BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v8i24.5359

MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES: UM ESTUDO COM BASE EM PROBLEMAS HISTÓRICOS

FUNCTION MAXIMUMS AND MINIMUMS: A STUDY BASED ON HISTORICAL PROBLEMS

Janice Rachelli[1]; Paulo Damião Christo Martins[2]

RESUMO

Neste artigo apresentamos um estudo histórico sobre máximos e mínimos de funções, um dos tópicos importantes no estudo do cálculo diferencial. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica, de cunho teórico, em que foram analisados, inicialmente, os métodos utilizados por Pierre de Fermat e Marquês de l'Hôpital para a determinação de máximos e mínimos. Após, apresentamos os seguintes problemas históricos: os barris de Kepler, o princípio de Fermat e a lei de Snell, um problema de Heron, o problema de Descartes e a curva de Agnesi. Neste trabalho, tais problemas foram resolvidos com o auxílio de teoremas que são abordados atualmente no cálculo diferencial. Destacamos a importância de tratar alguns destes problemas no ensino de Cálculo, com vistas a entender como o conhecimento matemático foi se desenvolvendo ao longo dos tempos e possibilitar aos estudantes motivação e aprendizado.
Palavras-chave: Cálculo; Derivada; Problemas históricos; Máximos e mínimos.

ABSTRACT

In this article, we present a historical study on maximums and minimums of functions, one of the important topics in the differential calculus study. This is bibliographic research of a theoretical nature, in which, initially, the methods used by Pierre de Fermat and Marquis de l'Hôpital were used to determine maxima and minima. Then, we present the following historical problems Kepler's barrels, Fermat's principle and Snell's law, a Heron's problem, the Bernoulli's problem, and the curve of Agnesi. In this work these problems were solved with the aid of theorems that are currently approached in differential calculus. We highlight the importance of addressing some of these problems in the teaching of Calculus, intending to understand how mathematical knowledge has developed over time and enabling students to motivate and learn.
Keywords: Calculus; Derivative; Historical problems; Maximum and minimum.

[1] Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana (UFN). Professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), Santa Maria, RS, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Visconde de Pelotas, 2262, Nossa Senhora de Fátima, Santa Maria, RS, Brasil, CEP: 97015-140. E-mail: janicerachelli@gmail.com.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1422-1838.
[2] Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Acadêmico de mestrado do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP), São Carlos, SP, Brasil. Endereço para correspondência: Rua José Gabriel de Moraes Brenner, 1105, ap 103, Tancredo Neves, Santa Maria, RS, Brasil, CEP: 97032-240. E-mail: paulomartinsmtm@gmail.com.
ORCID iD: http://orcid.org/0000-0003-1942-5036.

Introdução

A busca pela compreensão de como o conhecimento matemático se desenvolveu e se institucionalizou em diferentes épocas e locais é um dos objetivos ao se estudar problemas e fatos que geraram conceitos e teorias que são estudados nos dias atuais.

Em relação ao Cálculo, os livros didáticos, em sua maioria, atribuem a sua criação a Isaac Newton (1643-1727) e a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Porém, segundo Courant e Robbins (2000, p. 453), "o Cálculo é produto de uma longa evolução que não foi iniciada nem concluída por Newton e Leibniz". Muitos outros matemáticos contribuíram de maneira decisiva para que se formulasse um conjunto compreensivo de teorias e regras para a solução de diversos problemas (BARON; BOS, 1985). Newton e Leibniz demonstraram que os dois problemas centrais estudados no século XVII, o das tangentes – problema fundamental do cálculo diferencial e o das quadraturas – problema fundamental do cálculo integral, apresentavam entre si uma relação inversa, que constitui o teorema fundamental do Cálculo e, por isso, a invenção do Cálculo é, tradicionalmente, atribuída a ambos. Muitos destes problemas foram estudados separadamente, durante séculos, por diferentes cientistas que passaram por várias tentativas de soluções.

Nos primeiros estágios do desenvolvimento do cálculo diferencial, "a determinação de valores extremos foi reconhecida como uma aplicação útil e importante" (BARON; BOS, 1985, p. 3). Para encontrar máximos e mínimos, Pierre de Fermat (1607-1665) desenvolveu um método em que encontrava geometricamente os pontos onde a reta tangente ao gráfico tinha inclinação nula, método este, utilizado ainda hoje. Suas ideias constituíram o embrião do conceito de derivada, o qual só foi estabelecido, mais tarde, por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) em seu livro *Résumé des leçons données a l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infitesimal*, publicado em 1823 (BARON; BOS, 1985).

A técnica da determinação de valores extremos foi formulada, por volta de 1690, e apresentada no primeiro livro didático sobre o Cálculo Diferencial, *Analyse*, de Marquês de l'Hôpital (1661-1704). Conforme l'Hôpital, em um valor máximo ou mínimo, "se certas quantidades mudam continuamente de positivo para negativo, elas devem passar por zero ou por infinito" (BARON; BOS, 1985, p. 5). Este argumento, diz respeito a casos que são tratados na linguagem moderna, considerando-se pontos nos quais a derivada é zero ou a função não é diferenciável.

Atualmente, os problemas de máximos e mínimos aparecem em diferentes contextos e, em geral, associados à análise do comportamento do gráfico de uma função e a problemas de otimização, em que se busca maximizar ou minimizar uma função em um determinado domínio. A compreensão dos conceitos envolvidos na solução destes problemas é imprescindível aos estudantes de diferentes áreas de conhecimento, especialmente das ciências naturais, exatas e tecnológicas, entre outras, em que as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral estão presentes. Além do mais, a compreensão das ideias que contribuíram para a evolução de conceitos chaves do Cálculo é essencial na formação de futuros professores de matemática que irão atuar no ensino superior.

