BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

ECEEM
ENCONTRO CEARENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v8i23.5109

TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO: UM ESTUDO INTRODUTÓRIO

GRAPH THEORY IN HIGH SCHOOL: AN INTRODUCTORY STUDY

Francisco Cleuton de Araújo[1]; Jonathan Haryson Araújo Aguiar[2]

RESUMO

Compreendendo toda uma série de dificuldades que permeiam o ensino de matemática, esta pesquisa trata sobre o estudo de grafos na Educação Básica como uma alternativa que busca contribuir com elementos que dinamizem o processo de ensino-aprendizagem. A partir do adequado uso, a Teoria dos Grafos pode facilitar a compreensão e a resolução de problemas em distintos campos da Matemática, com destaque para a Combinatória. A ideia é estimular uma abordagem lúdica e interativa de um problema clássico da teoria dos grafos e, com isso, fortalecer uma perspectiva mais generalizada de resolução, evidenciando a existência de padrões matemáticos neste tipo de situação. A expectativa é realizarmos a aplicação em uma escola da rede pública estadual do Ceará, em uma turma de 2° ano do Ensino Médio, com cerca de 40 alunos. Tendo em vista a relevância da articulação entre ensino de matemática, ciência e tecnologia, vamos utilizar, nesta pesquisa, o *software* educativo GeoGebra como suporte à compreensão de problemas da Teoria dos Grafos. Trata-se ainda de uma pesquisa em desenvolvimento. Nosso objetivo é discutir sobre a inserção de tópicos da teoria dos grafos nas aulas de Matemática do Ensino Médio, respaldado em estudo bibliográfico e na construção de uma aplicação prática. Para além disso, desejamos refletir sobre aspectos tecnológicos e históricos que envolvem o tema. A avaliação da aplicação didática se dará por meio de um questionário e de nossa observação participante no processo de ensino-aprendizagem. Espera-se ainda que essa pesquisa possa servir como apoio ao trabalho do professor que ensina matemática, tendo como objetivo o despertar para as contribuições da Teoria dos Grafos.
Palavras-chave: Teoria dos Grafos; Ensino Médio; GeoGebra; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

In view of understanding the current problems series concerning Mathematics teaching, this research deals with the study of graphs in Basic Education as an alternative that aims to provide elements that stimulate the teaching and learning process. From the appropriate usage, the Graph Theory may ease the comprehension and the problem solving in specific Mathematics areas, with emphasis being placed on Combinatorics. It aims to stimulate a playful and interacting approach

[1] Mestre em Matemática pela Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA). Professor de Matemática – Secretaria Municipal de Educação de Fortaleza (SME), Fortaleza, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua 6, 8, Itaperi, Fortaleza, Ceará, Brasil, CEP: 60743-060. E-mail: cleuton_araujo@hotmail.com.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-5955-6324 .

[2] Mestre em Matemática pela Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA). Professor de Matemática – Secretaria Estadual de Educação do Ceará (SEDUC-CE), Fortaleza, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Seixas Correia, 773, Bonsucesso, Fortaleza, Ceará, Brasil, CEP: 60520-795. E-mail: jonathan.haryson@gmail.com.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-5341-8935 .

of an ordinary problem about graph theory and, thus, reinforce a more widespread perspective of solving-problem, confirming the occurrence of Mathematics patterns in this kind of event. We expect to perform the application in a public school from the state of Ceará, in a second-grade classroom from Secondary School, with around 40 students. Bering in mind the relevant connection among Mathematics, science and technology, we intend to use, in this study, the educational software GeoGebra as assistance to the comprehension of Graph Theory problems. It is also a research in progress. We aim to discuss about input topics of Graph Theory in Mathematics classes from High School, supported by a bibliographic study and an elaboration of a practical application. In addition, we intend to think about technological and historical features that concerns the theme. The assessment regarding the didactic application will be achieved through a questionnaire and our observation throughout the teaching and learning process. This research is expected to give support to the teacher work that lectures on Mathematics, aiming the arousal to the contributions of Graph Theory.
Keywords: Graph Theory; Secondary School; GeoGebra; Mathematics teaching.

Introdução

Não existem soluções mágicas para superarmos os inúmeros problemas que a educação e, em especial, a Matemática enfrentam em nosso país. O artigo que ora apresentamos, fruto de uma pesquisa em desenvolvimento, investe na possibilidade de inserção de tópicos da Teoria dos Grafos no Ensino Médio. Com isso, pretende-se contribuir com elementos que atuem no sentido de dinamizar o processo de ensino-aprendizagem de Matemática em nossas salas de aulas.

