BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática
ECEEM Encontro Cearense de Educação Matemática

ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v8i23.5132

TRISSECÇÃO DO ÂNGULO OBTUSO COM ORIGAMI: UM OLHAR PARA A HISTÓRIA E A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

TRISSECTION OF THE OBTUSION ANGLE WITH ORIGAMI: A LOOK AT HISTORY AND MATHEMATICAL RESEARCH

Carolina Yumi Lemos Ferreira Graciolli[1], Carolina Cordeiro Batista[2], Rodolfo Masaichi Shintani[3]

RESUMO

Neste texto apresentamos o problema da trissecção do ângulo, conforme tratado no método elaborado pelo matemático francês, Jacques Justin, com o objetivo de expor uma proposta para investigação desse problema em sala de aula por meio de origami. Para isso, iniciamos a discussão trazendo um breve relato histórico acerca da constituição da matemática como um campo científico, bem como do contexto que levou ao surgimento dos problemas clássicos da geometria. Destacamos, dentre eles, o problema da trissecção do ângulo e seguimos explicitando aspectos relativos às possíveis motivações para o seu surgimento e à impossibilidade de sua resolução por meio da régua e do compasso não graduados. Como alternativa para mostrá-lo, sem recorrer aos instrumentos utilizados pela geometria euclidiana, apresentamos uma possibilidade que se utiliza do origami. Ademais, discutimos modos de desenvolver habilidades e competências citadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e de favorecer a aprendizagem de conteúdos previstos no currículo escolar – como aqueles relativos à semelhança e à congruência de triângulos – por meio de um trabalho de investigação matemática, no qual, a partir das dobras realizadas no papel para verificar o problema da trissecção, sugerimos que os alunos sejam desafiados a levantar e a testar hipóteses para buscar soluções para o problema a partir das regularidades identificadas. Nessa postura de levantar hipóteses, testar e mostrar, compreendemos que há a possibilidade de o trabalho de sala de aula, ainda que seja dado com um nível menor de dificuldade, tornar-se mais próximo do trabalho desenvolvido por matemáticos profissionais. Como considerações finais, destacamos que a investigação matemática atrelada ao trabalho com origami abre possibilidades para o desenvolvimento de tarefas que dão um novo significado à matemática escolar.

Palavras-chave: Dobradura; Ensino Médio, Problema da Trissecção; Educação Matemática.

[1] Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Bolsista CAPES, Rio Claro, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Av 20A, 1196, apto. 8, Vila Indaiá, Rio Claro, São Paulo, Brasil, CEP: 13506-710. E-mail: carolina.graciolli@unesp.br.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3763-4157.

[2] Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Expedicionário Dilermando de Oliveira Cornetti, 7, Portal das Colinas, Guaratinguetá, São Paulo, Brasil, CEP: 12516-260. E-mail: carolina.batista@unesp.br.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-0923-647X.

[3] Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Endereço de correspondência: Rua Bartolomeu Bueno, 171, Nova Guará, Guaratinguetá, São Paulo, Brasil, CEP: 12515-560. E-mail: rodolfo.shintani@gmail.com.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-7036-2897.

ABSTRACT

In this text we present the problem of angle trisection, using the method developed by the French mathematician, Jacques Justin, with the aim of exposing a proposal for investigating this problem in the classroom by means of origami. To this end, we discuss a brief historical account of the constitution of mathematics as a scientific field, as well as the context of the classical problems of geometry. Among these problems, we highlight the problem of angle trisection and we explain aspects related to the motivations of the problem and the impossibility of solving it by using an ungraded ruler and compass. As an alternative to verify it, without resorting to the instruments used by euclidean geometry, we present a possibility that uses origami. In addition, we discuss ways to develop skills and competences foreseen in the "Base Nacional Comum Curricular" (BNCC) and to favor the learning of contents provided in the school curriculum, for example, those related to the similarity and the congruence of triangles, through mathematical investigation, in which, based on the folds made on the paper to verify the problem of trisection, it is proposed that students be challenged to raise hypotheses and test them to seek solutions to the problem based on the regularities. As final considerations, we highlight that the mathematical investigation linked to the work with origami can open possibilities for the development of tasks that give a new meaning to school mathematics.

Keywords: Paper folding; High School, Trisection Problem; Mathematical Education.

Introdução

Kant (2015) afirma em sua obra *Crítica da razão pura* que a matemática, a lógica e a física são campos de conhecimento que se tornaram científicos, pois conseguiram adequar seus estudos a um nível racional. Para o autor, a "*matemática* e a *física* são os dois conhecimentos teóricos da razão que devem determinar seus objetos *a priori*, a primeira de modo inteiramente puro, a última de modo pelo menos parcialmente puro" (KANT, 2015, p. 26).

Na continuidade do texto, Kant afirma que o caminho enveredado pela matemática para se tornar um conhecimento científico não foi simples e que ela se iniciou com os matemáticos gregos, isto é, "a matemática entrou no caminho seguro da ciência já nos tempos mais antigos que a história da razão humana alcança, junto ao admirável povo grego" (KANT, 2015, p. 26). Essa afirmação nos lança alguns questionamentos, por exemplo, por que os gregos são apontados como os inauguradores de uma matemática científica?