Segundo D'Ambrósio (2013), ninguém pode contestar que o professor de matemática deve ter o conhecimento de sua disciplina. Para ele, a "transmissão deste conhecimento por meio do ensino, no presente, depende de sua compreensão de como esse conhecimento se originou e quais as principais motivações para o seu desenvolvimento, o que se aprende no passado" (D'AMBRÓSIO, 2013, p. 3).

Ao prefaciar o livro de Beltran, Saito e Trindade (2010, p. 7), Goldfard enfatiza que "conhecer as ciências em seus contextos históricos enriquece a compreensão conceitual, motiva estudantes e agrega ao aprendizado prazer e curiosidade". A história da ciência como parceira do ensino de ciências, e particularmente da matemática, tem ganhado, a cada ano, presença, relevância e interesse por todos os que estão preocupados com a melhoria da aprendizagem dos estudantes em todos os níveis, fundamental, médio e superior (BELTRAN; SAITO; TRINDADE, 2010).

Para Roque (2014, p. 183), o papel da história no ensino de matemática constitui-se como uma forma de "explicitar o sistema de justificação da matemática, com a qual trabalhamos hoje, exibindo sua historicidade", possibilitando aos estudantes "conhecer e compreender o trabalho de matemáticos de outras épocas, suas visões sobre a matemática, ou o modo como argumentavam".

Neste sentido, é que realizamos esta pesquisa, cujo objetivo é apresentar um estudo histórico sobre máximos e mínimos de funções, explorando os métodos utilizados por Fermat e l'Hôpital como forma de entender como os argumentos, utilizados por eles, foram fundamentais na definição do conceito de derivada e na teoria utilizada no Cálculo para a determinação de máximos e mínimos de funções. Também, selecionamos alguns problemas históricos, que foram expostos seguindo a teoria moderna do Cálculo para a sua resolução. Este estudo é de cunho teórico, sendo desenvolvido por meio de uma pesquisa bibliográfica em livros, artigos, teses e dissertações que abordam tópicos da história do Cálculo.

O método de Fermat para a determinação de máximos e mínimos

Em 1629, o matemático Pierre de Fermat estava interessado em resolver problemas que consistiam em maximizar determinadas grandezas que dependiam de uma variável. Nesse sentido, Fermat desenvolveu um método bastante eficiente para resolver alguns de seus problemas. Segundo Pires (2004) tal método foi baseado nos trabalhos de Kepler sobre a melhor forma a dar aos barris de vinho, nos quais Kepler afirma que perto do máximo qualquer variação parece insensível.

O método de Fermat pode ser descrito da seguinte forma: suponhamos que se deseje achar os valores máximo ou mínimo de uma expressão $f(A)$, usando-se a notação funcional moderna, mas denotando-se a variável por A. Fermat seguia a notação de indicar incógnitas ou variáveis por vogais e quantidades conhecidas ou constantes por consoantes. Façamos agora a substituição de A por $A+E$. Para Fermat, E era uma incógnita cujo valor era pequeno em relação a A e, as quantidades $f(A)$ e $f(A+E)$ eram aproximadamente iguais. Na verdade, ele considerava que $f(A+E)=f(A)$ e cancelava todos os termos possíveis de ambos os membros da equação; dividia ambos os membros por E e desprezava todos os termos que ainda contivessem E (BOYER, 1993).

Em símbolos modernos, o método de Fermat, consiste em encontrar A tal que

$$\left[\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right]_{E=0}=0.$$

Esta equação nos diz que $f'(A)=0$, ou seja, a derivada de f em A deve ser igual a zero. Esta é a condição necessária para que uma função diferenciável tenha um máximo ou mínimo num intervalo aberto.

Um dos problemas escolhidos por Fermat foi o de expressar um número conhecido como soma de dois números cujo produto fosse o maior possível. Assim, se B é o número conhecido e A é uma parcela incógnita, então a expressão que representa o produto é $f(A)=A(B-A)$. Para encontrar um máximo para $f(A)$, seguimos o método de Fermat:

- $f(A+E)=(A+E)\cdot[B-(A+E)]=AB-A^2+EB-2AE-E^2$
- $\frac{f(A+E)-f(A)}{E}=B-2A-E$

- $\left[\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right]_{E=0} = B - 2A$

Fazendo este resultado igual a zero, Fermat concluiu que $A = \frac{B}{2}$. Assim, $f\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{B}{2} \cdot \frac{B}{2} = \frac{B^2}{4}$ é o valor máximo de $f(A)$.

Observamos que este procedimento não prova que realmente o valor obtido para A maximiza $f(A)$, apenas determina os chamados números críticos. Conforme Boyer (1993) está claro, a partir de seu trabalho, que Fermat não fazia distinção entre máximo e mínimo, mas como ele limitava sua atenção a problemas bem comportados, aparentemente deixou de descobrir que os números críticos não são necessariamente pontos de máximo ou de mínimo.

Vejamos, por exemplo, o caso da função $f(x) = x^3$. Usando o método de Fermat, temos que $\frac{(x+E)^3 - x^3}{E} = 0$, ou seja, $\frac{3x^2E + 3xE^2 + E^3}{E} = 0$.

Assim $3x^2 + 3xE + E^2 = 0$. Desprezando os termos que contem E, obtemos $3x^2 = 0$. Logo $x = 0$. No entanto, é sabido que $x = 0$ não é um valor extremo de f, haja vista que $f(x) = x^3$ é uma função crescente em todos os números reais.