Grosso modo, "um grafo é apenas um conjunto de pontos com linhas que unem alguns pares de pontos desse conjunto. É uma coisa simples, mas propicia uma imagem geométrica de uma relação entre elementos de um conjunto" (LIMA *et al*, 2006, p. 274).

Deste modo, facilita o entendimento e a resolução de problemas em diversos campos da Matemática, com destaque para a Combinatória.

Para além disso, grafos são usados em diversas áreas do conhecimento humano, como topologia, pesquisa operacional, teoria da computação, análise numérica, genética e psicologia (LUCCHESI, 1979). Por exemplo, desde um mapa com cidades sendo ligadas por estradas, na análise de circuitos elétricos ou mesmo em desenhos das ligações entre átomos de uma molécula (LIMA *et al*, 2006).

Dentro das Orientações Curriculares para o Ensino Médio, encontramos uma indicação explícita ao uso de grafos nesse nível de ensino:

> No ensino médio, o termo "combinatória" está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler (BRASIL, 2006, p. 94).

O documento corrobora com a ideia de que o uso de grafos, em problemas desse tipo, pode desenvolver habilidades relevantes à formação intelectual do estudante.

Nesse estudo introdutório, também pretendemos refletir sobre elementos tecnológicos e históricos, associados ao ensino de matemática.

Para o primeiro, observamos que "o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações" (BRASIL, 2018, p. 536).

Neste sentido, consideramos pertinente o uso de ferramentas digitais (como *softwares* educativos) nas aulas de Matemática do ensino básico, no intuito de promover melhoria no ensino-aprendizagem.

Por sua vez, ressaltamos que a “utilização da História da Matemática em sala de aula também pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos” (BRASIL, 2006, p. 86).

Destacando que a História da Matemática não deve ser vista de maneira limitada, como uma exposição de fatos do passado e biografias. Em um sentido mais amplo, a História da Matemática, inclusive, pode contribuir para que o professor compreenda melhor as dificuldades dos alunos na construção do conhecimento matemático (BRASIL, 2006).

Em síntese, este trabalho introduz a discussão sobre Teoria dos Grafos no contexto do Ensino Médio, em associação com aspectos tecnológicos e históricos. Em consonância com a superação de dificuldades na aprendizagem matemática.

Uma breve reflexão sobre tecnologia

Partimos da compreensão de que o ambiente escolar deve se pautar pela construção e difusão do conhecimento vivo, superando formas obsoletas que não se encontram em sintonia com as expectativas da sociedade. Especialmente no campo das ciências e tecnologia, a escola deve estimular tais processos de aquisição, organização e geração de conhecimento vivo. E isto só será possível a partir de uma ampla utilização da tecnologia na educação (D’AMBROSIO, 2009).

Na obra *Educação matemática: da teoria à prática*, D’ambrosio faz uma previsão de que na matemática do futuro o que convencionamos chamar de Matemática Discreta terá um papel altamente relevante. Ademais, o autor destaca que tais conteúdos são acessíveis ao nível básico de ensino e lamenta que seu estudo ainda esteja limitado ao âmbito da matemática aplicada.

Para Jurkiewicz e Muniz (2009, p. 431) “o ensino de teoria dos grafos oferece uma excelente oportunidade de contribuir para um ensino que contribua para a articulação da Matemática estudada no ensino médio com temas atuais da ciência e da tecnologia”.

Em nossa experiência em sala de aula na educação básica, percebemos uma boa recepção dos estudantes ao uso de tecnologias como suporte ao ensino de matemática.

Partindo disso, estaremos trabalhando com o *software* GeoGebra nesse estudo. Entendendo que o manuseio correto deste *software* de matemática dinâmica pode contribuir com a compreensão de problemas da teoria dos grafos. A escolha pelo GeoGebra deve-se ao fato de ser um *software* livre, gratuito e de fácil acesso.

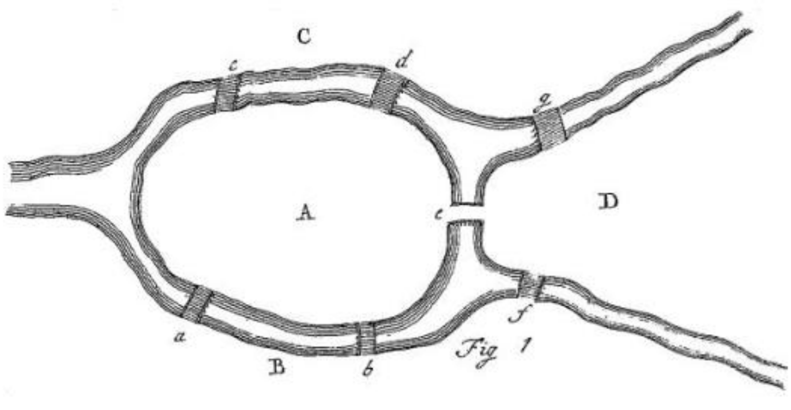
Alguns apontamentos sobre a teoria dos grafos em perspectiva histórica

Pode-se dizer que "a teoria dos grafos tem uma origem relativamente recente (século XVIII) na história da matemática. Dentre os primeiros cientistas a trabalhar nesta área se destacam L. Euler, G. Kirchhoff e A. Cayley" (SANTOS; MELLO; MURAMI, 2007, p. 297).