Segundo relatos do autor (KANT, 2015), é devido ao caráter peculiar e particular que a matemática tomou junto aos matemáticos gregos. De fato, quando comparada à matemática desenvolvida em outras civilizações antigas, como a egípcia e a dos povos da Mesopotâmia, compreendemos que a matemática grega enveredou-se por um caminho distinto, pois ela não prezava as aplicações práticas, uma vez que o seu objetivo era demonstrar, isto é, mostrar por uma argumentação lógica e axiomática as razões de uma determinada preposição geométrica. Esse entendimento é corroborado por Bicudo (1998, p. 307), quando afirma que

> um dos mais importantes capítulos da história da matemática, embora bem pouco conhecido, é a transformação do primitivo conhecimento matemático empírico dos egípcios e babilônios na ciência matemática grega, dedutiva sistemática, baseada em definições e axiomas.

Esse modo peculiar de produção de conhecimento dos gregos tem seu ápice no conjunto de 13 livros que nos chegaram como *Os Elementos*, de Euclides. Nessa obra, por meio de nove noções comuns, um conjunto de definições e cinco axiomas, o autor sustenta 465 preposições matemáticas (DOMINGUES, 2002). Cabe destacar que a geometria euclidiana se vale de construções feitas com régua e compasso não graduados, embora as motivações do uso desses instrumentos ainda não estejam claras aos historiadores da matemática (ROQUE, 2012).

Nesse contexto, os *problemas clássicos da geometria* – o problema da duplicação, o da trissecção do ângulo e o da quadratura do círculo[4] – chamaram a atenção dos geômetras, que provaram, durante o século XIX, que eles não poderiam ser demonstrados por meio dos instrumentos utilizados pela geometria euclidiana, isto é, da régua e do compasso não graduados (STEWART, 2015).

Dentre os três, escolhemos nos ater ao *problema da trissecção do ângulo*, relativamente aos ângulos obtusos, considerando que o caso de ângulos agudos foi discutido em Graciolli, Batista e Shintani (2020). Com isso, nosso objetivo é expor uma proposta para verificar esse problema em sala de aula por meio de um trabalho de investigação com origami.

O problema da trissecção do ângulo

O *problema da trissecção do ângulo* consiste em: dado um ângulo qualquer, dividi-lo em três ângulos congruentes entre si, utilizando apenas a régua e o compasso não graduados (SANTANA, 2013). A restrição ao uso da régua e do compasso, de acordo com Roque (2012), é uma imposição posterior à criação do problema, dado que diversos matemáticos gregos tentaram buscar soluções sem considerar tal restrição. Na verdade, ela não se limita apenas ao problema da *trissecção*, pois "a diversidade de métodos utilizados na resolução de problemas geométricos até o século III a. E. C. revela que, até esse estágio do desenvolvimento matemático, o importante era resolver os problemas por qualquer técnica disponível" (ROQUE, 2012, p. 209).

Tal observação enfatiza as incertezas sobre o *problema da trissecção*, pois, diferentemente dos outros dois *problemas clássicos* que contam com motivações bem definidas, as que originaram o problema da *trissecção* não são claras. A esse respeito, Mendeiros e Guanabara (2017, p. 6) afirmam que "as origens do problema da trissecção do ângulo são obscuras". Contudo, duas motivações podem ser consideradas: *uma*

[4] *O problema da duplicação* consiste em duplicar o volume de um cubo dado, ou seja, dado um cubo deseja-se encontrar outro cubo, cujo volume seja o dobro daquele já conhecido. Ao que tange *o problema da quadratura*, ele consiste na ideia de que a partir de um círculo dado, busca-se um quadrado que tenha a mesma área desse círculo (SANTANA, 2013).

complicação natural da bissecção de um ângulo ou *a relação deste problema com a construção de polígonos regulares.*

Quanto à primeira hipótese, a de *uma complicação natural da bissecção de um ângulo,* Roque (2012, p. 202) ressalta que

> dividir um ângulo em três partes iguais era um dos problemas mais importantes da geometria grega. Sabemos dividir um ângulo em duas partes iguais com régua e compasso, mas muitas foram as tentativas frustradas de encontrar um procedimento análogo para a trissecção do ângulo.

Em contrapartida, Hefez e Villela (2012) problematizam que os gregos conheciam a construção de diferentes polígonos regulares inscritos em uma circunferência e que eles utilizavam o método da bissecção do ângulo central do polígono para construir um novo polígono com a quantidade de lados dobrada. Contudo, os gregos não conseguiam construir com régua e compasso todos os polígonos inscritos, uma vez que a depender do número de lados do polígono a construção era desconhecida. Sendo assim, também é possível conjecturar que a motivação da *trissecção do ângulo* possa ser advinda de tentativas de construções, com régua e compasso, de alguns polígonos inscritos.

Considerando as possibilidades abertas para a verificação da trissecção do ângulo, por meio de instrumentos não utilizados pela geometria euclidiana, trazemos nas próximas seções o modo pelo qual isso pode ser feito com o origami.