Observamos que na linguagem atual, o método de Fermat consiste em obter um valor de x em que $f'(x) = \lim_{E \to 0} \frac{f(x+E) - f(x)}{E} = 0$. Assim, usando este método, Fermat mostrou que $f'(x)$ (na linguagem atual) representava a tangente a $f(x)$ e afirmou que o método poderia ser aplicado a qualquer curva. Suas ideias constituíram o embrião do conceito de derivada, o que levou Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) a considerá-lo o inventor do Cálculo.

A regra de valores extremos de l'Hôpital

Antes da criação do Cálculo Diferencial, o problema da determinação de tangentes a uma curva dada foi estudado por muitos matemáticos, tendo interessado até alguns geômetras da antiguidade como Euclides, Arquimedes e Apolônio (CARVALHO, 1919). Segundo Carvalho (1919), foi nesse contexto que o *folium* de Descartes, a curva dada implicitamente pela equação $x^3 + y^3 = axy$, com $a > 0$, obteve destaque, fazendo com que Descartes pudesse afirmar que um dos métodos de determinação de tangentes proposto por Fermat não era totalmente eficaz. No entanto, posteriormente Fermat desenvolveu um método que possibilitou encontrar tangentes as curvas dadas implicitamente. Sendo assim, o *folium* de Descartes tornou-se um exemplo importante para se testar a validade de métodos infinitesimais.

No primeiro livro didático sobre o Cálculo Diferencial, o *Analyse*, l'Hôpital argumenta que se temos um valor máximo para uma variável y que depende de uma variável x então à esquerda desse valor, dy é positivo e, à direita, é negativo. Portanto, no valor máximo, $dy = 0$ ou $dy = \infty$. O caso para um valor mínimo é análogo, notando que devemos ter que à esquerda desse valor, dy é negativo e, à direita, é positivo. O motivo disto é que, segundo Baron e Bos (1985, p. 5), estava assumido por l'Hôpital que "se certas quantidades mudam continuamente de positivo para negativo, elas devem necessariamente passar por zero ou por infinito".

Um dos exemplos de aplicações da regra para valores extremos, considerado por l'Hôpital, é o da curva dada pela equação

$$x^3 + y^3 = axy,$$

chamada *folium* de Descartes (BARON; BOS, 1985). O nome *folium* vem do latim que significa folha.

A regra consiste nos seguintes passos:

- Substituir x e y por $x + dx$ e $y + dy$, respectivamente, sendo dx e dy diferenças infinitamente pequenas, obtendo,

$$(x + dx)^3 + (y + dy)^3 = a(x + dx)(y + dy)$$

- Desprezar os termos que contém $dxdy$, $dxdx$ e $dydy$, obtendo,

$$3xxdx + 3yydy = axdy + aydx.$$

Assim, $dy = \frac{aydx - 3xxdx}{3yy - ax}$.

Fazendo agora $dy = 0$, obtemos $aydx = 3xxdx$, donde vêm que $y = \frac{3xx}{a}$; substituindo esse valor na equação $x^3 + y^3 = axy$ achamos $x = \frac{a\sqrt[3]{2}}{3}$; assim $y = \frac{a\sqrt[3]{4}}{3}$ é a maior das ordenadas.

No entanto, o método não diz que quando ocorre $dy = 0$ ou $dy = \infty$, o valor da ordenada encontrada é o maior ou menor possível. Por exemplo, se supomos que $dy = \infty$, obtemos $x = 0$ e $y = 0$, ou $x = \frac{a\sqrt[3]{4}}{3}$ e $y = \frac{a\sqrt[3]{2}}{3}$ e em nenhum dos casos a ordenada representa um valor máximo ou mínimo.

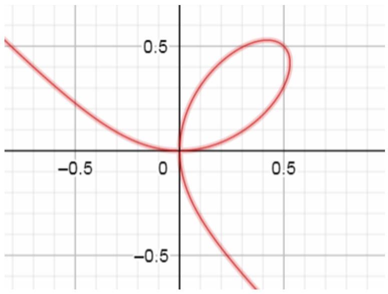
O segundo exemplo de l'Hôpital mostra a aplicação do critério $dy = \infty$ para a curva dada por

$$y - a = a^{\frac{1}{3}}(a - x)^{2/3}.$$

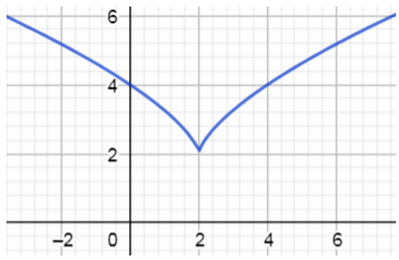
Neste caso, $dy = \frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$. Ao igualarmos primeiramente a zero, resulta em $-2dx\sqrt[3]{a} = 0$, o que não possibilita a determinação de um valor para x. Fazendo $dy = \infty$, resulta em $3\sqrt[3]{a - x} = 0$, de onde deduzimos que $x = a$ é o valor que torna y mínimo. Para $x = a$, o valor de y é a.

Na Figura 1, estão apresentados os gráficos das curvas utilizadas nos exemplos de l'Hôpital.

Figura 1 - Gráfico das curvas utilizadas nos exemplos de l'Hôpital.



(a) $x^3 + y^3 = axy$ com $a = 1$



(b) $y - a = a^{\frac{1}{3}}(a - x)^{2/3}$ com $a = 2$

Fonte: Elaborada pelos autores (2020).

