BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

ISSN: 2447-8504 DOI: 10.30938/bocehm.v8i23.5101

POSSIBILIDADES DIDÁTICAS COM CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UM ESTUDO COM O TEOREMA DE PITÁGORAS

DIDACTIC POSSIBILITIES WITH GEOMETRIC CONSTRUCTIONS FOR THE FINAL YEARS OF ELEMENTARY SCHOOL: A STUDY WITH THE PYTHAGOREAN THEOREM

Cleide Ribeiro Mota Arinos[1]; Camila de Oliveira da Silva [2]

RESUMO

Neste artigo trazemos algumas possibilidades didáticas com o uso de construções geométricas para o ensino de geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, tendo como inspiração um estudo com o Teorema de Pitágoras e suas aplicações. Consideram-se alguns aspectos sobre o ensino da geometria, como a observação de vários pesquisadores em Educação Matemática que reforçam sobre o abandono da geometria na sala de aula e, também buscam alternativas para que conceitos e práticas geométricas possam estar mais presentes durante o processo de escolarização básica. Como aportes teóricos recorremos a abordagem de alguns aspectos da geometria dedutiva evidenciados por Nicolas Balacheff, aliada a estruturação de um meio didático, como proposto por Guy Brousseau. Essa articulação se fez necessária, uma vez que buscamos valorizar o trabalho do aluno com algumas situações-problema, a fim de contribuir com a prática dedutiva no estudo de conceitos da geometria euclidiana plana, com o uso de construções geométricas. Acreditamos que as situações-problema que aqui trazemos podem favorecer o estudo dos conceitos geométricos envolvidos por alunos do Ensino Fundamental, já que, para o desenvolvimento dessas, os alunos podem conjecturar, argumentar, investigar, bem como validar seus conhecimentos. Assim, é na preparação do meio didático que buscamos suscitar reflexões para que os alunos possam ir construindo seus conhecimentos geométricos, contribuindo para um trabalho diversificado com deduções lógicas em geometria, percorrendo desde problemas mais "clássicos" utilizando construções geométricas até um possível estudo com a recíproca do Teorema de Pitágoras, em conjunto a alguns questionamentos sobre a construção de segmentos incomensuráveis, utilizando régua e compasso.

[1]Doutoranda em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS/PPGEduMat). Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS/PPGEduMat). Professora na Rede Municipal de Ensino, Campo Grande, Mato Grosso do Sul, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Eurípedes Souza de Almeida, 60, Bairro Residencial Sírio Libanês I, Campo Grande, Mato Grosso do Sul, Brasil, CEP: 79.115-381. E-mail: cleide.arinos@ufms.br.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9510-5590.
[2]Doutoranda em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS/PPGEduMat). Mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS/PPGEduMat). Professora na Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, Mato Grosso do Sul, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Doutor Armando Cunha, 220, Bairro Vilas Boas, Campo Grande, Mato Grosso do Sul, Brasil, CEP: 79.051-040. E-mail: camimatt@gmail.com.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3383-9235.

Palavras-chave: Construções Geométricas; Geometria Euclidiana Plana; Teorema de Pitágoras; Ensino Fundamental.

ABSTRACT

In this article we bring some didactic possibilities with the use of geometric constructions for the teaching of geometry in the final years of Elementary School, having as inspiration a study with the Pythagorean Theorem and its applications. Some aspects about the teaching of geometry are considered, such as the observation of several researchers in Mathematics Education who reinforce the abandonment of geometry in the classroom, and also seek alternatives so that geometric concepts and practices can be more present during the process of basic schooling. As theoretical contributions we resort to the approach of some aspects of deductive geometry evidenced by Nicolas Balacheff, combined with the structuring of a didactic medium, as proposed by Guy Brousseau. This articulation was necessary, since we seek to value the student's work with some problem situations, in order to contribute with the deductive practice in the study of concepts of flat Euclidean geometry, with the use of geometric constructions. We believe that the problem situations that we bring here may favor the study of the geometric concepts involved by elementary school students, since, for the development of these, students can conjecture, argue, investigate, as well as validate their knowledge. Thus, it is in the preparation of the teaching environment that we seek to raise reflections so that students can build their geometric knowledge, contributing to a diversified work with logical deductions in geometry, ranging from more “classic” problems using geometric constructions to a possible study with the reciprocal of the Pythagorean Theorem, together with some questions about the construction of incommensurable segments, using ruler and compass.

Keywords: Geometric Constructions; Flat Euclidean Geometry; Pythagorean theorem; Elementary School.

Introdução

O ensino de geometria tem sido discutido em diversas pesquisas há algum tempo. Em 1993, Regina Pavanello realça o abandono do ensino em geometria como um resquício do Movimento da Matemática Moderna (MMM), sobre a qual se valorizava a linguagem simbólica e as estrutruras algébricas. Em decorrência ao MMM, herdamos do tecnicismo um ensino que passou a preconizar técnicas e procedimentos formais sem muitas compreensões sobre o trabalho matemático em jogo.