O artigo considerado fundador da Teoria dos Grafos é o *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, de Leonhard Euler. Nele, o matemático suíço resolve um problema muito conhecido, denominado "As pontes de Königsberg" (LOPES, 2020).

O problema consiste no seguinte: na cidade de Königsberg havia sete pontes sobre o rio Pregel, que ligavam as distintas regiões (como podemos ver na figura 1). A questão é saber se existe uma determinada rota, que inicie e termine no mesmo lugar, onde se atravesse cada umas das pontes uma única vez.

Figura 1 – As pontes de Königsberg



Fonte: LOPES (2020, p. 26).

Euler provou que o problema não tem solução. Para além disso, ele "observou que se poderia chegar a essa conclusão fazendo uma lista de todas as rotas possíveis, e verificando que nenhuma delas pode ser completada como se requer; mas isso seria impraticável devido ao grande número de possibilidades. Mais significativamente, ele formulou um critério geral" (LOVÁSZ; PELIKÁN; VESZTERGOMBI, 2010, p. 132).

Ou seja, não contente em resolver o famoso problema, Euler generaliza a questão e formula regras gerais para serem utilizadas em situações semelhantes. Com isto, inaugura uma nova e vasta área de pesquisa.

Todavia, apesar de toda a clareza na exposição de ideias que Euler desenvolveu no que hoje denominamos como o primeiro problema da teoria dos grafos, a questão ainda se manteve isolada por meio século. Provavelmente devido à carência de aplicações práticas (BOAVENTURA NETTO, 2003).

Em 1847, o físico alemão G. Kirchhoff utilizou grafos para estudar circuitos elétricos. Já por volta dos anos 1850, o britânico Arthur Cayley se debruçou sobre o problema das quatro cores, lançado por Francis Guthrie. Neste problema, diz-se que qualquer mapa (em superfície plana ou esférica) pode ser colorido com no máximo quatro cores distintas (EVES, 2011).

A prova para a chamada conjectura das quatro cores só irá aparecer bem depois. Em 1976, Appel e Haken provam o teorema valendo-se do uso intensivo de computadores (LOVÁSZ; PELIKÁN; VESZTERGOMBI, 2010).

Outro problema fundamental em grafos surge a partir do jogo hamiltoniano no dodecaedro regular em meados do século XIX. Proposto pelo irlandês Willian R. Hamilton, o jogo "consiste em determinar um caminho ao longo das arestas de um dodecaedro regular passando uma, e uma só, vez em cada um dos vértices do poliedro" (EVES, 2011, p. 580).

À época, W. Hamilton utiliza grafos para representar o dodecaedro no plano e solucionar o problema. Por sua vez, uma questão que segue aberta até os dias atuais é determinar de maneira simples, com condições necessárias e suficientes, se um grafo é hamiltoniano.

Para Boaventura Netto (2003, p. 2), "o desenvolvimento da teoria dos grafos veio se dar, finalmente, sob o impulso das aplicações a problemas de otimização organizacional, dentro do conjunto de técnicas que forma hoje a pesquisa operacional, já na segunda metade do século XX".

Cabe ressaltar a importância do advento do computador e problemas oriundos desse contexto como elemento propulsor da teoria dos grafos. No panorama histórico, observa-se o período da chamada Guerra Fria e o avanço acelerado das telecomunicações.

O lobo, a cabra e o repolho: uma proposta de atividade

O *River Crossing* a seguir é um dos mais clássicos da história dos *Puzzles*. O mesmo vem desafiando a mente de seus leitores desde sua primeira aparição em meados do século VIII, quando fora escrito por Alcuíno de Iorque em seu livreto *Propositiones ad Acuendos Juvenes*, estimulando a observação, perícia e tomada de decisão dos mesmos. A problemática é tratada a seguir.