Podemos observar, na Figura 1 (a), que a curva que representa o *folium* de Descartes faz um laço no primeiro quadrante com um ponto duplo na origem e é simétrica para $y = x$. Para $a = 1$, o valor da abscissa que faz com que a ordenada seja máxima é $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{3} = 0{,}42997\ldots$ e a ordenada máxima é $y = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} = 0{,}52913\ldots$. Na Figura 1 (b), a curva apresenta um ponto com bico que corresponde ao ponto do gráfico onde a derivada não existe; com $a = 2$, a função apresenta um valor mínimo igual a $y = 2$, quando $x = 2$.

Observamos que no primeiro exemplo, a solução envolve, no cálculo moderno, o teorema das funções implícitas. Isto ilustra o fato de que o cálculo primitivo era um cálculo de variáveis e suas relações, ao invés de ser um cálculo de funções. Além do mais, o argumento de l'Hôpital de que se certas quantidades mudam continuamente de positivo para negativo, elas devem passar por zero ou por infinito, representa no método moderno, o teste da derivada primeira para a determinação de extremos locais.

Resultados sobre a determinação de máximos e mínimos

A partir do desenvolvimento do Cálculo e sua formalização por meio da Análise, existem atualmente resultados eficientes sobre a determinação de máximos e mínimos de funções reais. Tais resultados têm por base a noção de derivada e teoremas relacionados a esta, destacando-se o teorema de Fermat, o teorema do valor médio de Lagrange, o teste da derivada primeira e o teste da derivada segunda. Vejamos então o desenvolvimento de alguns teoremas que nos serão úteis para que possamos estudar as aplicações presentes na próxima seção. As demonstrações destes resultados podem ser encontradas em Stewart (1999).

Teorema do valor extremo: Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em números c e d em $[a, b]$.

Observamos que o teorema do valor extremo afirma que uma função contínua definida em um intervalo fechado tem um valor máximo e um mínimo; contudo, não diz como encontrar esses valores extremos. O teorema a seguir, nos mostra que, para funções diferenciáveis, os pontos de máximo e de mínimo são tais que as retas tangentes são horizontais e, portanto, a derivada é nula nesses pontos.

Teorema de Fermat: Se f tiver máximo ou mínimo local em c, e se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

Cabe destacar que a recíproca do teorema de Fermat, em geral, é falsa. Quando $f'(c) = 0$, nem sempre é verdade que f tem máximo ou mínimo em c. Além disso, podem existir valores extremos mesmo quando $f'(c)$ não existir. O teorema de Fermat sugere que devemos pelo menos começar procurando por valores extremos de f nos números c onde $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe. Esses números são chamados de números críticos de f. Assim, se f tiver um máximo ou mínimo local em c, então c é um número crítico de f. E, portanto, para encontrarmos um máximo ou um mínimo absoluto de uma função contínua f definida no intervalo fechado $[a, b]$ podemos seguir as seguintes etapas:

- Encontrar os valores de f nos números críticos de f em (a, b).
- Encontrar os valores de f nas extremidades do intervalo $[a, b]$.
- O maior valor entre as duas primeiras etapas é o valor máximo absoluto, enquanto que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

O teorema a seguir, foi enunciado por Lagrange e permite observarmos, geometricamente, que se uma função é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), existe um número c em (a, b), tal que a inclinação da reta tangente no ponto $(c, f(c))$ é igual a inclinação da reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $\big(b, f(b)\big)$. Sua importância reside no fato de ele nos possibilitar obter informações sobre uma função a partir de dados sobre sua derivada.

Teorema do valor médio de Lagrange: Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe um número c em (a, b) tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Uma das informações, obtida por meio do sinal da derivada de uma função, diz respeito ao crescimento e decrescimento da função, conforme a seguinte proposição:

Proposição: Se $f'(x) > 0$ para todo x em um intervalo I, então f é crescente nesse intervalo. Similarmente, se $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo I, então f é decrescente nesse intervalo.

Lembremos de que se f tem máximo ou mínimo locais em c, então, pelo teorema de Fermat, c deve ser um número crítico de f, porem nem todo número crítico dá origem a um máximo ou mínimo. Consequentemente, necessitamos de um teste que nos diga se f tem ou não um máximo ou mínimo local em um número crítico. O seguinte teorema, chamado de teste da derivada primeira, nos informa se um número crítico será um ponto de máximo ou mínimo para a função f.

Teste da derivada primeira: Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

a) Se o sinal de f' mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

b) Se o sinal de f' mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

c) Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se em ambos os lados de c, f' for positivo ou negativo), então f não tem máximo ou mínimo locais em c.

Observamos que o teste da derivada primeira nos informa que uma função f tem um extremo relativo nos números críticos em que f' troca de sinal.

A derivada segunda também nos permite obter características de uma função, como, por exemplo, a concavidade e a identificação de máximos e mínimos. O teste da derivada segunda é uma consequência do teste da concavidade e serve como alternativa ao teste da derivada primeira.

Teste da derivada segunda: Suponha que f seja duas vezes diferenciável em c.

a) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, então f tem um mínimo local em c.

b) Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, então f tem um máximo local em c.

O teste da derivada segunda baseia-se na observação geométrica de que uma função f tem um máximo relativo em um número crítico c, com $f'(c) = 0$, se o gráfico de f é côncavo para baixo em um intervalo aberto contendo c, enquanto tem um mínimo relativo se é côncavo para cima. Se $f''(c) = 0$, o teste da derivada segunda é inconclusivo, podendo o ponto c ser um máximo, ou mínimo ou nenhum dos dois. Este teste também falha, quando $f''(c)$ não existe e, em ambos os casos, o teste da derivada primeira deve ser usado.