Um olhar para a trissecção do ângulo com origami

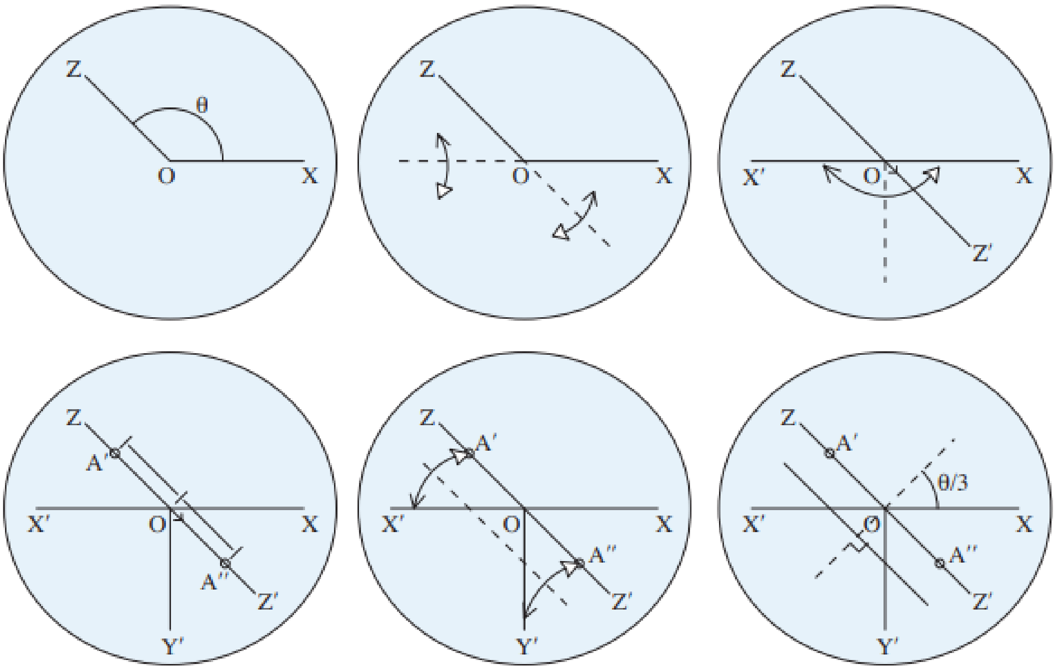
O origami é a arte de dobrar papéis que também é conhecida como dobradura. Segundo Lang (1996), as artes são feitas a partir de dobras em um pedaço de papel e têm como objetivo representar animais, figuras humanas, objetos, elementos da natureza, entre outros. Além disso, de acordo com Monteiro (2008), as dobraduras tornaram-se objeto de estudos e pesquisas em diversas áreas do conhecimento, por exemplo, na medicina, na qual os padrões de dobras são explorados para o desenvolvimento de pinças cirúrgicas, músculos artificias e *stents* cardíacos (TEIXEIRA; BOTURA JUNIOR; YAMADA, 2020).

Na matemática, descobriu-se que todas as dobras são questões de simetria, em específico, são uma reflexão em relação à uma reta, representada pelo vinco da dobra. Segundo Hull (2020), o origami passou a ser analisado geometricamente, de modo que as possíveis operações de construção com dobras no papel foram enunciadas pela primeira vez por Jacques Justin, em 1984. Ainda de acordo com Hull (2020), diversos pesquisadores elaboraram listas de operações – ou axiomas – que foram modificadas ao longo dos anos. Porém, foi comprovado que para caracterizar todas as construções de origami são necessárias as operações: 1) "dadas duas linhas, podemos localizar seu ponto de intersecção, se houver"; e 2) "dados dois pontos $P1$ e $P2$ e duas linhas $l1$ e $l2$, podemos, sempre que possível, dobrar de forma que $P1$ esteja sobre $l1$ e, também, $P2$ esteja sobre $l2$" (HULL, 2020, p. 23, tradução nossa) [5]. A segunda operação em questão permite trissecionar o ângulo e se constitui como o principal diferencial entre a geometria do origami e a geometria euclidiana.

Para explicitar um modo de se resolver o problema da trissecção do ângulo com origami, apresentaremos o método elaborado em 1986 por Jacques Justin, que é válido para a trissecção de ângulos obtusos. De acordo com Justin (1989), seja um pedaço de papel, para encontrarmos um terço de um ângulo obtuso $X\hat{O}Z$, temos que prolongar os segmentos $\overline{ZO}$ e $\overline{OX}$ (como ilustra o segundo passo na Figura 1), gerando os segmentos $\overline{ZZ'}$ e $\overline{X'X}$. Na sequência, dobramos um segmento perpendicular a $\overline{X'X}$, passando pelo ponto O[6], para criarmos o segmento $\overline{OY'}$, e marcamos dois pontos equidistantes do ponto O sobre o segmento $\overline{ZZ'}$ (na Figura 1 esses pontos são A' e A''). Com a criação dos pontos, realizamos uma dobra na qual o ponto A' esteja sobre $\overline{X'X}$, ao mesmo tempo em que A'' esteja sobre $\overline{OY'}$ (dobra possível pela segunda operação destacada anteriormente, a qual permite alinhar dois pontos a duas retas). Para finalizar, dobramos uma perpendicular à última dobra realizada, passando por O, e a divisão do ângulo $X\hat{O}Z$ está feita.