Um homem tem que atravessar um lobo, uma cabra, e um repolho por um rio. Seu barco a remo tem espaço suficiente, em cada viagem, apenas para ele próprio e mais um dos outros envolvidos. Se levar o repolho consigo, o lobo comerá a cabra. Se levar o lobo, a cabra comerá o repolho. Somente quando o homem está presente, a cabra e o repolho estão a salvo de serem devorados. Como o homem pode organizar suas viagens para levar o lobo, a cabra e o repolho pelo rio, assegurando que ninguém coma o outro durante sua ausência?

Figura 2 – A emblemática travessia do lobo, a cabra e o repolho ao longo do rio

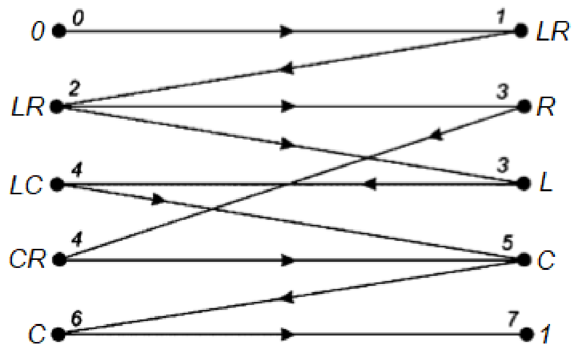
Fonte: KORDEMSKY (1992, p. 4).

O problema supracitado é normalmente suscetível a análises por tentativas e erros, onde uma das soluções possíveis é encontrada através de processos iterativos, ou seja, precipitadas decisões tomadas pelo “homem”.

Mas será que por trás de todo esse processo empírico, existe uma abordagem mais rigorosa que nos permitirá descobrir facilmente o número de soluções possíveis sem recorrer a adivinhação e verificação? A resposta é sim, e está muito bem fundamentada na Teoria dos Grafos.

Sejam *L*, *C* e *R* as letras a serem usadas para representar o lobo, a cabra e o repolho, respectivamente. Sem perda de generalidade, os algarismos 0 e 1 representarão, também de forma respectiva, as situações inicial e final da travessia.

Figura 3 – Atravessando o rio (Digrafo).



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

A figura 3 mostra o grafo orientado com todos os percursos possíveis dentro das condições impostas pelo problema. Agora, vamos reduzir as soluções do *Puzzle*, isto é, determinando o menor caminho entre os vértices 0 (situação inicial) e 1 (situação final). Como vimos acima, existem duas soluções mínimas, cada uma com exatamente sete trechos, registrados pelos sucessivos estados de deslocamento, que são:

Tabela 1 - Registro dos estados de deslocamento e suas soluções mínimas.

Estados	1	2	3	4	5	6	7	8
Solução I	0	LR	LR	L	LC	C	C	1
Solução II	0	LR	LR	R	CR	C	C	1

Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

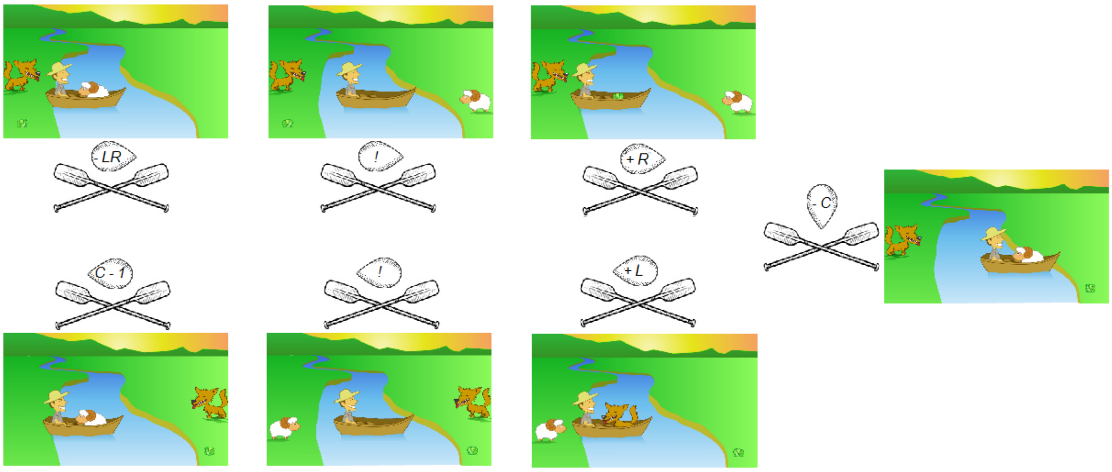
Tabela 2 - Registro dos trechos de deslocamento e suas soluções mínimas.