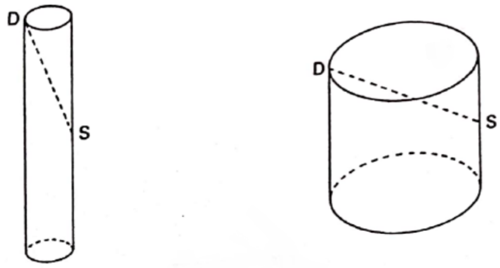
Resolução de problemas históricos pelo método do Cálculo Diferencial

Conforme mencionado, o desenvolvimento do método de Fermat teve como inspiração os trabalhos de Kepler relacionados com a melhor forma a dar aos barris de vinho para que o volume seja máximo. Neste sentido, percebemos que a resolução de problemas é fator determinante para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial. Nesta seção, veremos alguns problemas aplicados e teóricos que possuem uma abordagem histórica.

Os barris de Kepler

Nas vésperas de seu casamento, o cientista alemão Johannes Kepler (1571-1630) estava interessado em comprar vinhos para tal celebração. No entanto, durante esse período acabou percebendo que a medida usada na época para decidir o valor a ser cobrado por um barril de vinho era imprecisa, isto é, barris que armazenavam volumes distintos poderiam ter o mesmo valor. Por conta disso, buscou na matemática, aproximando um barril de vinho por meio de um cilindro, a forma que um barril devia ter para que armazenasse o maior volume, para um mesmo preço (BOYER, 1993). De acordo com Kepler, a medida que fornece o valor a ser pago é o comprimento do segmento DS, como ilustrado na Figura 2.

Figura 2 - Barris.



Fonte: Boyer (1993, p. 51).

Vejamos então uma maneira de encontrar a altura h do barril que maximiza o volume, fixados o comprimento d do segmento DS e o raio r do barril, sendo S, o ponto médio do segmento de comprimento h. Utilizando o teorema de Pitágoras, temos que $d^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + (2r)^2$, e assim obtemos, $r^2 = \frac{d^2}{4} - \frac{h^2}{16}$. De tal modo, o volume do cilindro é dado por

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{d^2}{4} - \frac{h^2}{16}\right)h = \frac{\pi d^2}{4}h - \frac{\pi}{16}h^3.$$

Para valores fixos de d e r, Kepler buscou saber qual o valor de h que daria o maior volume V. Usando métodos semelhantes ao método de Fermat acabou por descobrir que devemos ter $h = \frac{2}{\sqrt{3}}d$ (BOYER, 1993).

Agora, veremos como este problema pode ser resolvido usando os resultados do Cálculo Diferencial. Diferenciando V em relação a h, obtemos $V'(h) = \frac{\pi d^2}{4} - \frac{3\pi}{16}h^2$. Assim $V'(h) = 0$ quando $4d^2 - 3h^2 = 0$, ou seja, quando $h = \frac{2}{\sqrt{3}}d$.

Notemos que para valores positivos de h, $V'(h) > 0$, para $h \in [0, \frac{2}{\sqrt{3}}d)$ e, $V'(h) < 0$ para $h \in (\frac{2}{\sqrt{3}}d, \infty)$. Assim, pelo teste da derivada primeira, concluímos que $h = \frac{2}{\sqrt{3}}d$ é a altura que torna o volume do barril máximo.

Isto confirma o resultado proposto por Kepler, em que conhecendo a medida d, é possível obter um barril cujo volume é máximo. Kepler, naturalmente, não dispunha do conceito de derivada e tampouco de resultados bem estabelecidos como temos atualmente, mas observou que o método de usar d para calcular o preço do vinho era válido para barris austríacos, pois a forma deles atendia a condição $\frac{h}{d} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (BOYER, 1993).

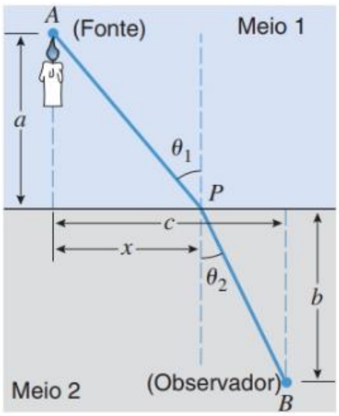
Segundo Boyer (1993), mesmo que no problema real a forma do barril se desviasse um pouco dessa proporção, o método de usar d ainda poderia ser empregado, tendo em vista que Kepler mostrou que próximo de seu máximo uma função varia lentamente. O uso intuitivo e não formal do conceito de derivada teve uma formulação mais explícita por volta de 1626, com Fermat, cujo método aproxima-se bastante dos procedimentos atuais que realizamos para achar máximos e mínimos.

O princípio de Fermat e a lei de Snell

Além de ter deixado inúmeras contribuições à Matemática, o pesquisador Pierre de Fermat dedicou-se ao estudo da Óptica. Neste contexto, o princípio de Fermat afirma que "a luz, viajando de um ponto para outro, segue aquele caminho para o qual o tempo total no percurso é mínimo" (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014, p. 307). Em Física, um meio é dito uniforme quando as propriedades físicas de seus pontos não são modificadas. Nesses meios, os caminhos de tempo mínimo e de menor distância vêm a ser iguais; portanto, a luz, se não obstruída, viaja em linha reta. Em meios uniformes, a velocidade que a luz se propaga é constante, podendo ser maior ou menor conforme a densidade do meio.