Segundo Lorenzato (1995) apresentar a geometria apenas como um conjunto de definições, propriedades e fórmulas desliga esse conhecimento de quaisquer aplicações ou explicações de natureza lógica. Esse tipo rotineiro de aula pode inibir uma atividade matemática que possibilite aprendizagens com situações-problema e atividades de investigação que permitam que os alunos elaborem suas conjecturas e busquem validá-las, contribuindo para que os mesmos possam vir a realizar suas primeiras deduções lógicas em geometria. Como evidencia Roque e Pitombeira (2012),

> [...] um dos fatores que contribuem para que a Matemática seja considerada abstrata vem da forma como esta disciplina é ensinada, fazendo uso, muitas vezes, da mesma ordem de exposição presente nos textos matemáticos. Ou seja, ao invés de partimos do modo como um conceito matemático foi desenvolvido e exibirmos as perguntas às quais ele responde, tomamos este conceito como algo pronto. (ROQUE, PITOMBEIRA, 2012, p.8)

Com esse intuito pensamos em um estudo geométrico por meio das construções geométricas, sendo este um meio precursor para o desenvolvimento do pensamento lógico-dedutivo pelo aluno. Nesse sentido, nos questionamos: **De que forma algumas possibilidades didáticas envolvendo construções geométricas podem ser exploradas, com vista à apropriação de conceitos geométricos por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental?**

Para tanto, escolhemos como tema o Teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo, de modo que os alunos possam trabalhá-las em outra perspectiva, com construções geométricas e relações algébricas.

Com base na contextualização histórica realizada por Roque e Pitombeira (2012), observamos que, apesar de o Teorema de Pitágoras levar o nome do matemático grego Pitágoras, não se sabe ao certo quem descobriu esse Teorema. Os babilônios conheciam o enunciado desse teorema, ao realizarem cálculos através de ternas pitagóricas, os lados de um triângulo retângulo. Porém, não há evidências de que eles tinham conhecimento de alguma prova desse teorema.

Ainda com base nos referidos autores, vale ressaltar que as construções geométricas remontam da antiguidade, quando número significava número natural e não existiam números negativos e as frações não eram consideradas números, eram apenas razões entre números. Nesse período não existia a noção de número racional, muito menos o de número real. Contudo, os gregos para resolver os problemas, representavam uma grandeza qualquer por meio de um segmento de reta. O que equivale a dizer que todo número real positivo pode ser associado a um ponto de uma semirreta graduada.

Desse modo, as ideias de adição, subtração, multiplicação e razão entre dois segmentos eram intuitivas. Essa observação histórica é importante porque neste artigo iremos mostrar como era calculado, por exemplo, a hipotenusa de um triângulo retângulo geometricamente. Hoje, uma solução comum é calcular aplicando o teorema de Pitágoras, com cálculos numéricos, sem construções geométricas.

Aspectos da geometria dedutiva e as construções geométricas na educação básica

A geometria, como um ramo da matemática, foi sofrendo várias mudanças ao longo de sua história, passando de estágios de cunho mais prático e utilitário, como praticados pelos babilônios e egípcios, até sua constituição como uma ciência mais formalizada e sistematizada, valorizando aspectos dedutivos por meio de demonstrações, trabalho esse desenvolvido pelos gregos antigos.

É com a herança grega que as construções geométricas, com uso de réguas (sem graduação) e compasso, tiveram seu início. A perfeição valorizada pelos gregos, com as devidas justificativas e demonstrações para a realização das mesmas, constituiu-se como uma poderosa ferramenta para o processo de investigação matemática, e consequentemente, no desenvolvimento da própria geometria. Neste tocante, cabe destacar que vários matemáticos gregos contribuíram para a estruturação de uma ciência dedutiva, sobre a qual apresenta uma sequência de diferentes proposições, como corolários, teoremas e outros que foram compilados inicialmente, na obra Os Elementos de Euclides (séc III a. C) que, como expresso por Freitas (2020), como surgimento da primeira apresentação axiomática e estruturada da geometria, e sobre os quais utilizamos até hoje.

Assim, para pensarmos em um trabalho que valorize aspectos da prática dedutiva no ambiente escolar, é importante que seja realizado certos encaminhamentos que busque dar significados aos termos comumente usados nesse estudo, como definições, teoremas, postulados, hipóteses e tese, por exemplo. Como expressa Freitas (2020):

> Um teorema, que em grego significa refletir, é uma afirmação verdadeira, mas que para ser aceita e se tornar evidente necessita de uma demonstração, ou seja, de uma sequência de deduções lógicas formais, que caracterizam um tipo de raciocínio utilizado com frequência pelos matemáticos, que permitem concluir a verdade de uma dada proposição. [...] Um postulado ou axioma é uma proposição que é admitida como verdadeira sem demonstração. [...] Uma definição é um conjunto de palavras que expressa o que um conceito é ou o que significa um nome. (FREITAS, 2020, p.4).

Contudo, ainda nos cabe diferenciar termos como explicação ou argumentação, prova e demonstração, que são fundamentais nesse estudo. Como descrito no modelo de provas de Balacheff (1988), uma explicação concerne a um discurso que por objetivo convencer uma pessoa ou um grupo sobre a validade de seus enunciados. As provas são explicações aceitas por certo grupo e num determinado momento. Já as demonstrações são tipos de provas particulares que são aceitas por uma comunidade científica, como a dos matemáticos, e sobre as quais obedecem a regras baseadas em proposições já tidas como verdadeiras.