[5] "Given two lines, we can locate their point of intersection, if it exist" e " Given two points P1 and P2 and two lines L1 e L2, we can, whenever possible, make fold that places P1 onto L1 and also places P2 onto L2" (HULL, 2020, p. 23)
[6] Para realizar a dobra, basta sobrepomos os segmentos $\overline{X'O}$ e $\overline{OX}$.

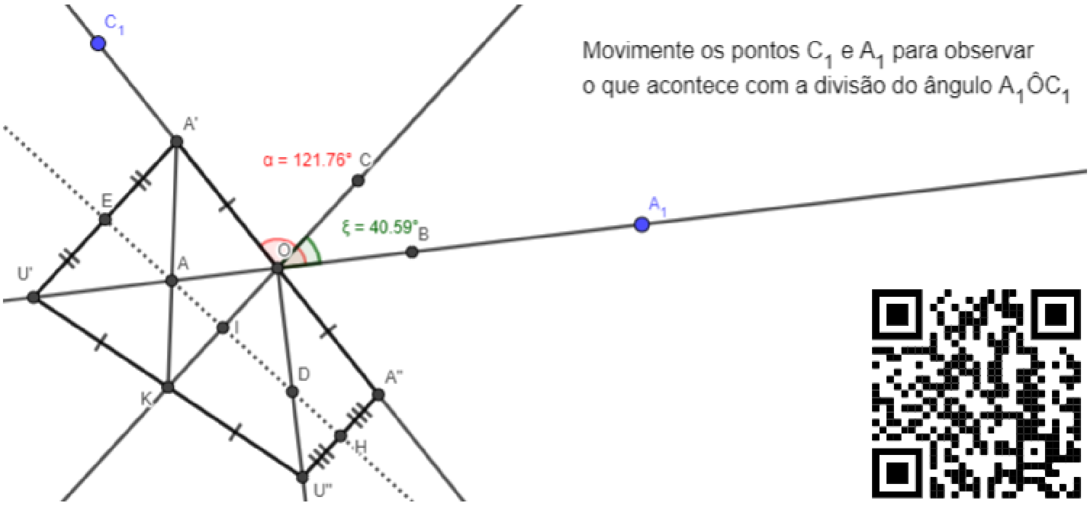
Figura 1 - Passos para a trissecção de um ângulo obtuso.



Fonte: Lang (2010).

Uma maneira de verificar se com os passos descritos, efetivamente, dividimos o ângulo $X\hat{O}Z$ em três partes congruentes, é por meio da sobreposição dos ângulos equivalentes a um terço, isto é, se dobrarmos os três ângulos que correspondem a um terço, uns sobre os outros, eles devem possuir a mesma amplitude. Outra ideia é utilizar o transferidor para medir os ângulos ou, ainda, realizar a construção no GeoGebra, conforme o exemplo que trazemos na Figura 2.

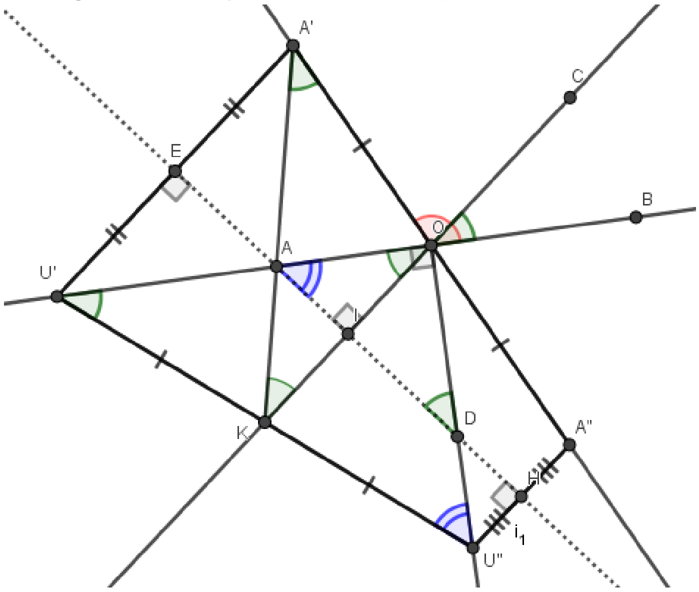
Figura 2 – Construção no GeoGebra.[7]



Fonte: Elaborada pelos autores.

É possivel, ainda, como apresenta Justin (1989), realizar uma prova geométrica. Para isso, consideramos os pontos U' e U'' (Figura 3), correspondentes às posições dos pontos A' e A'', após a realização da dobra do quinto passo (Figura 1), e K correspondente à posição do ponto O, ou seja, o ponto médio de $\overline{U'U''}$, de forma que $\overline{U'K} \equiv \overline{KU''} \equiv \overline{A'O} \equiv \overline{OA''}$.

Figura 3 - Imagem de referência para a verificação.