Consideremos dois meios uniformes, como água e ar, por exemplo, e um raio de luz viajando de uma fonte A em um meio para um observador B em outro meio (Figura 3). Como as velocidades nesses meios não precisam ser as mesmas o percurso de menor tempo entre A e B não é necessariamente uma reta, mas uma união de dois segmentos de reta, permitindo que a luz leve vantagem da sua maior velocidade no meio menos denso.

Figura 3 - Lei de Snell.



Fonte: Anton, Bivens e Davis (2014, p. 307).

A Lei de Refração de Snell afirma que a trajetória do raio de luz é tal que $\frac{sen(\theta_1)}{v_1} = \frac{sen(\theta_2)}{v_2}$, sendo v_1 e v_2, as velocidades nos meios 1 e 2 respectivamente e, θ_1 e θ_2, os ângulos conforme indicados na Figura 3 (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014).

Mostremos que a igualdade anterior segue da hipótese de que o caminho mínimo ocorre quando $\frac{dt}{dx} = 0$, sendo t o tempo e, x a posição no eixo x.

De fato, suponhamos que o deslocamento no meio 1 é Δs_1 e, no meio 2 é Δs_2. Neste caso, o tempo que o feixe de luz leva para ir de A até B é dado por $t = \frac{\Delta s_1}{v_1} + \frac{\Delta s_2}{v_2}$. Usando o teorema de Pitágoras, obtemos que $\Delta s_1 = \sqrt{a^2 + x^2}$ e $\Delta s_2 = \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$. Sendo assim, obtemos a seguinte expressão para t, dependendo de x,

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2},$$

cuja derivada, em relação a x, é dada por

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}.$$

Usando as hipóteses de que valem o Princípio de Fermat e que o caminho mínimo ocorre quando, $\frac{dt}{dx} = 0$ obtemos que $\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$.

Pela Figura 3, vemos que

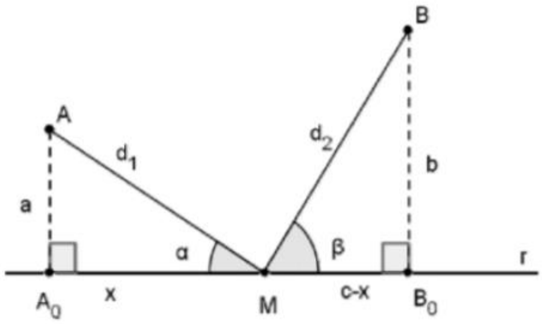
$$sen(\theta_1) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \text{ e } sen(\theta_2) = \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}.$$

E, portanto, $\frac{sen(\theta_1)}{v_1} = \frac{sen(\theta_2)}{v_2}$, como queríamos.

Um problema de Heron

Problemas como o da quadratura do círculo, que envolvem o cálculo de áreas eram estudados já na Grécia antiga. Segundo Ferreira (2012), o geômetra grego Heron de Alexandria (10 – 70), conhecido até os dias de hoje pela sua fórmula que fornece área de um triângulo por meio do comprimento dos seus lados, teria proposto a seguinte questão: dada uma reta r e dois pontos A e B do mesmo lado da reta, encontre um ponto M de r, de modo que a soma das distâncias dos segmentos AM e MB seja mínima (Figura 4).

Figura 4 - Problema de Heron.



Fonte: Ferreira (2012, p. 24).

A resolução pode ser feita da seguinte forma: consideremos A_0 e B_0 as projeções ortogonais de A e B, respectivamente, na reta r; além disso, tomemos $AA_0 = a$, $BB_0 = b$ e $A_0B_0 = c$. Agora, sejam α e β os ângulos formados pelas retas r e MA e pelas retas r e MB, respectivamente.

Observamos que $A_0M = x$, para $x \in (0, c)$, $MA = d_1$, $MB = d_2$ e seja $d = d_1 + d_2$. Usando o teorema de Pitágoras, obtemos $d_1 = \sqrt{a^2 + x^2}$ e $d_2 = \sqrt{b^2 + (c-x)^2}$. Sendo assim, a expressão para d, dependendo de x é dada por

$$d = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c-x)^2}.$$

Notemos que neste caso, temos que $d(x)$ é uma função contínua no intervalo $[0, c]$ e derivável no intervalo $(0, c)$, o que nos dá condições de usar os argumentos já apresentados e buscar pelos números críticos de d em $(0, c)$ e analisar também os valores desta função nos extremos do intervalo $[0, c]$.

Começaremos encontrando os números críticos de d. Derivando d em x, obtemos, $d'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$.

Sendo assim, $d'(x) = 0$ para valores de x tais que

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

Resolvendo esta equação, obtemos $x^2[b^2 + (c-x)^2] = (c-x)^2(a^2 + x^2)$, ou seja, $x^2b^2 = a^2(c-x)^2$. Logo $\frac{a}{x} = \frac{b}{c-x}$. De onde encontramos

$$x = \frac{ac}{b+a}.$$

Resta vermos que este é um ponto de mínimo. Para tanto, analisamos o sinal da derivada de $d(x)$. Como os valores que estamos trabalhando são todos positivos, obtemos que $d'(x) < 0$ se $x < \frac{ac}{b+a}$ e $d'(x) > 0$ se $x > \frac{ac}{b+a}$ e portando, a função d decresce para valores de x tais que $x < \frac{ac}{b+a}$ e cresce para $x > \frac{ac}{b+a}$, fazendo com que $x = \frac{ac}{b+a}$ seja um ponto de mínimo local.