Em consonância a isso, está a dissertação de Garcia (2009) que estuda o processo de argumentação de alunos do oitavo ano, por meio de situações envolvendo construções geométricas. Garcia (2009) evidencia diversas pesquisas que apontam para a importância de aliar as construções geométricas, como forma de potencializar o estudo com a diversidade de conceitos geométricos nesta fase de escolaridade, bem como introduzir os alunos à produção de conjecturas e provas geométricas. Como expõe Wagner (2009, p.5), os problemas oriundos do trabalho com construções geométricas "desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas".

Com esse pensar e à luz dos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas em Brousseau (2008) que buscamos desencadear um trabalho didático, com vista a promover uma interação entre os alunos com conceitos geométricos em um meio que possa ser organizado pelo professor, a partir do estudo com construções geométricas.

Nesse processo temos por hipótese que a aprendizagem do aluno ocorre em um meio antagônico que produz contradições e desequilíbrios, valorizando os conhecimentos mobilizados pelo aluno e o seu envolvimento na elaboração do saber matemático, como é descrito por Brousseau (2008). Da mesma forma que o trabalho do professor consiste em proporcionar situações adequadas para que o aluno possa trabalhar como "pequenos cientistas", ao elaborar conjecturas, traçar estratégias e mecanismos de validação das afirmações realizadas até acomodar os conteúdos matemáticos em jogo.

Construções geométricas: algumas possibilidades didáticas

Conforme descrito anteriormente, consideramos os estudos de Brousseau (2008) por nos fornecer modos de organizar um meio para que possa ocorrer o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos articulados com as construções geométricas. Assim sendo, o meio didático, neste trabalho, é constituído juntamente com as situações-problema concernentes às construções geométricas com régua[3] e compasso que aqui apresentaremos.

Na organização desse meio são necessários alguns conhecimentos prévios dos alunos, como o conceito de lugar geométrico, que possui a seguinte definição: "uma figura é denominada de lugar geométrico dos pontos que possuem uma propriedade φ quando, e somente quando: todos os pontos dessa figura possuem a propriedade φ; somente os pontos dessa figura possuem a propriedade φ". (PUTNOKI, 1993, p. 60). De outro modo, o lugar geométrico é o conjunto de pontos que têm a propriedade φ. Esse conceito de Lugar Geométrico é de suma importância nas construções geométricas com régua e compasso, e sobre o qual detalharemos mais sobre esse conceito neste artigo.

Aqui, nos propomos a realizar um estudo com três *situações-problema*. Na primeira temos por objetivo deduzir o teorema de Pitágoras, tendo como suporte inicial as construções geométricas. Para isso, dividimos esta situação em duas partes. A primeira parte com objetivo de mostrar que todo triângulo retângulo pode ser inscrito em uma semicircunferência, a partir do uso com construções geométricas, e como forma de

[3] Nas construções geométricas a régua é a não graduada.

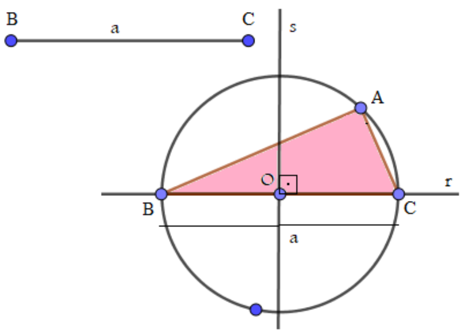
introduzi-lo ao exercício da prática dedutiva. No segundo momento, propomos o estudo de uma prova algébrica do teorema de Pitágoras, com o uso de semelhanças de triângulos.

Como decorrência do trabalho com o triângulo retângulo, exploramos na *situação-problema 2* a construção da média geométrica entre 2 segmentos dados. Já a *situação-problema 3* concerne a algumas aplicações do Teorema de Pitágoras, com a ideia de construção de segmentos incomensuráveis, inseridos num contexto geométrico, como em lembrança ao trabalho pitagórico com os mesmos.

As *situações-problema* serão apresentadas e discutidas a seguir:

Situação-problema 1 – Parte I: *Como construir um triângulo ABC inscrito em uma semicircunferência, sendo dado o diâmetro BC? O que podemos dizer sobre o ângulo BÂC?*

Quadro 1 - Construção de um triângulo ABC, inscrito em uma semicircunferência.

Construção com régua e compasso	Procedimentos de construção:	Alguns conceitos e construção:
Solução 1  	1º: Dado o segmento $\overline{BC}$ = a, realizar o transporte deste segmento para uma reta *r* qualquer. (solução1) 2º: Traçar a mediatriz de $\overline{BC}$ (reta *s*). 3: Na intersecção da mediatriz com a reta suporte ao segmento $\overline{BC}$, marcar O. 4º: Traçar uma circunferência de centro O, com raio de medida OC. (arco capaz de 90°) 5º: Marcar um ponto A qualquer sobre a circunferência construída e traçar o ΔABC.	• Conceito e classificação de triângulos. • Soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer. • Lugar geométrico: circunferência, mediatriz, arco capaz de 90°. • Construções geométricas elementares como: construir uma circunferência, traçar a mediatriz de um segmento e realizar o transporte de segmento.

