as possibilidades de obtenção da área de determinada região triangular, sendo esta realizada por composição e decomposição de sua área, em outras áreas planas; ou pela utilização das coordenadas dos vértices da região triangular.

V) *Familiarização-reutilização numa nova situação:* nesta fase, o professor deve realizar o reinvestimento do objeto do conhecimento matemático formalizado, como uma ferramenta explícita. Com isto, desenvolvem-se vários exercícios com o que foi formalizado, numa familiarização com o que é novo; afim de que o novo objeto torne-se antigo, para ser utilizado em outro ciclo da dialética ferramenta objeto. *Propósito:* nesta



fase, pretende-se que a propriedade formalizada seja utilizada para resolver um conjunto de situações, que tratem da obtenção da área de um triângulo dado as coordenadas de seus vértices. *Orientação ao professor:* sugerir outras tarefas de familiarização com o novo objeto do conhecimento; nesse sentido apresentamos as situações problema 2 e 3. As tarefas sugeridas podem ser realizadas, em grupos ou individualmente, sendo estipulado para suas realizações uns 15 minutos, cada. Iniciamos apresentando a situação 2, vejamos:

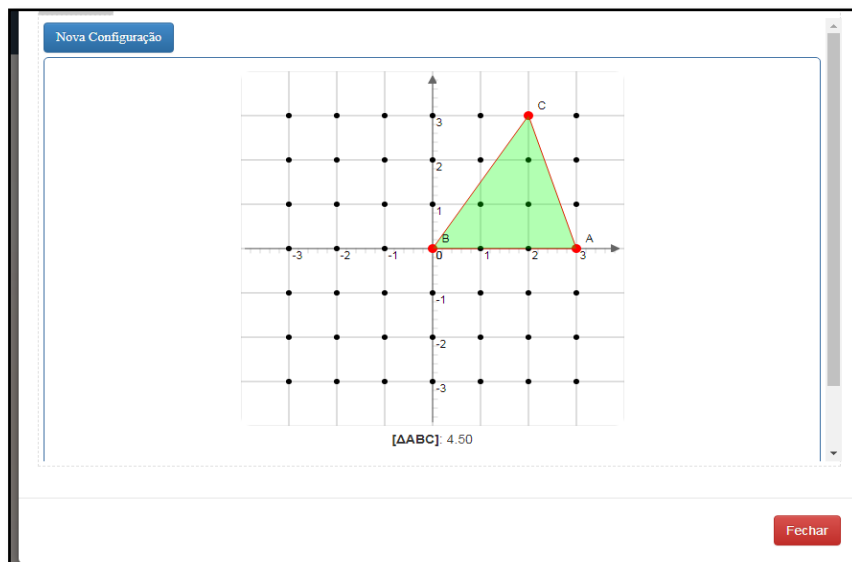
Quadro 2-Situação problema 2.

<p>Situação problema 2: Acesse ao endereço: https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=50. Ao abrir a página, se dirija a aula relativa a Áreas. Nessa aula, acesse em outros conteúdos, ao ícone Aplicativo. Ao clicar, no ícone Aplicativo, abrirá um simulador, que permite a manipulação do triângulo A, B e C, obtendo configurações diversas.</p> <p>Como situação problema, propomos que: no aplicativo apresentado, manipule os vértices A, B e C, gerando um triângulo qualquer; apresente uma configuração na qual você pode identificar a base e a altura desse triângulo. E obtenha sua área.</p>

Fonte: Elaborado pelos autores.

Como forma de ilustrarmos uma possibilidade de exploração da situação 2, proposta trazemos a seguir, na figura 4, uma possível configuração de um triângulo ABC, obtido a partir de seus vértices; bem como a descrição de solução matemática do cálculo de sua área. Vejamos:

Figura 4-Possível configuração de um triângulo ABC a partir de seus vértices.



Fonte: Portal do Saber (2019).

Descrição da solução matemática: note, que pela configuração apresentada podemos identificar a base do triângulo e sua altura, e suas medidas. Sendo a base=3unidades e a altura=3unidades. Daí podemos obter a área do triângulo da configuração obtida, sendo



$\text{Área} = \frac{(3 \cdot 3)}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$ unidades. Desse modo, o aluno para resolver a situação, utilizará

conhecimentos da Geometria Plana, relativos à área de um triângulo. Continuando, podemos sugerir aos alunos que resolvam a situação problema 3. Apresentada a seguir:

