

ASPECTOS HISTÓRICOS DA MATEMÁTICA RECREATIVA DEKAPREKAR

HISTORICAL ASPECTS OF KAPREKAR'S RECREATIVE MATHEMATICS


Arthur Henrique da Silva¹; Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes²

RESUMO


Este artigo tem como objetivo central a apresentação da Constante de Kaprekar e alguns aspectos históricos relativos a essa constante. Os resultados aqui expostos são um recorte de uma dissertação de mestrado, defendida no âmbito do programa de pós-graduação PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) da Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Para o desenvolvimento de nossa pesquisa utilizamos como fio condutor uma discussão acerca da Matemática Recreativa. Procuramos expor algumas definições sobre a Matemática Recreativa, buscando uma melhor compreensão sobre o tema. Destacamos alguns fatos históricos relativos a Matemática Recreativa. Com isso, percebemos a sua presença ao longo da História da Matemática. Para isso, fizemos uma revisão bibliográfica de trabalhos de autores que tem se debruçado sobre essa temática. Esse entendimento se fez necessário para abordarmos o nosso tema central, pois foi por meio da Matemática Recreativa que o mundo ocidental teve acesso aos resultados encontrados pelo indiano Dattatreia Ramchandra Kaprekar. No âmbito da Matemática Recreativa mundial encontra-se Martin Gardner, notável escritor e incentivador do desenvolvimento de temas matemáticos de forma lúdica. Foi Gardner, que em março de 1975, em uma de sua tradicional coluna Mathematical Games da Scientific American, provocou os seus leitores com a curiosa Constante de Kaprekar. Após esse fato histórico, muitos matemáticos dedicaram-se ao estudo das relações matemáticas que desencadeiam na Constante de Kaprekar e muitos resultados foram encontrados. Além da discussão sobre a Matemática Recreativa, destacamos fatos sobre a vida e o contexto histórico desse indiano. Por último, apresentamos a Constante de Kaprekar de forma a entendermos as relações matemáticas que permeiam o estudo dessa constante no cenário da Matemática Recreativa e indicamos alguns resultados matemáticos relativos ao estudo dessa constante e seus desdobramentos. Concluimos nosso artigo, apontando que o uso da Matemática Recreativa para o ensino de Matemática em sala de aula no Brasil ainda é um campo que precisa de mais discussões que lhe confira efetiva validade entre os professores e pesquisadores em Educação Matemática.

Palavras-chave: Matemática Recreativa; História da Matemática; Constante de Kaprekar; Ensino de Matemática.

¹ Mestre, Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Estudante da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, Rio Grande do Norte, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Umarizal, 89, Nova Parnamirim, Parnamirim, Rio Grande do Norte, Brasil, CEP: 59152-505. E-mail: arthurproformat14@gmail.com.

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-7239-3585>.

² Doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professora de Magistério Superior, Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Natal, Rio Grande do Norte, Brasil. Endereço para correspondência: Prédio do CCET Campus Universitário, S/N, Lagoa Nova, Natal, Rio Grande do Norte, Brasil, CEP: 59078-970. E-mail: glucheze@gmail.com

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5529-8359>.