Fonte: das autoras

Para essa situação tomamos como um procedimento inicial o transporte de um segmento dado, como um conhecimento prévio a ser mobilizado pelos alunos, assim como a construção de uma circunferência qualquer. Por outro lado, mobilizamos a ideia de que sendo dado um segmento ($\overline{BC}$) que concerne ao diâmetro da circunferência a ser construída, faz-se necessário que os alunos observem que para determinar o raio da mesma, é necessário encontrar o ponto médio do segmento, procedimento esse que pode ser realizado por meio da construção da mediatriz.

Nesse momento, é importante instigar os alunos à escrita de uma justificativa para a construção da mediatriz, o que permite ainda ao professor trabalhá-la como lugar geométrico. Cabe destacar que uma estratégia a ser realizada pelos alunos está em usar a graduação da régua, marcando o ponto sobre o segmento dado que equidista dos extremos. Esse caso se configuraria como uma argumentação para construir a circunferência desejada que, como descrito por Balacheff (1998) seria esta uma argumentação do tipo empirismo ingênuo, onde o aluno se sente convencido com a validação feita, a partir de casos particulares.

Ao finalizar a construção, o professor deve levantar questionamentos sobre a medida do ângulo Â. Os alunos podem comparar empiricamente, com o uso de transferidor ou a quina de uma folha do caderno, as construções realizadas entre os colegas, observando que o ângulo A (Â) concerne a um ângulo reto, mesmo tendo assumido diferentes posições. Neste estágio, supomos que os alunos trabalhariam com uma prova do tipo experiência crucial. No entanto, é importante que eles se sintam desafiados a estruturar uma argumentação dedutiva independente de casos particulares, tomando em sua justificativa proposições já validadas anteriormente o que, dessa forma, permite evoluir a níveis dedutivos da situação tomada. Sobre isso, um exemplo está em os alunos chegarem a seguinte argumentação, que poderíamos classificá-la como uma fase de experiência mental, tendo em vista os níveis de prova de Balacheff (1998), e sobre a qual consiste em uma prova que o triângulo ABC é retângulo em A, como descrito a seguir:

Quadro 2 – Um exemplo de prova

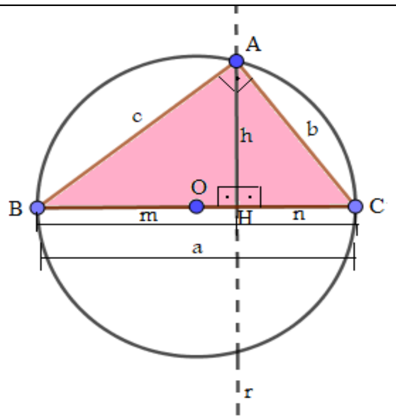
Seja um ΔABC inscrito em uma semicircunferência de centro O e diâmetro BC. Os triângulos AOB e AOC são isósceles, pois $\overline{AO}$=$\overline{CO}$=$\overline{BO}$, pois concernem ao raio da circunferência dada. Consequentemente, $O\hat{A}B = O\hat{B}A$ = α e $O\hat{A}C = O\hat{A}C = \beta$. Como em qualquer triângulo a soma dos ângulos internos vale 180° temos que, como no ΔABC, o ângulo BÂC = α+ β , $C\hat{B}A = \alpha$ e $A\hat{C}B = \beta$,então, α+ β+α + β = 180°. Logo, α+β = 90°. Portanto, o ângulo Â é reto.

Fonte: das autoras

Outra possibilidade está no estudo com a construção do arco capaz, no 4° passo do procedimento de construção, que, sendo este um lugar geométrico, justifica que o ângulo Â é reto se este for obtido pela construção de um arco capaz de 90° sobre o segmento BC. Optando por essa construção e trabalho com os alunos, esta pode ser uma forma de possibilitar que os alunos argumentem o fato de que todo triângulo retângulo é inscritível em uma semicircunferência. Como justificativa tem-se que o par de arcos capazes é a própria circunferência de diâmetro BC, se o ângulo que vê o segmento BC é reto. Ou seja, neste caso, o ângulo central mede 180°, onde o centro O da circunferência coincide com o ponto médio de BC, sendo este o diâmetro da mesma.

Agora, tendo mostrado que estamos trabalhando com um triângulo retângulo, sugerimos complementar a construção realizada anteriormente, (continuar a construção com o 6º passo (figura abaixo)), para que se possa prosseguir com a dedução algébrica do Teorema de Pitágoras, como consta no quadro a seguir.

Quadro 3 - Continuação: dados complementares para a dedução do Teorema de Pitágoras

	6º: Traçar a reta r perpendicular $\overline{BC}$, passando por A. 7º: Representar no ΔABC: $\begin{cases} \overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b. \\ \overline{AH} = h \\ \overline{BH} = m \text{ e } \overline{HC} = n \end{cases}$	• Altura de um triângulo. • Semelhança de triângulos. • Proporções • Sistemas lineares • Construção geométrica elementar: traçar a perpendicular a uma reta passando por um ponto fora dela.