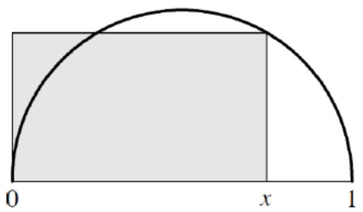
Além disso, podemos ver que este valor está no intervalo que estamos interessados. Que $\frac{ac}{b+a} > 0$ é claro, pois a, b e c são positivos; por outro lado, como $\frac{a}{b+a} < 1$, segue que $\frac{ac}{b+a} < c$, como queríamos. Por fim, uma vez que $d(0) = a + \sqrt{b^2 + c^2}$, $d(c) = \sqrt{a^2 + c^2} + b$ e $d(\frac{ac}{b+a}) = \sqrt{(a+b)^2 + c^2}$, concluímos que $d\left(\frac{ac}{b+a}\right)$ é mínimo absoluto de d em $[0, c]$.

O problema de Bernoulli

Veremos aqui a resolução do problema proposto por Johann Bernoulli por volta de 1691.

Suponha que tenhamos um retângulo, com um dos vértices sobre a semicircunferência $y = \sqrt{x - x^2}$ e que desejamos encontrar o valor de x que torne a área deste retângulo máxima (Figura 5).

Figura 5 - Retângulo com um dos vértices sobre a semicircunferência $y = \sqrt{x - x^2}$.



Fonte: Hairer e Wanner (2008, p. 97).

Com as ferramentas que o Cálculo Diferencial nos oferece, podemos resolver esse problema da seguinte forma: a área do retângulo é dada por $A(x) = xy$ onde temos $y = \sqrt{x - x^2}$ e, portanto, segue que $A(x) = x\sqrt{x - x^2}$. Assim,

$$A'(x) = \sqrt{x - x^2} + \frac{x - 2x^2}{2\sqrt{x - x^2}} = \frac{-4x^2 + 3x}{2\sqrt{x - x^2}}.$$

Dessa forma, se $x \in (0,1)$ temos $A'(x) = 0$ apenas quando $x = \frac{3}{4}$. Notemos que os extremos do intervalo $[0,1]$ não são interessantes para o problema, pois zeram a área em questão, nos dando pontos de mínimo da função área. Neste caso, o valor de x que torna a área máxima é $x = \frac{3}{4}$. Observamos que não temos pontos em $(0,1)$ em que $A(x)$ não é derivável.

A curva de Agnesi

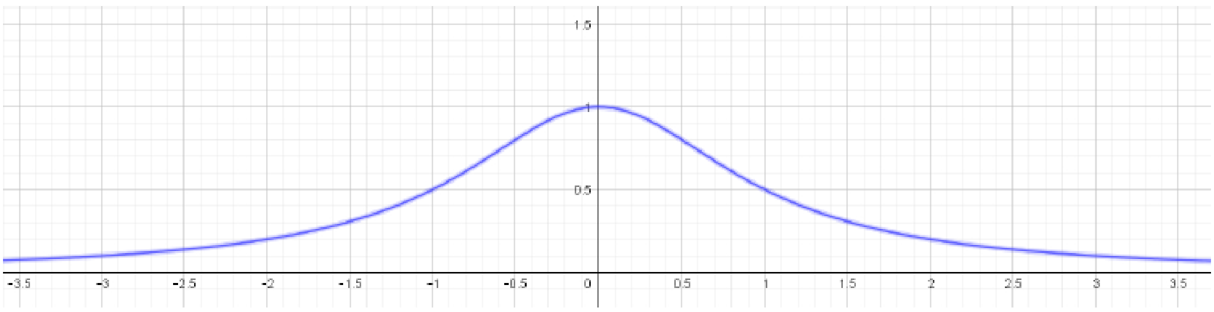
Os gráficos de $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$ em que a é uma constante positiva foram estudados primeiro pelo matemático francês Pierre de Fermat e, mais tarde, pelos matemáticos italianos Luigi Guido Grandi (1671-1742) e Maria Gaetana Agnesi (1718-1799). Qualquer uma dessas curvas é conhecida como bruxa de Agnesi. Existem várias teorias sobre a origem desse nome. Alguns sugerem que foi uma tradução errada feita por Grandi ou Agnesi do latim para o italiano; outros culpam uma tradução para o inglês do tratado de 1748 de Agnesi intitulado *Instituições Analíticas* (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007).

Com as ferramentas do cálculo moderno podemos obter informações sobre a função $f(x) = \frac{a^3}{a^2+x^2}$. Derivando, obtemos $f'(x) = \frac{-2a^3x}{(a^2+x^2)^2}$.

Portanto, teremos que $f'(x) = 0$ se e somente se $x = 0$, já que a é uma constante positiva. Além disso, temos que $f'(x) > 0$ se $x < 0$ e $f'(x) < 0$ se $x > 0$. Sendo assim, a função f é crescente em $(-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, \infty)$, fazendo com que $f(0) = a$ seja um extremo global para f. O valor máximo de f é $f(0) = a$.

Na Figura 6, está apresentado o gráfico de f, com $a = 1$.

Figura 6 - Gráfico de $y = \frac{a^3}{a^2+x^2}$ com $a = 1$.



Fonte: Elaborada pelos autores (2020).