Trechos	1	2	3	4	5	6	7
Solução I	- LR	!	+ R	- C	+ L	!	C - 1
Solução II	- LR	!	+ L	- C	+ R	!	C - 1

Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

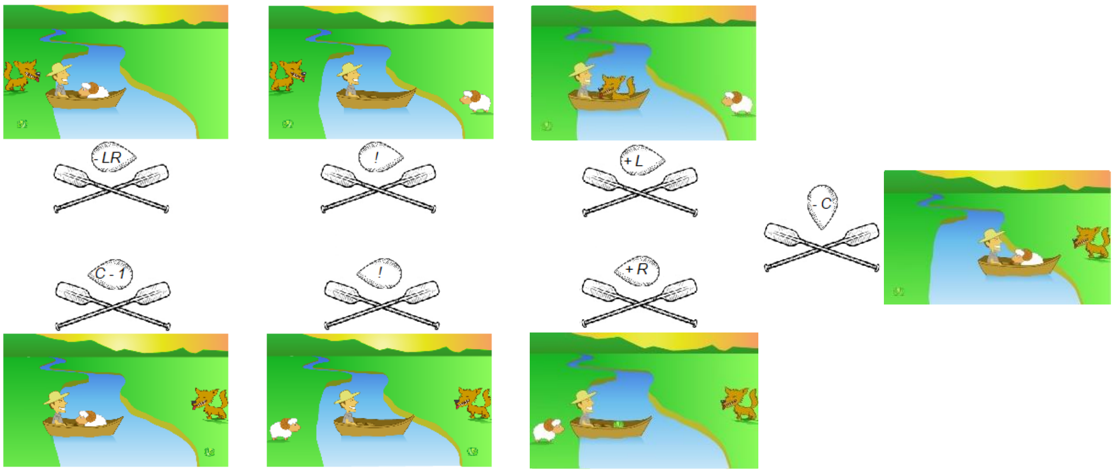
Percebe-se, com base na tabela 1, que a diferença entre dois quaisquer estados consecutivos indica o que segue no barco com o homem durante o trecho deslocado. Os símbolos " + ", " – " e " ! ", que auxiliam na configuração da tabela 2, representam em relação aos envolvidos, a ida para a margem final, a volta para a margem inicial e o momento em que o homem se encontra sozinho no barco durante o deslocamento, respectivamente. Os resultados estão facilmente ilustrados logo abaixo (figuras 4 e 5) com as sucessivas listas de passageiros no barco.

Figura 4 – Atravessando o rio (Esquema): Solução I.



Fonte: https://rachacuca.com.br/jogos/o-lobo-e-a-ovelha/ (Adaptado, 2020).

Figura 5 – Atravessando o rio (Esquema): Solução II.



Fonte: https://rachacuca.com.br/jogos/o-lobo-e-a-ovelha/ (Adaptado, 2020).

Vamos agora reconstruir as soluções acima sob uma perspectiva tridimensional. Com o auxílio do GeoGebra 5.0, apresentaremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, no qual o sistema de coordenadas cartesianas será definido pelos eixos *OL* (Lobo), *OC* (Cabra), *OR* (Repolho), com mesma origem *O* e perpendiculares entre si. O sistema será denotado por *OLCR* e a cada ponto P do referido espaço associaremos a tripla ordenada (*l*, *c*, *r*) de números reais.

Desta vez, além de manterem respectivamente os postos de situação inicial e final da travessia, os algarismos 0 e 1 serão utilizados nas triplas ordenadas do sistema como componentes dos vetores criados a partir do deslocamento do lobo, a cabra e o repolho.

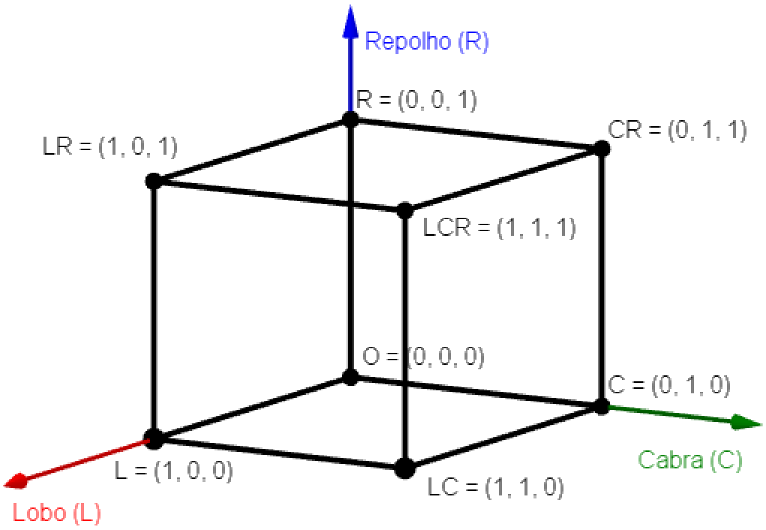
Tabela 3 - Vetores deslocamento (Sistema de coordenadas OLCR): Triplas ordenadas.