Fonte: das autoras

Nesse estágio, é possível que o professor indague os alunos sobre o procedimento de construir uma reta perpendicular à reta suporte do segmento BC, de modo que eles possam justificar, caso ainda não tenham realizado tal justificativa. Nesse caso, tomamos esse um conhecimento prévio a ser mobilizado, uma vez que o mesmo concerne a determinação de um novo segmento sobre a reta suporte que permita construir a mediatriz deste, mostrando que o ponto dado fora da reta suporte pertence a mediatriz deste segmento. De posse dessas informações, propomos o trabalho dedutivo com os alunos, a partir da seguinte situação-problema:

Situação-problema 1 – Parte II: *Que relação podemos estabelecer entre os triângulos ABC, HAC e HBA? Que relações algébricas são possíveis entre os segmentos de medidas m, n, a b, c e h?*

Para essa situação temos por objetivo que os alunos possam verificar que os ΔABC~ΔHAC~ΔHBA são semelhantes (Caso AA), já que ΔABC~ΔHAC ,ΔABC~ΔHBA, assim como, ΔHAC~ΔHBA. Pela relação de proporcionalidade entre os lados dos três triângulos dados, podemos verificar que: Por semelhança entre $\Delta ABC \sim \Delta HAC$, temos que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CH}}$. Assim, $\frac{c}{h} = \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \rightarrow \begin{cases} b^2 = an \ (1) \\ e \\ ah = bc \ (2) \end{cases}$

Pela semelhança entre ΔABC~ΔHBA, temos uma nova relação algébrica, a saber:

$$c^2 = am \ (3)$$

Na semelhança entre ΔHAC~ΔHBA, temos que $h^2 = mn$ (4)

Somando, membro a membro, as relações (1) e (3) temos que a$a^2 = b^2 + c^2$.

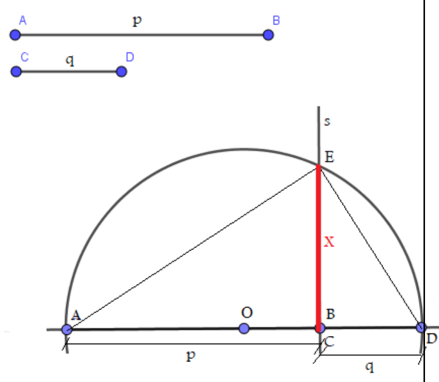
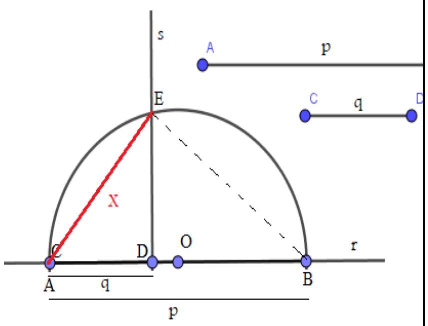
Essa relação é enunciada por *Teorema de Pitágoras*, onde temos que, em triângulos retângulos podemos relacionar a soma dos quadrados das medidas dos catetos com o quadrado da medida da hipotenusa. Neste momento, é possível que o professor, após o estudo e construção destas relações com os alunos, institucionalize o *Teorema de Pitágoras*, por meio de construções geométricas e relações algébricas, onde ressaltamos ainda as relações métricas dos triângulos retângulos, onde utilizamos o fato de que $\overline{AH}$: altura relativa à hipotenusa $\overline{BC}$ (h), $\overline{BH}$: Projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$ (m) e $\overline{CH}$: Projeção do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$ (n).

Um dos reinvestimentos da *situação-problema 1* são as construções geométricas de segmentos denominadas de **média geométrica** ou **média proporcional**. Denomina-se **média geométrica** entre dois segmentos p e q dados, o segmento $\boldsymbol{x}$, tal que $x^2 = p.q$. Note que, como $\boldsymbol{x}$ é positivo, assim $x^2 = p.q$ equivale a $x = \sqrt{p.q}$.

Desta forma, tomamos a seguinte situação problema, com vista aos alunos revisitarem e ampliarem esta relação para quaisquer dois segmentos dados.

Situação-problema 2: *Como obter graficamente a média geométrica entre dois segmentos p e q dados?*