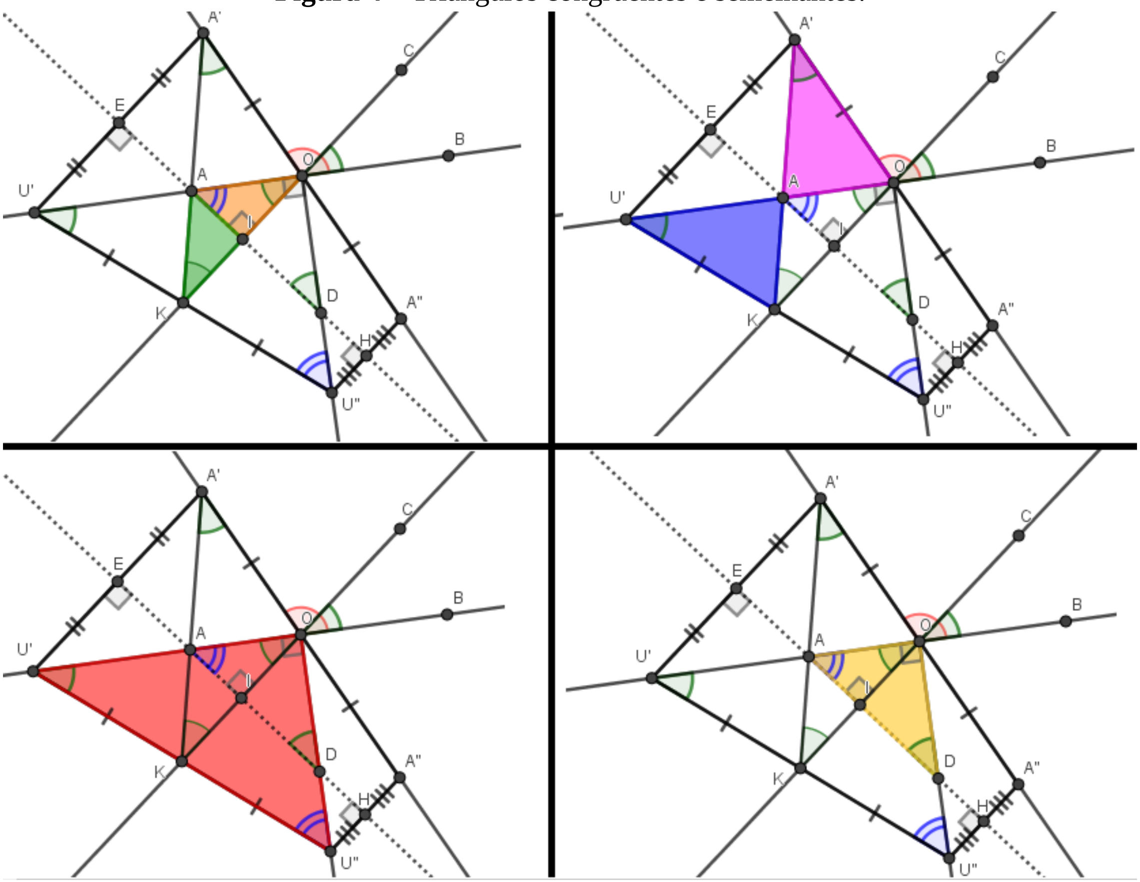


Fonte: Elaborada pelos autores.

[7] Esse exemplo pode ser acessado por meio de QrCode e também encontra-se disponível em: < https://www.geogebra.org/m/hc9ujcnq>. Acesso em: 10 abr. 2021.

Desse modo, todos os elementos são transferidos ao abrir o papel, pois a dobra em questão é considerada um eixo de simetria. Logo, $\overline{U'E} \equiv \overline{EA'}$ e $\overline{KI} \equiv \overline{IO}$, onde I é ponto de intersecção entre $\overline{CK}$ e a dobra realizada no quinto passo (Figura 1), dentre outras equivalências. Observamos que o ângulo $C\hat{O}B \equiv U'\hat{O}K$, pois são opostos pelo vértice. Com isso, se considerarmos os triângulos AIO (laranja) e AIK (verde), ilustrados na Figura 4, vemos que eles são congruentes pelo caso lado, ângulo, lado (LAL), sendo $\overline{AI}$ um lado comum, $A\hat{I}O \equiv A\hat{I}K = 90°$, por construção, e $\overline{KI} \equiv \overline{IO}$, conforme mencionado. O mesmo raciocínio pode ser considerado para os triângulos $U'AK$ (azul) e AOA' (rosa), que são congruentes, e para os triângulos retângulos $U'OU''$ (vermelho), AIO (laranja), AOD (amarelo), que são semelhantes, pelo caso ângulo, ângulo (AA).

Figura 4 – Triângulos congruentes e semelhantes.

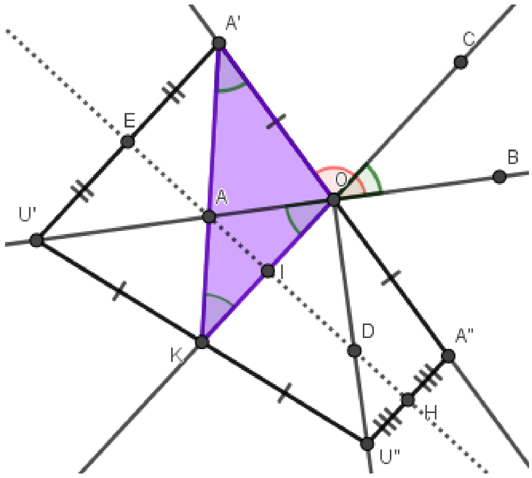


Fonte: Elaborada pelos autores.