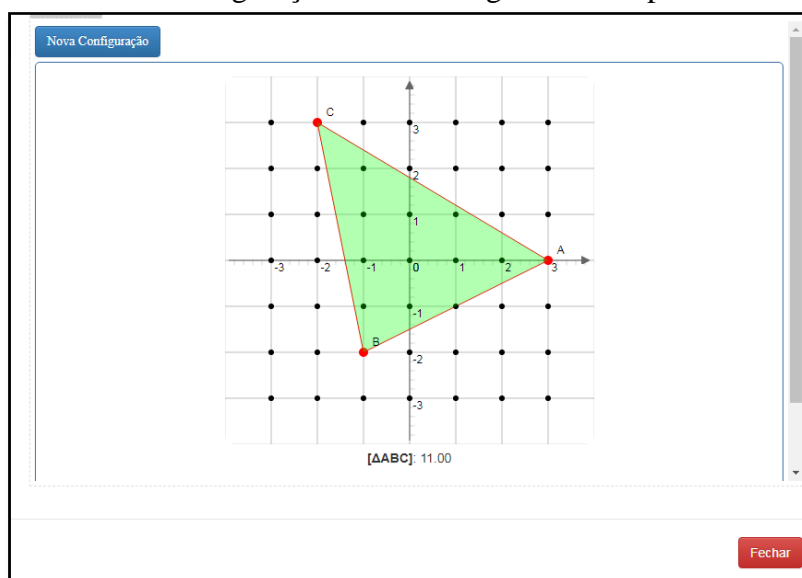
Quadro 3- Situação problema 3.

Situação problema 3: Acesse ao endereço: <https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=50>. Ao abrir a página, se dirija a aula relativa a Áreas. Nessa aula, acesse em outros conteúdos, ao ícone Aplicativo. Ao clicar, no ícone Aplicativo, abrirá um simulador, que permite a manipulação do triângulo A, B e C, obtendo configurações diversas. Como **situação problema**, propomos que: no aplicativo apresentado, manipule os vértices A, B e C, gerando um triângulo qualquer; apresente agora, uma configuração na qual você não consegue identificar a base e a altura do triângulo. E procure obter sua área.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Dando continuidade, e de maneira análoga a situação anterior, apresentamos na figura 5, uma possível configuração de um triângulo ABC, obtido a partir de seus vértices; além da descrição da solução matemática do cálculo de sua área. Vejamos:

Figura 1 - Possível configuração de um triângulo ABC a partir de seus vértices.



Fonte: Portal do Saber (2019).

Descrição da solução matemática: o aluno deve perceber, a dificuldade em identificar a base e a altura do triângulo ABC, a partir da construção realizada. E como, já formalizamos um modelo matemático que permite a obtenção da área de um triângulo, a partir dos seus vértices, este deve utilizá-lo. Resultados que mostrados, a seguir:



Assim, ao substituímos os pontos A(3,0), B(-1, -2) e C(-2,3) na relação (1), e realizarmos os cálculos encontramos:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |(3 \cdot (-2)) + ((-1) \cdot 3) + ((-2) \cdot 0) - ((-1) \cdot 0) - ((-2) \cdot (-2)) - (3 \cdot 3)| = \dots$$

$$\dots = \frac{1}{2} \cdot |-6 - 3 + 0 + 0 - 4 - 9| = \frac{1}{2} \cdot |-22| = 11u.a$$

Vale destacar, que poderíamos utilizar para obtenção da área do triângulo ABC as relações (2) ou (3), encontrando o mesmo resultado.

Discussão sugerida: Note, que a partir da resolução das situações 2 e 3 propostas, o professor pode realizar uma *discussão* sobre a obtenção da área de um triângulo, dado três pontos no plano, ou por outro procedimento; destacando as vantagens e limitações, de cada método.

VI) *Complexificação da tarefa ou novo problema:* nesta fase, prevê a reutilização dos conhecimentos matemáticos formalizados, em tarefas, de maior complexidade que envolvam outros conceitos, propriedades e procedimentos, gerando um novo ciclo da dialética. *Propósito:* o professor deve testar os conhecimentos adquiridos, pelos alunos, em situações mais complexas. *Orientação ao professor:* sugerir aos alunos, tarefas mais complexas, que tratem de outros conceitos, propriedades e procedimentos. Vale destacar, que nesta fase, não estipulamos um *tempo* determinado à realização das tarefas; devido ser uma escolha, que somente o professor pode fazê-la.

Como forma de exemplificarmos tais situações; catalogamos na tabela seguinte, algumas questões encontradas em Leonardo et al (2016), Longen (2016), Souza (2016), Dante (2016) e Iezzi et al (2016), livros utilizados no ensino médio. Sendo tais questões, perfeitamente adequadas, a fase de complexificação da tarefa, no estudo do descritor 54. Vejamos:

Tabela- Questões relativas ao descritor 54.

Livro	Capítulo	Questões	Página
Conexões com a Matemática. Vol.3	Capítulo 5 – Conceitos básicos e a reta	71, 72, 74 e 75	Pg. 131
Matemática Padrões e Relações. Vol.3	Capítulo 6 -Distância, área e ângulo	1, 2, 4, 5, 7 e 8	Pg. 90
# Contato Matemática. Vol. 3	Capítulo 2- O ponto e a reta	36, 37 e 38	Pg. 49
Matemática: contexto e aplicações. Vol. 3	Capítulo 4 – Geometria analítica: ponto e reta	61, 62, 64 e 66	Pg. 115
Matemática: ciência e aplicações. Vol. 3	Capítulo 2 – A reta	93 e 94	Pg. 57

Fonte: Elaborado pelos autores.