Quadro 4 - Resolução gráfica da média geométrica

Construção com régua e compasso	**Procedimentos:**	**Alguns conceitos e construção:**
Solução 1:  EB = $x = \sqrt{p.q}$ Ou,	1º: Traçar a reta r. 2º: Realizar o transporte dos segmentos dados para a reta r, de modo que eles sejam consecutivos (solução 1). 3º: Determinar o ponto médio de $\overline{AD}$, o ponto O. 4º: Traçar a circunferência de centro O e raio $\frac{\overline{AD}}{2}$. 5º: Traçar a reta s perpendicular a r, passando por B. 6º: Marcar o ponto E, sendo este a intersecção da reta s com a circunferência construída. 7º: Traçar $\overline{EB}$, sendo este o segmento **x** procurado.	• Relações métricas no triângulo retângulo. • Teorema de Pitágoras. • Construções geométricas elementares como: traçar retas, transporte de segmentos, determinar ponto médio de um segmento, traçar circunferência dado o centro e o raio, traçar a reta perpendicular a um segmento passando por um ponto desse segmento, arco capaz de 90°. • Lugar geométrico: mediatriz, circunferência, arco capaz de 90°.
Solução 2:  ED = $x = \sqrt{p.q}$	1º: Traçar a reta r. 2º: Realizar o transporte dos segmentos dados para a reta r, com uma extremidade em comum e o menor coincidindo sobre o maior (solução 2). 3º: Determinar o ponto médio de $\overline{AB}$, o ponto O. 4º: Traçar a circunferência de centro O e raio $\frac{\overline{AB}}{2}$. 5º: Traçar a reta s perpendicular a r, passando por D. 6º: Marcar o ponto E, sendo este a intersecção da reta s com a circunferência construída. 7º: Traçar $\overline{EC}$, sendo este o segmento **x** procurado.	

Fonte: das autoras

Para construir a média geométrica podemos obtê-la a partir de duas relações métricas trabalhadas anteriormente ($h^2 = m.n$ e $b^2 = a.m$).

Na primeira ($h^2 = m.n$), referente a primeira solução que apresentamos temos que a altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa, ou seja, $h = \sqrt{mn}$.. Assim sendo, para construir a média geométrica por esta forma, iniciamos realizamos o transporte de segmentos para uma reta suporte. E, em seguida, é importante observar que, neste caso, o diâmetro da semicircunferência é p+q e, consequentemente, o raio é o segmento que representa a média aritmética entre os segmentos p e q.

No entanto, solicitamos determinar o ponto médio de $\overline{AD}$. Aqui, buscamos que os alunos apresentem argumentações sobre como fazer isso, sem utilizar a graduação da régua, sendo mais uma forma de trabalhar com a mediatriz como lugar geométrico. Da mesma forma que o quinto passo da construção, exige esta mesma ideia, a partir de um novo segmento sobre a reta suporte r, passando por B. É a partir da interseção da perpendicular a $\overline{AD}$ que passa por B com a circunferência que determinaremos o ponto E, onde $\overline{EB}$é a média geométrica entre p e q ou seja, $(\overline{EB}) = x = \sqrt{pq}$.

Da mesma forma, a segunda solução é obtida, a partir da relação $b^2 = a.m$, ou seja, que $b = \sqrt{am}$ significa que um cateto é média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela. Quanto aos procedimentos de construção temos que a diferença neste caso está em tomar o segmento de comprimento q sobre o segmento de comprimento p, e não de forma consecutiva, como foi no primeiro caso. Temos então, que $\overline{ED}$ é a média geométrica entre p e q, isto é, $\overline{ED} = x = \sqrt{pq}$.

Cabe destacar que nesta situação, é muito provável que os alunos tentem realizar argumentações, mas com apoio do processo de construção da figura.

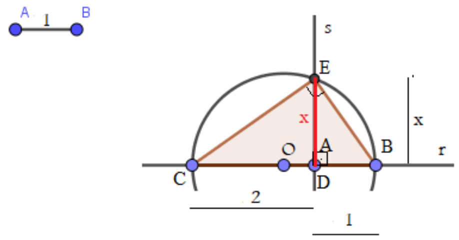
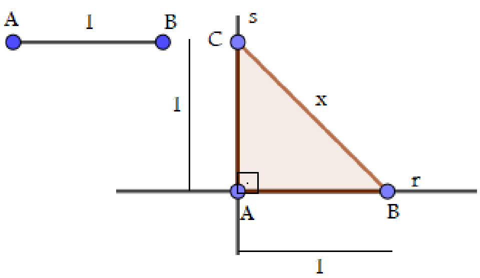
Com a proposta da *situação-problema 3*, considerando o teorema de Pitágoras e as relações métricas no triângulo retângulo, vamos verificar suas aplicações com as construções geométricas. Os alunos sabem que √2 é um número irracional. Porém, neste momento os alunos estão em um *meio antagônico*, onde terão que construir um segmento com essa medida, já que uma estratégia de resolução já descartada em nível de experimentação, seria quanto ao uso da graduação da régua.

Situação-problema 3: *Dado um segmento de comprimento 1, como construir um segmento de comprimento $\sqrt{2}$?*

Como esse problema não fornece dicas para construir esse segmento de comprimento √2, as estratégias que os alunos podem utilizar devem ser articuladas aos conhecimentos geométricos que possuem, para que possam fazer conjecturas a fim de contribuir com a construção a ser realizada.

Um dos objetivos desse problema é usar a relação métrica do triângulo retângulo. Construir um triângulo retângulo em A, cuja altura relativa à hipotenusa é a média geométrica entre as projeções dos catetos $\overline{AB}$, de comprimento 1 e $\overline{AC}$, de comprimento 2, sobre a hipotenusa. Seguindo os procedimentos abaixo, a altura relativa a $\overline{BC}$ será $\sqrt{2}$, que chamaremos por x. Esta concerne a primeira solução no quadro que segue.