Vetor (*l*, *c*, *r*)	Situação
(0, 0, 0)	Estado inicial, nenhum atravessou o rio.
(1, 0, 0)	Somente o lobo atravessou o rio.
(0, 1, 0)	Somente a cabra atravessou o rio.
(0, 0, 1)	Somente o repolho atravessou o rio.
(1, 1, 0)	Somente o repolho **não** atravessou o rio.
(1, 0, 1)	Somente a cabra **não** atravessou o rio.
(0, 1, 1)	Somente o lobo **não** atravessou o rio.
(1, 1, 1)	Estado final, todos atravessaram o rio.

Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Do ponto de vista geométrico, considerando que todos os deslocamentos possíveis (válidos ou não) possuem o mesmo comprimento, somos levados a acreditar que a forma mais sensata de estruturarmos nossa solução está intrínseca no esqueleto de um hexaedro regular (ou como é visto na Teoria dos Grafos, um 3 – cubo), onde seus vértices estão bem determinados pelas triplas ordenadas listadas, e suas arestas, pelas viagens ao longo do rio.

Figura 6 – Interpretação geométrica dos movimentos possíveis para o lobo, a cabra e o repolho através do GeoGebra 5.0.



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

A elegância deste *Puzzle* está em perceber que a cabra é a chave para a solução da travessia, pois é o único dos envolvidos que podemos encontrar nas posições de predador e presa. Sendo assim, o próximo passo consiste em eliminarmos, na figura 6, todas as arestas onde a cabra encontra-se nessa situação.

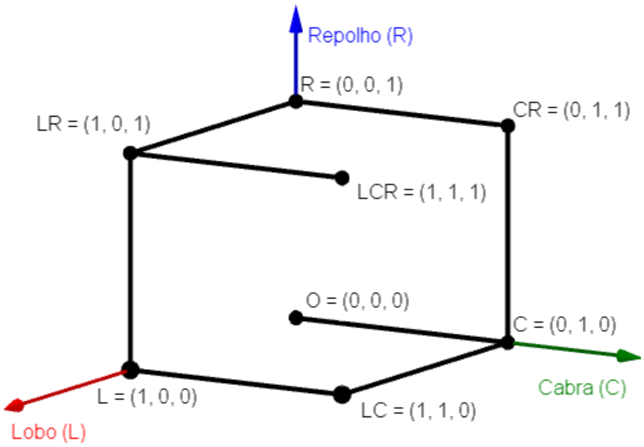
Tabela 4 - Movimentos não válidos para o lobo, a cabra e o repolho.

Movimentos eliminados	Justificativa
O = (0, 0, 0) → (1, 0, 0) = L CR = (0, 1, 1) → (1, 1, 1) = LCR	A cabra ficaria sozinha com o repolho.
O = (0, 0, 0) → (0, 0, 1) = R LC = (1, 1, 0) → (1, 1, 1) = LCR	O lobo ficaria sozinho com a cabra.

Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

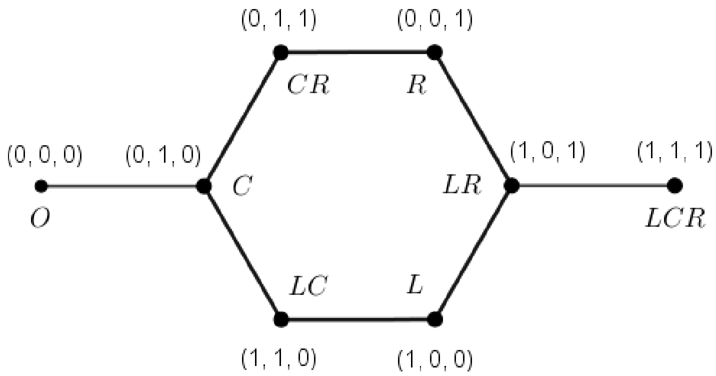
Após apresentarmos quantos e quais movimentos serão descartados (tabela 4), contamos apenas com um único objetivo, o de descobrir o menor percurso possível que ligue os pontos O (0, 0, 0) e LCR (1, 1, 1) através das arestas permitidas pelo problema em nosso hexaedro regular.

Figura 7 – Interpretação geométrica dos movimentos válidos para o lobo, a cabra e o repolho através do GeoGebra 5.0: Grafo I.