ABSTRACT

This article has as its central objective the presentation of the Kaprekar Constant and some historical aspects related to this constant. The results presented here are an excerpt from a master's dissertation, defended in the scope of the postgraduate program PROFMAT (Professional Master in Mathematics in National Network) of the Federal University of Rio Grande do Norte. For the development of our research we used as a guiding thread a discussion about Recreational Mathematics. We try to expose some definitions about Recreational Mathematics, seeking a better understanding of the theme. We highlight some historical facts related to Recreational Mathematics. With that, we perceive its presence throughout the History of Mathematics. For this, we made a bibliographic review of the works of authors who have been working on this theme. This understanding was necessary to address our central theme, as it was through Recreational Mathematics that the Western world had access to the results found by the Indian Dattatreia Ramchandra Kaprekar. Within the scope of worldwide recreational mathematics is Martin Gardner, a notable writer and promoter of the development of mathematical themes in a playful way. It was Gardner, who in March 1975, in one of his traditional Scientific American Mathematical Games column, teased his readers with the curious Kaprekar Constant. After this historical fact, many mathematicians dedicated themselves to the study of the mathematical relations that trigger in the Kaprekar Constant and many results were found. In addition to the discussion on Recreational Mathematics, we highlight facts about the life and historical context of this Indian. Finally, we present the Kaprekar Constant in order to understand the mathematical relationships that permeate the study of this constant in the Recreational Mathematics scenario and indicate some mathematical results related to the study of this constant and its consequences. We conclude our article, pointing out that the use of Recreational Mathematics for teaching Mathematics in the classroom in Brazil is still a field that needs more discussions that give it effective validity among teachers and researchers in Mathematics Education.

Keywords: Recreational Mathematics; History of Mathematics; Kaprekar constant; Mathematics teaching.



Introdução

Ao longo dos anos, a Matemática sempre foi, na maioria das vezes, a disciplina em que os alunos apresentavam maior dificuldade. A pesquisadora Sadovsky (2007, apud FRANÇA; SANTOS; SANTOS, 2007) relata que o baixo desempenho na Matemática não é apenas no Brasil, mas é um problema de ordem mundial. Segundo França, Santos e Santos (2007, p.31) “o que se observa na maioria das escolas de Ensino Fundamental e Ensino Médio é o alto índice de reprovação e de alunos com sérias dificuldades para compreender a Matemática, muitas vezes, demonstram desinteresse pela disciplina”. Logo, a Matemática é vista, por maior parte dos estudantes, como uma disciplina em que o aprendizado apresenta uma série de dificuldades e a maioria dos alunos acaba criando uma rejeição ao seu estudo.

Assim, buscar uma forma de mudar a visão dos alunos e da sociedade acerca da Matemática é preciso. Na escola, o professor pode utilizar recursos didáticos para que o aluno se atente mais as aulas. França, Santos e Santos (2007, p.33) afirmam que “uma das alternativas para ajudar o aluno na abstração é utilizar jogos matemáticos em sala de aula, isso estimula o raciocínio-lógico que tanto estamos enfatizando que seja despertado em nossos alunos”. Sugere-se, como forma de mudança, que haja iniciativas, como a introdução de jogos, desafios, projetos, entre outros. Assim, a Matemática Recreativa pode se tornar uma alternativa para os professores nas escolas. No presente artigo, apresentamos nossas conclusões preliminares sobre a definição de Matemática Recreativa e seu potencial uso pedagógico, além de apresentar o indiano Kaprekar e sua Constante como tema potencial para uso no ensino de matemática na Educação Básica.

Mas o que seria essa Matemática Recreativa? Muitas pessoas não ouviram falar em Matemática Recreativa, já que a popularização do termo **Matemática Recreativa** e os estudos voltados para a aplicação dela na Educação Básica é algo que vem se popularizando recentemente no Brasil. A definição desta Matemática não é algo simples de se fazer. Muitos estudiosos acabam por defini-la utilizando palavras, termos e ideias diferentes.

Nossos estudos iniciais indicaram uma grande diversidade de definições. Para melhor compreender os aspectos ligados à Matemática Recreativa na atualidade, resolvemos buscar o ponto de vista de alguns pesquisadores e autores da área e expor suas definições ou discussões acerca do tema. Para isso, fizemos uma revisão bibliográfica de



trabalhos de autores que tem se debruçado sobre essa temática. A metodologia de trabalho que utilizamos contou, primeiramente, com um levantamento preliminar de informações e conhecimentos acerca do tema matemática recreativa a partir de diferentes materiais bibliográficos já publicados, como artigos, dissertações ou teses, para isso fizemos uma busca na internet, por meio da barra de pesquisa do *Google*. Selecionamos alguns trabalhos com foco em duas categorias de interesse: matemática recreativa e matemática recreativa na educação. A partir da leitura desse material, colocamos em diálogo diferentes autores e informações para que chegássemos a uma melhor compreensão que nos ajudasse a responder duas questões: Qual a definição de matemática recreativa? Como utilizar a matemática recreativa pedagogicamente? A síntese dos nossos resultados é apresentada a seguir.