Observamos que, neste caso, o valor máximo de f é igual a $f(0) = 1$. Além disso, o gráfico de f apresenta como pontos de inflexão $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, tendo em vista que a derivada segunda de f é $f''(x) = -\frac{2(-3x^2+1)}{(1+x^2)^3}$; o gráfico de f é côncavo para baixo para $x \in [-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ e côncavo para cima para $x \in \left[-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup [\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty]$. Temos que $f''(0) = -2 < 0$, assim pelo teste da derivada segunda também obtemos a informação de que $f(0) = 1$ é o valor máximo de f.

Considerações finais

Neste artigo, apresentamos um estudo histórico sobre máximos e mínimos de funções. Para tanto, exploramos os métodos utilizados por Fermat e l'Hôpital, e após apresentamos exemplos de problemas históricos, que foram tratados, neste trabalho, seguindo a teoria moderna do Cálculo para a sua resolução. Percebemos que os argumentos utilizados por Fermat e l'Hôpital foram fundamentais para o desenvolvimento e o estabelecimento de conceitos e teorias associadas ao Cálculo.

Acreditamos que os problemas aqui tratados podem ser estudados em cursos de Cálculo como forma de mostrar aos estudantes a noção de que, na maioria das vezes, o que é abordado em poucos parágrafos nos livros didáticos, representa um recorte de uma longa discussão repleta de experimentos e debates que perpassam décadas (LUCCAS; LUCAS, 2012).

Dentre as potencialidades pedagógicas, citadas no trabalho de Miguel (1997), destacamos a história da matemática como fonte de motivação para o ensino e aprendizagem e para a seleção de problemas práticos e curiosos a serem incorporados nas aulas de matemática, bem como, sendo um instrumento de formalização de conceitos matemáticos e que possibilita a desmistificação da matemática e a desalienação de seu ensino, dentre outras.

No entanto, é importante também, levarmos em consideração dificuldades ou obstáculos que se colocam quando da utilização da história da matemática durante as aulas. Tratar a história como algo motivador ou vinculá-la com a resolução de problemas, poderia levar o estudante a enxergar a matemática como algo que exigisse o pensamento e a seriedade e a história somente como uma concepção lúdica e recreativa, enquanto que o aspecto motivador de um problema, não reside no fato de ser histórico, mas, no tipo de relações que se estabelecem entre o desafio que o problema oferece e os interesses, valores e aptidões construídos pelos estudantes (MIGUEL, 1997).

Ademais, acreditamos que, por meio da história, podemos inserir os estudantes no universo do conhecimento mais aproximado do saber científico, mostrando que há quebras na rigidez do pensamento matemático construído ao longo de sua formação (BARROSO, 2009) e que a matemática não se dá em um único momento e depende de problemas em que as sociedades e a comunidade científica de cada época propõem como relevantes.

Sendo assim, a história da matemática, pode ser utilizada para apresentar, aos estudantes, como os conceitos matemáticos se desenvolveram ao longo dos tempos, de forma a mostrar os obstáculos, as tentativas de formalizações e o longo caminho que os matemáticos tiveram que trilhar para atingir uma estrutura considerável até chegar ao conhecimento que é ensinado atualmente.

Tendo isto em mente, vislumbramos, com este estudo, a possibilidade de desenvolver os conteúdos contextualizados historicamente como uma estratégia para favorecer o ensino e a aprendizagem do Cálculo.

Referências

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**, v. 1, 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. v. 2, 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

BARON, Margaret E.; BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática**: origens e desenvolvimento do cálculo. Tradução de J. R. B. Coelho, R. Maier e M. J. M. M. Mendes. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BARROSO, Natália Maria Cordeiro. **Um modelo de ensino dos conceitos de Cálculo para os cursos de Engenharia fundamentado em uma epistemologia histórica e baseado na metodologia da Engenharia Didática**: validação por meio do conceito de integral. 2009. 147 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Teleinformática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2009.

BELTRAN, Maria Helena Roxo; SAITO, Fumikazu; TRINDADE, Laís dos Santos Pinto (Orgs). **História da Ciência**. Tópicos atuais. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

BOYER, Carl B. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula - Cálculo**. Tradução de H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1993.

CARVALHO, A. S. Gomes de. **A teoria das tangentes antes da invenção do cálculo diferencial**. 1919. 56 p. Tese (Doutorado em Ciências Matemáticas) – Universidade do Porto, Coimbra, 1919.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática?** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.

D’AMBROSIO, Ubiratan. Priorizar História e Filosofia da Matemática. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, Costa Rica, v. 8, n. 11, p. 175-186, 2013.

FERREIRA, Belmiro da Silva. **Problemas de máximos e mínimos**. 2012. 84 p. Dissertação (Mestrado para Professores) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012.

HAIRER, Ernst; WANNER, Gerhard. **Analysis by Its History**. New York: Springer, 2008.

LUCCAS, Simone; LUCAS, Lucken Bueno. Abordagem histórico-epistemológica como aporte metodológico para o ensino do conhecimento científico e matemático. **Perspectivas da Educação Matemática**, Campo Grande (MS), v. 5, n. 10, p. 107-121, 2012.

MIGUEL, Antonio. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**, Campinas (SP), v. 5, n. 2, p. 73-106, 1997.

PIRES, José Agostinho Lopes. **Estudo histórico sobre a evolução do cálculo diferencial no século XVII**. 2004. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, 2004.

ROQUE, Tatiana. Desmascarando a equação. A história no ensino de que matemática? **Revista Brasileira de História da Ciência**, Rio de Janeiro (RJ), v. 7, n. 2, p. 167-185, 2014.

STEWART, James. **Single variable calculus**. Pacif Grove: Brooks/Cole,1999.

Recebido em: 14 / 04 / 2021
Aprovado em: 05 / 06 / 2021