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Figura 8 – Interpretação geométrica dos movimentos válidos para o lobo, a cabra e o repolho através do GeoGebra 5.0: Grafo II.



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Perceba o isomorfismo que ocorre entre os grafos das figuras 7 e 8. Com isso, comprovamos que a travessia do lobo, a cabra e o repolho conta com exatamente duas soluções de percurso mínimo. Para efeitos logísticos das mesmas, omitiremos os trechos em que o homem se desloca sozinho de uma margem a outra do rio, representado anteriormente pelo símbolo " ! ". E são elas:

Solução I

1º Movimento: Leve a cabra para a margem final;

2º Movimento: Retorne a margem inicial (omitido na figura 8);

3º Movimento: Leve o repolho para a margem final;

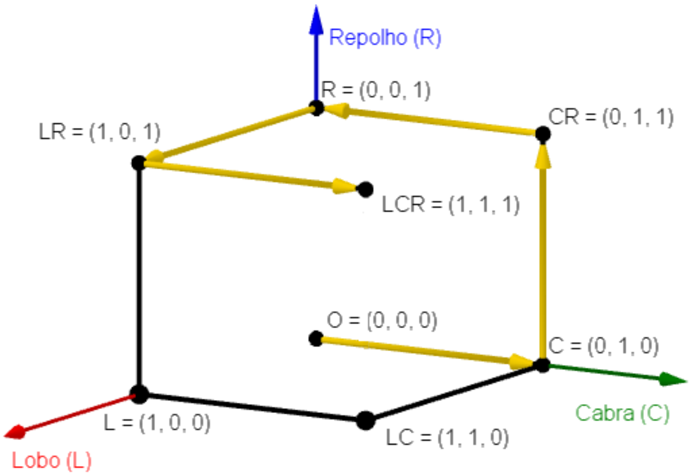
4° Movimento: Retorne a cabra para a margem inicial;

5º Movimento: Leve o lobo para a margem final;

6º Movimento: Retorne a margem inicial (omitido na figura 8);

7º Movimento: Leve a cabra para a margem final.

Figura 9 – Interpretação geométrica da solução para a travessia do lobo, a cabra e o repolho através do GeoGebra 5.0: Solução I.



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

Solução II

1º Movimento: Leve a cabra para a margem final;

2º Movimento: Retorne a margem inicial (omitido na figura 9);

3º Movimento: Leve o lobo para a margem final;

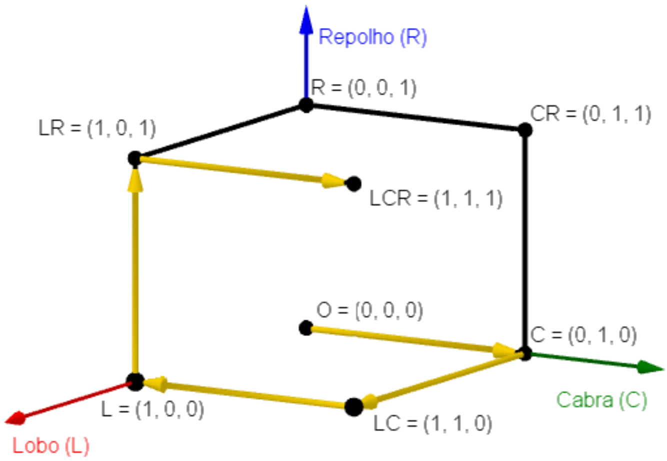
4° Movimento: Retorne a cabra para a margem inicial;

5º Movimento: Leve o repolho para a margem final;

6º Movimento: Retorne a margem inicial (omitido na figura 9);

7º Movimento: Leve a cabra para a margem final.

Figura 10 – Interpretação geométrica da solução para a travessia do lobo, a cabra e o repolho através do GeoGebra 5.0: Solução II.



Fonte: Elaborado pelos autores (2020).

A partir disso, é fácil encontrarmos um ciclo hamiltoniano no 3 – cubo, e mais ainda percebermos a semelhança entre o *Puzzle* acima e o mesmo. Como podemos ver nas figuras 9 e 10, a solução em 7 movimentos do nosso *River Crossing* com três envolvidos (o lobo, a cabra e o repolho) é dada pela mesma sequência que os vértices de um ciclo hamiltoniano no 3 – cubo.

Variantes distintivas da tarefa de Alcuíno ocorrem na África. Na Argélia, por exemplo, os objetos são um chacal, uma cabra e um feixe de feno. Na Libéria, a companhia de um homem é uma chita, uma galinha e algum arroz, enquanto em Zanzibar, um homem deve transportar um leopardo, uma cabra e algumas folhas ao longo do rio.