Para finalizar, basta considerar o triângulo KOA' (roxo), na Figura 5, onde a soma dos ângulos internos é igual a 180º, isto é, $A'\hat{K}O + K\hat{O}A' + O\hat{A}'K = 180°$, mas que também é $3A\hat{O}K + A'\widehat{O}A = 180°$. Porém, $A\hat{O}B$ é ângulo raso e é composto por $B\hat{O}A'$ e

$A'\widehat{O}A$, ou seja, a soma dos ângulos internos do triângulo KOA' (roxo) é igual à soma dos ângulos que compõem o ângulo raso, $3A\hat{O}K + A'\widehat{O}A = B\hat{O}A' + A'\hat{O}A \rightarrow 3A\hat{O}K = B\hat{O}A' \rightarrow A\hat{O}K = \frac{B\hat{O}A'}{3}$. Logo, o ângulo $A\hat{O}K \equiv C\hat{O}B \equiv \frac{B\hat{O}A'}{3}$, assim como queríamos verificar.

Figura 5 – Triângulo KOA'.



Fonte: Elaborada pelos autores.

Conforme compreendemos, há nos passos descritos a possibilidade de levar para a sala de aula uma proposta em que o problema da trissecção e o origami sejam entrelaçados a um trabalho de investigação matemática. Trazemos essa discussão a seguir.

A dobradura em sala de aula

A trissecção do ângulo obtuso por meio do origami, além de permitir a retomada de aspectos históricos e a compreensão de uma possibilidade de se verificar um problema que é impossível de ser resolvido por meio de régua e de compasso não graduados, também se revela como uma abertura para a realização de práticas de sala de aula que podem favorecer o desenvolvimento de habilidades e o entendimento de conteúdos previstos no currículo.

Relativamente às habilidades passíveis de serem desenvolvidas, destacamos, por exemplo, uma das que consta na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018, p. 529) do Ensino Médio, na qual orienta-se "resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança". Conforme compreendemos, considerar o contexto em que o problema da trissecção do ângulo é trabalhado por meio do origami, utilizando-se o método apresentado na seção anterior, é um modo de tornar possível a realização de uma investigação matemática, na qual conteúdos de noções de congruência e de semelhança de triângulo sejam desenvolvidos.

No mesmo documento oficial (BRASIL, 2018) também são previstas competências a serem desenvolvidas nesse mesmo nível de escolaridade, que vão ao encontro do que é proposto neste texto, como o uso de diferentes tipos de registros – geométrico, algébrico, etc. –, tanto na busca quanto na expressão de resultados, e a investigação sobre conceitos e propriedades matemáticas para identificação, ou não, da necessidade de se realizar demonstrações para validar conjecturas levantadas na busca por soluções.

Nesse cenário, cabe ressaltar que, para favorecer o desenvolvimento dessas competências, não basta o professor apenas realizar as dobras, descrevendo seus passos aos alunos. É preciso que as possibilidades abertas pelo origami se entrelacem a um trabalho próximo de uma investigação matemática.

De acordo com Ponte (2003, p. 2) "'investigar' não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com [os quais] nos deparamos". O autor ressalta que o ato de investigar deveria estar presente tanto no desenvolvimento da prática do professor quanto na atividade dos alunos em sala de aula, pois é uma capacidade relevante para a aprendizagem matemática. No entanto, muitos professores ainda têm dificuldade em compreender o modo pelo qual podem aliar o trabalho de investigação matemática ao que precisa ser desenvolvido em sala de aula. Essa dificuldade faz com que, muitas vezes, a investigação não seja assumida em sua prática e se mostre como uma atividade mais próxima do trabalho dos matemáticos profissionais do que de sala de aula (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016).

Nesse sentido, é importante que o professor compreenda as possibilidades que tem para desenvolver habilidades e competências e expor conteúdos previstos no currículo escolar por meio da realização de investigações, considerando a atividade dos alunos e os modos de se conduzir desse trabalho.

Relativamente à atividade dos alunos, isto é, às ações que eles desenvolvem para realizar as tarefas propostas pelo professor, podemos entender como ela se dá em trabalhos como os de Ponte, Quaresma e Branco (2017). Para os autores, tarefas de investigação "têm a característica distintiva de requererem sempre um trabalho atento de interpretação da situação, a precisar ou reformular as questões a investigar e a construir representações apropriadas" (PONTE; QUARESMA; BRANCO, 2017, p. 214). Com isso, para que possam encontrar respostas para essas tarefas, é preciso que os alunos interpretem as situações propostas, buscando compreensões que lhes permitam formular estratégias para resolvê-las. Nesse caminhar, eles levantam hipóteses que, para serem aceitas ou rejeitadas, precisam ser testadas, e procuram modos de representar matematicamente seus resultados.