Quadro 5 - Construção gráfica do segmento de comprimento $\sqrt{2}$

Construção com régua e compasso	**Procedimentos:**	**Alguns conceitos e construção:**
Solução 1:  $x = \sqrt{2}$ Ou,	1º: Traçar a reta *r*. 2º: Realizar o transporte dos segmentos dados para a reta *r*, de modo que eles sejam consecutivos sendo o primeiro, o segmento de comprimento *1+1* e, depois, o de comprimento *1*. 3º: Determinar o ponto médio de $\overline{BC}$, o ponto O. 4º: Traçar a circunferência de centro O e raio OC. 5º: Traçar a reta *s* perpendicular a *r*, passando por A. 6º: Marcar o ponto E, sendo este a intersecção da reta s com a circunferência construída. 7º: Traçar $\overline{EA}$, sendo este o segmento **x** procurado.	• Relações métricas no triângulo retângulo. • Construções geométricas elementares como: Transporte de segmento, ponto médio de um segmento, traçar circunferência dado o centro e o raio, traçar a reta perpendicular a um segmento passando por um ponto desse segmento. • Lugares geométricos: mediatriz, circunferência, arco capaz.
Solução 2:  $x = \sqrt{2}$	1º: Traçar a reta *r*. 2º: Realizar o transporte do segmento dado ($\overline{AB}$), com origem no ponto A e com outra extremidade em B. 3º: Traçar a reta s perpendicular à r passando por A. 4º: Sobre a reta *s* transportar o segmento dado, com origem em A e com outra extremidade C. 5º: Traçar $\overline{BC}$, sendo este o segmento **x** procurado.	

Fonte: das autoras

O professor pode, nesse processo em que os alunos estão elaborando estratégias para resolver o problema, lembrar que na antiguidade os gregos solucionavam através de um segmento unitário u. Com esta estratégia é possível pensar o segmento de comprimento 2, como sendo o dobro do comprimento 1, ou seja, originando o segmento de comprimento 1+1.

Outra estratégia a ser usada pelo aluno concerne à segunda solução que trazemos no quadro acima, onde é possível que os alunos conjecturem sobre o fato de encontrar os catetos de um triângulo retângulo, cuja hipotenusa seja o segmento de comprimento $\sqrt{2}$, visualizando, por conseguinte, que o segmento de comprimento $\sqrt{2}$ corresponde a hipotenusa de um triângulo retângulo de lados de comprimento 1. Notemos que aqui, a argumentação dos alunos está apoiada sobre um exemplo particular, que passa a ser validado com o uso do Teorema de Pitágoras, mesmo que intuitivamente.

Essa situação é comum hoje nos livros didáticos, onde os alunos calculam a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos unitários numericamente. Antigamente essa construção geométrica fazia parte das construções elementares. Era dado um segmento unitário u e era construído um triângulo retângulo com os catetos tendo essa medida. A solução era completamente geométrica. Com isso o segmento de medida x é a visualização do número real $\sqrt{2}$.

Ainda nesta situação cabe ao professor, realizar o questionamento sobre a recíproca do teorema de Pitágoras, uma vez que até o momento, estávamos trabalhando com o fato de que, num triângulo retângulo, vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$, com a hipotenusa e b e c catetos. Isso é importante como forma de discutir aspectos do processo dedutivo em questão, principalmente, quanto à hipótese e tese de uma proposição dada. Neste caso, é interessante abrir uma possibilidade de dedução da recíproca do Teorema de Pitágoras, pois é ela que garante a validade de toda a construção realizada. Com isso, o professor pode perguntar aos alunos se dado um triângulo de lados a, b, e c, onde vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$, com a, b e c reais positivos, se este triângulo é retângulo. Apresentamos a seguir, uma dedução para a recíproca do Teorema de Pitágoras:

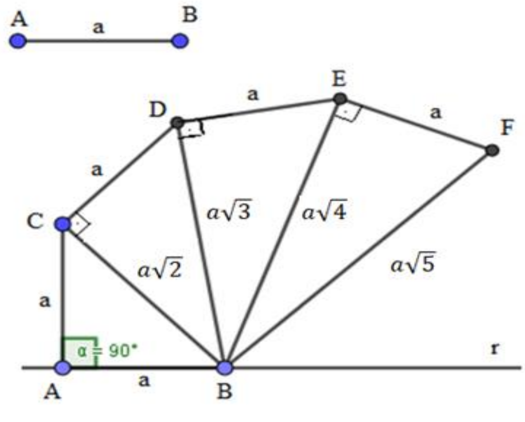
> Dado um triângulo ABC com $\overline{BC}$=a, $\overline{AB}$=c e $\overline{AC}$=b, construir um triângulo MNP, retângulo em M, cujos catetos $\overline{MN}$ e $\overline{MP}$ sejam respectivamente congruentes a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Assim, temos que como o triângulo MNP é retângulo em M, então vale a relação $m^2 = n^2 + p^2$. Como n=b e p=c, temos que $m^2=b^2+c^2$. Logo, $m^2=a^2$, ou seja, m=a. Então, pelo caso LLL, o triângulo ABC é congruente ao triângulo MNP e, como o triângulo MNP é retângulo em M, temos que, o triângulo ABC é retângulo em A. (DOLCE, POMPEO, 2005, p.225).