Discussão sugerida: ao final das tarefas, o professor pode realizar com a turma, uma *discussão* sobre a importância do objeto matemático formalizado, na resolução de tarefas de maior complexidade; tais como, as sugeridas na tabela anterior. Vale destacarmos, que nas questões sugeridas, buscamos apresentar situações que trabalhassem os aspectos discutidos na proposta; sendo apenas, sugestões de trabalho, ficando a cargo do professor: seguir, complementar ou não utilizar tais sugestões; bem como utilizar outras fontes, de seleção das atividades. Finalizamos trazendo nossas impressões sobre a organização proposta e suas implicações ao ensino do descritor 54.

Considerações finais

Vale destacar, que com tal organização, estruturada a partir das orientações metodológicas da ED, tivemos condições de: observarmos a adequação do programa anual da disciplina, no ano de 2019; analisarmos a matriz de referência do SPAECE; escolhermos dentro dessa matriz, uma habilidade específica a ser trabalhada, em destaque, a obtenção da área de um triângulo a partir de seus vértices, tópico da Geometria Analítica; observarmos a abordagem nos livros didáticos, relativa ao ensino de tal habilidade; elencarmos quais são as competências matemáticas necessárias ao estudo dessa habilidade, por parte dos alunos.

Além disso, incorporamos a tal organização, as orientações metodológicas da DFO, como metodologia de ensino, que nos permitiu apresentarmos uma abordagem alternativa, ao ensino da área do triângulo dado três pontos no plano. Nesse sentido, organizamos três situações problemas, direcionadas ao ensino da habilidade; orientados pelas fases da DFO. Como também, sugerimos algumas situações problemas, relacionados a essa habilidade; apresentados em livros didáticos, utilizados no ensino médio.

Com isto, acreditamos que a organização seguida, nos permitiu de maneira satisfatória alcançarmos os objetivos traçados no estudo; evidenciamos tal fato, pela articulação realizada entre: as orientações curriculares, os recursos didáticos (livros) e as habilidades da matriz de referência do SPAECE, num estudo direcionado ao ensino, da área do triângulo dado três pontos no plano, tópico da Geometria Analítica.

Desse modo, na organização discutida, apenas estruturamos situações ao ensino da habilidade. Assim, numa perspectiva futura, pretendemos realizar a aplicação das



situações, em sala de aula; e a partir das observações e análises realizadas, fazermos os devidos ajustes e correções.

Dessa maneira, esperamos que a proposta discutida sirva de orientação aos professores de Matemática; no sentido de ser um modelo de organização do ensino, pautado nos aspectos didáticos e cognitivos; referenciando a estruturação e experimentação de situações-problema, que tratem de habilidades da matriz de referência do SPAECE ou de outras matrizes.

Referências

ALMOULOU, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BUCHI, Paulo. **Curso Prático de Matemática**. São Paulo: Moderna, 1998.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 13, n. 1, p. 87–120, 2009. DOI: 10.20396/zet.v13i23.8646981. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646981>. Acesso em: 15 set. 2019.

CEARÁ (Estado). Secretaria da Educação do Estado do Ceará. **Boletim do professor: matemática**. Juiz de Fora: Caed, 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. 3.ed. São Paulo: Ática, 2016.

GIOVANNI, José Rui; BONJORNO, José Roberto. **Matemática: uma nova abordagem**. São Paulo: Ftd, 2001.

IEZZI, Gelson. et al. **Matemática: ciência e aplicações**. 9.ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

KINDLE, Joseph H., **Teoria y problemas de Geometria Analítica Plana y del spacio**. [S.L]: McGraw-Hill, 1973

LEONARDO, Fabio Martins de. et al. **Conexões com a Matemática**. 3.ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LONGEN, Adilson. **Matemática: uma atividade humana**. Curitiba: Base editora, 2003.

LONGEN, Adilson. **Matemática: padrões e relações**. 1.ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2016.



MARANHÃO, Maria Cristina S. de A. Dialética ferramenta objeto. **In:** MACHADO, Silvia Dias Alcântara. (Org.). **Educação Matemática:** uma nova introdução. 3.ed. São Paulo: Educ, 2015. Cap. 5, p.143-166.

PAPA NETO, Ângelo. **Áreas em coordenadas.** Fortaleza: UFC, 2019.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autentica 2002.

PORTAL DO SABER (OBMEP).c2019. Disponível em:
<<https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=50>>. Acesso em:
19 de out.2019.

SOUZA, José Roberto de. # **Contato Matemática.** 1.ed. São Paulo: FTD, 2016.

Recebido em: 03 / 05 / 2021

Aprovado em: 23 / 08 / 2021