A investigação é, desse modo, um trabalho que também requer uma análise dos resultados, para que os alunos tenham condições de definir quais respostas são mais adequadas às tarefas, e que pode levar a demonstrações, dependendo dos conhecimentos e do ano de escolaridade em que eles se encontram. Essa postura assumida no desenvolvimento de uma investigação matemática faz com que ela tenha um estilo de conjectura-teste-demonstração que está presente no processo de construção de conhecimento matemático, seja no ambiente escolar, ou no trabalho dos matemáticos profissionais, e que faz com que esse tipo de trabalho traga "para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 23). Esse modo de compreender a investigação em sala de aula, além de fazer com que aspectos relativos à construção de conceitos e à utilização de definições e propriedades dos objetos sejam valorizados (PONTE; QUARESMA, 2017), também mostra que no contexto do ensino de matemática

> investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p. 9).

Nesse cenário, no sentido de favorecer a atividade investigativa do aluno, é importante considerar o modo pelo qual o professor realiza a condução dessas ações. Para Canavarro, Oliveira e Menezes (2014) o trabalho de investigação matemática pode ser organizado por meio de três etapas. Na primeira etapa o professor apresenta o problema, visando desafiar os alunos a buscarem modos de resolvê-lo. Em seguida, precisa dar a eles tempo para trabalhar na tarefa, individualmente ou em grupos, apoiando e garantindo que haja a participação de todos. Para finalizar, na terceira etapa, a turma toda se reúne para expor e discutir as respostas encontradas, com a orientação do professor.

A partir da compreensão das ações passíveis de serem desenvolvidas pelos alunos e orientando-se pelas etapas mencionadas, o professor pode, por exemplo, apresentar à turma o problema da trissecção do ângulo, descrevendo sua impossibilidade de ser resolvido por meio de régua e de compasso não graduados e realizar, com eles, as dobraduras, lançando-lhes o desafio de justificar o porquê das dobras feitas terem dividido o ângulo obtuso em três ângulos congruentes. Na fase de investigação, os alunos podem, então, retomar conhecimentos prévios para encontrar regularidades nas dobras que lhes possibilitem levantar hipóteses de como verificar o problema.

Relativamente aos conteúdos, Menezes e Silva (2015) explicitam alguns dos que são passíveis de serem desenvolvidos por meio de dobraduras. Dentre eles, consideramos que, além daqueles relativos à semelhança e à congruência de triângulos (já mencionados), posição relativa de retas (concorrentes, perpendiculares e paralelas), ângulos opostos pelo vértice, soma dos ângulos internos de triângulos e Teorema de Pitágoras também estão presentes no processo de dobrar o papel descrito para a resolução do problema da trissecção do ângulo obtuso e podem, portanto, ser considerados para verificar esse problema. De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 535) "os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática [sic]" e por isso vemos nas dobraduras uma abertura para a construção de novos significados a partir dos conteúdos previstos no currículo escolar.

Na etapa de discussão das respostas, o professor poderá retomar as hipóteses levantadas pelos alunos para, coletivamente, sistematizar um modo de se verificar o problema. Pode, inclusive, organizar aquela representação dada geometricamente em sua forma algébrica e lançar novos questionamentos, por exemplo, é possível trissecionar qualquer ângulo obtuso? Como faríamos para trisseccionar ângulos com amplitude maior que 180 graus?[8]

[8] Uma ideia inicial é arrastar os pontos da construção do GeoGebra, da Figura 2, e observar o que acontece quando o ângulo é maior que 180°. É possível questionar os alunos a respeito do que acontece, bem como para quais casos o método será válido.

Além disso, para Pope e Lam (2011, p. 215, tradução nossa), o ato de "perguntar 'Por que essa sequência de dobra funciona?'", enquanto o papel é manuseado, "pode levar naturalmente à prova por meio do desenvolvimento do raciocínio matemático"[9]. Por exemplo, ao questionarmos se a sequência de passos efetivamente divide um ângulo obtuso em um terço, podemos favorecer a elaboração de uma prova formal, ao sobrepor amplitudes ou medir ângulos, ou, ainda, incentivar indagações que levem a outros problemas.

Por meio desses questionamentos podemos, ainda, mostrar aos alunos que o trabalho com matemática não se reduz a apresentar respostas, mas também a assumir uma postura interrogativa que se abra a novas investigações.

Considerações Finais

A ideia de trazer para a educação básica um problema que, frequentemente, é restrito às disciplinas que fazem parte de cursos de matemática de nível superior, como, por exemplo, história da matemática, pode, além de favorecer o desenvolvimento de habilidades e de competências, e oportunizar a aprendizagem de conteúdos, tornar mais próximas da realidade do aluno situações que se deram na rotina de trabalho de matemáticos profissionais, possibilitando a construção de um novo significado para a matemática escolar.

Essa compreensão relativa à construção de novos significados se dá, ainda, porque as tarefas desenvolvidas por meio de investigação matemática – em nosso caso, com origami –, podem auxiliar no desenvolvimento do raciocínio e de novas representações – geométricas, algébricas, etc. – e procedimentos diferenciados – dobras no papel – que avançam para além de um cenário de aplicação de conteúdos e de resolução de exercícios por meio de algoritmos conhecidos previamente.