Como variações deste problema, uma possibilidade é de o professor estimular os alunos com mais questionamentos a respeito, como no caso de ao tomar o segmento de comprimento 1, como construir um segmento de comprimento √3 ? E de √4, √5.... √n ,com n ε N? E, ainda, é sempre possível construir com régua e compasso, um segmento de comprimento √n , com n ε R? Essa última pergunta discute a impossibilidade de construção com régua e compasso, como ao encontrar um segmento de comprimento π.

Essa indagação remete ainda a problemas que não são possíveis de serem resolvidos com régua e compasso, como no que se refere a quadratura do círculo. Por outro lado, outros problemas de serem passíveis de construção, tendo como motivação inicial a situação-problema 3 que aqui trouxemos, também está no fato de indagar aos alunos sobre: *Como construir um quadrado ABCD, a partir da diagonal AC? E, ainda, como construir um quadrado ABCD dado o segmento AB?* Com o objetivo de desencadear uma generalização da situação-problema anterior, apresentamos o seguinte questionamento: *Dado um segmento a, como construir um segmento de comprimento $a\sqrt{n}$, com n natural?*

Note que nesta última situação, o procedimento de construção é igual ao que apresentamos na solução 2 da *situação-problema 3*, com o diferencial que o segmento dado concerne a um comprimento a e não 1, como tomado inicialmente. Neste caso é interessante que os alunos elaborem suas próprias estratégias e percebam que, a partir da construção do primeiro triângulo retângulo, obtendo a hipotenusa desejada, a ideia é de ir traçando segmentos de comprimento a, que sejam perpendiculares à hipotenusa de cada triângulo formado anteriormente, como a figura que segue:

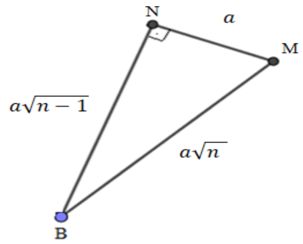
Figura 1 – Construção do segmento $a\sqrt{n}$



Fonte: das autoras

Consequentemente, esse procedimento nos permite ir continuando a construção, sendo possível ir generalizando até obter o segmento de comprimento $a\sqrt{n}$, com o n desejado, a partir do segmento obtido no triângulo anterior e com o segmento de comprimento a perpendicular a ele. Vejamos na imagem que segue:

Figura 2 – Generalização: construção do segmento $a\sqrt{n}$



Fonte: das autoras

Por outro lado, é interessante também estimular os alunos para identificar alguns padrões nesta sequência, os indagando, por exemplo, se é possível construir um segmento do tipo $a\sqrt{n}$, sem precisar fazer passo a passo todos os procedimentos anteriores realizados.

Algumas considerações

Na produção deste texto vimos nas construções geométricas, um terreno fértil para desencadear um possível estudo com o Teorema de Pitágoras e suas aplicações, tendo em vista um possível trabalho aliado à iniciação da prática dedutiva que pode ser desenvolvido com alunos dos anos finais do ensino fundamental.

Seguindo os pressupostos de Brousseau, que busca entre outros proporcionar situações fundamentais para que os alunos possam elaborar estratégias e validar seu conhecimentos, acreditamos que as situações-problema que trazemos aqui podem favorecer o estudo dos conceitos geométricos envolvidos. Isso é dito pois, no desenvolvimento destas os alunos podem conjecturar, argumentar, investigar, bem como validar seus conhecimentos com algumas demonstrações e provas. Isso pode contribuir para que eles realizem outras deduções lógicas em geometria, como foi o trato com a recíproca do Teorema de Pitágoras, bem como nos questionamentos para a possibilidade de construção de segmentos incomensuráveis, utilizando régua e compasso.

Referências

BALACHEFF, N. **Une étude des processus de preuve en Mathématiquechez les élèves de collège.** Tese de Doutorado. Grenoble: Université Joseph Fourier, 1988

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**. Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

DOLCE, O. POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática elementar**: Geometria Plana. Vol. 9. 8ª ed. São Paulo. Ed. Atual, 2005.

FREITAS, M.L.J. **Notas de aula**. Disciplina de Tópicos Especiais em Educação Matemática: Geometria Euclidiana. PPGEduMat: UFMS, 2020.

GARCIA, O. S. **Um estudo de argumentações produzidas por alunos do 8º ano em atividades de construções geométricas envolvendo pontos notáveis do triângulo**. Dissertação (mestrado). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, UFMS. Campo Grande, 2009.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** In: A Educação Matemática em Revista, nº 4. São Paulo: SBEM, 1995.

PAVANELLO, M. R. **O abandono do ensino de geometria no Brasil:** causas e consequências. In: Zetetiké, ano 1, n. 1, p. 7-17. Unicamp, Faculdade de Educação, 1993.

PUTNOKI, C. J. **Desenho Geométrico**. Editora Scipione, 4ª Ed. São Paulo, 1993.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, B. J.**Tópicos de História da Matemática**. SBM - Coleção PROFMAT, 2012.

WAGNER, E. **Uma Introdução às Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009.

Recebido em: 07 / 03 / 2021
Aprovado em: 20 / 04 / 2021