Nossa expectativa é aplicarmos a atividade na escola Heráclito de Castro e Silva, da rede pública estadual do Ceará, em uma turma de 2° ano do Ensino Médio. Com cerca de 40 alunos.

Em um primeiro momento, vamos dividir a turma em pequenos grupos e propor como desafio a resolução da situação-problema da travessia do rio. Cada grupo deve compartilhar com o restante da turma as reflexões acumuladas. Em um momento posterior, prevemos fomentar uma discussão histórica em torno da Teoria dos Grafos como forma de ambientar o aluno ao tema estudado.

Por fim, trataremos o problema por meio do uso do GeoGebra. Com auxílio deste *software* educativo, vamos percorrer a construção gráfica das movimentações a serem realizadas com base no número de elementos envolvidos. Trabalhando desde a questão da linearidade, passando pelo plano até o problema propriamente dito em uma perspectiva tridimensional (podendo ainda ser generalizado para outras dimensões).

Pretende-se com isso estimular uma abordagem lúdica e interativa do problema e fortalecer uma perspectiva mais geral de resolução, buscando evidenciar a existência de um padrão matemático nessa cadeia.

No intuito de avaliarmos tal proposta de aplicação didática, pretendemos utilizar como fonte de dados um questionário e nossa observação participante no processo de ensino-aprendizagem.

Algumas últimas considerações

Esse artigo traz uma proposta de atividade para o ensino de teoria dos grafos no Ensino Médio, em sintonia com o uso das tecnologias como suporte ao ensino de Matemática.

O principal motivo que nos levou a estudar tal tema é a busca por alternativas que atraiam o aluno para o conhecimento matemático e atuem como elemento positivo no processo de ensino. Este trabalho tem a intenção de influenciar diretamente o contexto da sala de aula, possibilitando melhoria na aprendizagem.

Nossa perspectiva é aplicarmos essa atividade com estudantes do Ensino Médio e levantarmos dados sobre a inserção de tópicos da teoria dos grafos nesse nível de ensino, refletindo sobre a viabilidade de tal proposta. Para além disso, também pretendemos elaborar um banco de atividades envolvendo tal conteúdo para ser compartilhado com professores e estudantes.

Referências

BOAVENTURA NETTO, P. O. **Grafos:** Teoria, Modelos, Algoritmos. São Paulo: Edgar Blücher, 2003.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC.** Educação é a Base. Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf >. Acesso em: 03 jan. 2021.

BRASIL. **Orientações curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em:

04 jan. 2021.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática:** da teoria à prática. 17ª ed. São Paulo: Papirus, 2009.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas: Editora Unicamp, 2011.

JURKIEWICZ, S.; MUNIZ, I. Jr. **Qual é o menor caminho?** Conceitos, aplicações e experiências no Ensino Médio com teoria dos grafos e algoritmos. In: XXXIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Fortaleza: Anais do XXXIX SBPO, 2009. p. 422-432. Disponível em: < http://www.din.uem.br/sbpo/sbpo2007/pdf/arq0002.pdf >. Acesso em: 10 nov. 2020.

KORDEMSKY, B. A. **The Moscow Puzzles:** 359 Mathematical Recreations. New York: Dover Publications Inc., 1992.

LIMA, E. L. Alguns problemas clássicos sobre grafos. **Revista do Professor de Matemática**, v. 12, p. 36–42, 1988.

LIMA, E. L; CARVALHO, P. C. P; WAGNER, E; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio** – vol. 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LOPES, F. J. A. Euler e as pontes de Königsberg. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 15, n. 30, p. 23-32, 30 out. 2020. Disponível em: < https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/82/56>. Acesso em: 05 nov. 2020.

LOVÁSZ, L; PELIKÁN, J; VESZTERGOMBI, K. **Matemática Discreta:** Elementar e além. Tradução: Ruy de Queiroz. Rio de janeiro: SBM, 2010.

LUCCHESI, C. L. **Introdução à Teoria dos Grafos.** 12o. Colóquio de Matemática. Poços de Caldas: IMPA, 1979. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/12_CBM_79_05.pdf>. Acesso em: 06 jan. 2021.

SANTOS, J. P. O; MELLO, M. P; MURAMI, I. T. C. **Introdução à Análise Combinatória.** Rio de janeiro: Ciência Moderna, 2007.

TRUDEAU, R. J. **Introduction to Graph Theory.** New York: Dover Publications, Inc., 1993.

WILSON, R. J.; WATKINS, J. J. **Graphs - an introductory approach:** a first course in discrete mathematics. New York: Wiley, 1990.

Recebido em: 07 / 03 / 2021
Aprovado em: 20 / 04 / 2021