Diante do exposto, compreendemos que a possibilidade aberta pela resolução do problema da trissecção por meio do origami, bem como os aspectos históricos relativos a ele, podem lançar os alunos em um cenário de desafio e descoberta em que suas ações, ainda que não tenham a mesma complexidade do trabalho dos matemáticos profissionais, permitem redescobrir a matemática que é dada como pronta e acabada no currículo.

[9] Asking "Why does this folding sequence work?" can lead naturally to proof through the development of mathematical reasoning" (POPE; LAM, 2011, p. 215).

Referências

BICUDO, I. Platão e a matemática. **Letras clássicas**, São Paulo, n. 2, p. 301 – 315, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf>. Acesso em 7 mar. 2021.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In: PONTE, J. P. (Org.). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 217-233. Disponível em:<http://www.ie.ulisboa.pt/publicacoes/ebooks/praticas-profissionais-dos-professores-de-matematica>. Acesso em: 4 mar. 2021.

DOMINGUES, H. H. A demonstração ao longo dos séculos. **Boletim de educação matemática**, Rio Claro – SP, v. 15, n. 18, p. 55 – 67, set. 2002.

GRACIOLLI, C. Y. L. F.; BATISTA, C. C.; SHINTANI, R. M. Trissecção do ângulo: um pensar geométrico que se abre por meio da história e dos origamis. In: XIV Encontro Paulista de Educação Matemática, 2020. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2020. p. 2211 - 2222. Disponível em: < https://drive.google.com/file/d/1EeTFJIySPBODpZoYDH1pOC07iyYuGu9X/view> Acesso em: 7 mar. 2021.

HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Polinômios e equações algébricas.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

HULL, T. C. **Origametry**: Mathematical Methods in Paper Folding. New York: Cambridge University Press, 2020. 332 p.

JUSTIN, J. Résolution par le pliage de l'equation du troisième degré et applicatins géométriques **Proceedings of the first international meeting of origami science and technology**, Ferrera, Italy, 1989, p. 251-261.

KANT, I. **Crítica da razão pura.** 4ª ed. Petrópolis: Vozes; Bragança Paulista: Editora universitária São Francisco, 2015.

LANG, R. J. **Origami and Geometric Constructions**, 2010. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/aa2d/e2db35a0dcaa6ab929c95ef9e0168f14659c.pdf>. Acesso em: 06 mar. 2021.

LANG, R. J. A computational algorithm for origami design. In: ANNUAL SYMPOSIUM ON COMPUTATIONAL GEOMETRY, n.96, 1996, Pleasanton. **Proceedings…** Pleasanton: ACM, 1996. p. 98-105.

MENDEIROS. F.; GUANABARA, L. **O problema da trissecção do ângulo.** In: BIENAL DE MATEMÁTICA, 8., Rio de Janeiro. 2017. Disponível em: < http://www.im.ufrj.br/walcy/Bienal/textos/trisseccao.pdf >. Acesso em: 6 mar. 2021.

MENEZES, D. B.; SILVA, J. F. O uso de Dobraduras como recurso para o ensino da geometria plana: história, teoremas e problemas. **Ciência e Natura.** Santa Maria, v. 37, ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 511–524. Disponível em: <https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/view/14617/pdf>. Acesso em 4 mar. 2021.

MONTEIRO, L. C. N. **Orígamí**: história de um geometría axíomátíca. 2008. 111 f. Tese (Mestrado em Matemática para o Ensino) – Departamento de Matemática, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008. Disponivel em: <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/1309>. Acesso em: 23 fev. 2021.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. In: ENCONTRO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (PROFMAT), 2003, Lisboa. **Actas do ProfMat...** Lisboa: APM, 2003. p. 25-39. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf>. Acesso em: 5 mar. 2021.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas em Sala de Aula**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016. 160 p.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. Representações e raciocínio matemático dos alunos na resolução de tarefas envolvendo números racionais numa abordagem exploratória. In: PONTE, J. P. (Org.). **Investigações matemáticas e investigações na prática profissional**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 281-310.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; BRANCO, N. Tarefas de exploração e investigação na aula de Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.). **Investigações matemáticas e investigações na prática profissional**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 213-252.

POPE, S.; LAM, T. K. Origami and Learning Mathematics. In: IVERSON, P. W.; LANG, R. J.; YIM, M. **Origami 5**: Fifth international meeting of origami science, mathematics and education (5OSME). New York: CRC Press, 2011. p. 205 – 217.

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 510 p.

SANTANA, L. M. **Os problemas clássicos da geometria e a impossibilidade de solução com régua e compasso.** 2013. 44 f. Dissertação (Mestrado em Matemática – PROFMAT) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

STEWART, I. **Galois Theory.** 4ª ed. New York: Chapman and Hall CRC, 2015

TEIXEIRA, S. A.; BOTURA JUNIOR, G.; YAMADA, T. R. U. Pesquisa em design de origami na área da medicina: inovações científicas da orimimética em instrumentais. In: DOS SANTOS MENEZES, M.; PASCHOARELLI, L. C. (Org.). **Design:** Tecnologia a serviço da qualidade de vida. Bauru: Canal 6, 2020. p. 155- 172.

Recebido em: 07 / 03 / 2021
Aprovado em: 17 / 04 / 2021