O pesquisador e professor americano Singmaster define da seguinte forma, “Matemática Recreativa é Matemática divertida e popular [...] é uma matemática divertida e usada pedagogicamente como um desvio da Matemática séria ou como uma maneira de tornar Matemática séria compreensível ou palatável.”³(SINGMASTER, 2000, p.4, tradução nossa)

Os estudiosos portugueses Martins e Picado (2014 p.101), que procuram trazer a discussão da definição de Matemática Recreativa da seguinte forma, “Há quem diga de forma muitíssimo simplista que a Matemática Recreativa é o assunto que engloba *puzzles* e jogos matemáticos”.

Outros pesquisadores que procuraram definir o termo foram os Barves e Barves (2012, tradução nossa), enfatizando que a Matemática Recreativa é uma “matemática divertida e usada como diversão da Matemática séria ou como uma maneira de tornar a Matemática séria compreensível ou palatável. [...] Uma definição óbvia é que, é a Matemática levando a alguma diversão, embora para uma pessoa leiga.”⁴

³“Recreational mathematics is mathematics that is fun and popular [...] is mathematics that is fun and used pedagogically either as a diversion from serious mathematics or as a way of making serious mathematics understandable or palatable.” (SINGMASTER, 2000, p.4)

⁴“is fun math and used as fun for serious math or as a way to make serious math understandable or palatable. [...] An obvious definition is that, it is mathematics leading to some fun, albeit for a lay person.” (BARVE, BARVES, 2012)



Já a pesquisadora Bartlová, em sua tese doutoral, trouxe a definição de um grande pesquisador da área de Matemática Recreativa:

talvez a definição mais concisa de Matemática Recreativa seja a que foi fornecida pela figura principal de Matemática Recreativa de todos os tempos, nomeadamente Martin Gardner, que alegou que Matemática Recreativa é aquela parte da Matemática que inclui qualquer coisa que tem espírito de jogo⁵ (BARTLOVÁ, 2016, p.2, tradução nossa)

Bartlová (2016) elaborou sua própria definição sobre a Matemática Recreativa com quatro aspectos: o aspecto científico-popular, o aspecto do divertimento, o aspecto pedagógico e o aspecto histórico. O primeiro desses aspectos, o científico-popular, é caracterizado por ser a parte da Matemática que tem caráter divertido e popular. São problemas que devem ter o compromisso de serem compreensíveis e acessíveis a um “leigo interessado, embora as soluções possam ser mais difíceis. Pela Matemática Recreativa, podemos entender a abordagem usando a qual podemos tornar a matemática séria compreensível ou, pelo menos, mais palatável.”⁶(BARTLOVÁ, 2016, p.2, tradução nossa)

Quando a Matemática é utilizada com o intuito de diversão e almeja um desvio da matemática séria, apresenta-se o aspecto do divertimento. Em seu trabalho, a pesquisadora cita Ian Stewart e Martin Gardner como notáveis matemáticos recreativos. Ela relata que a visão de Ian Stewart sobre Matemática Recreativa perpassa a Matemática como uma fonte de inspiração e alegria, sendo que essa não é ensinada na escola. Já Gardner, em suas publicações defendia que a Matemática ensinada nas escolas deveria ser, até certo ponto, divertida (BARTLOVÁ, 2016).

O terceiro aspecto, levantado por Bartlová (2016), refere-se ao uso pedagógico para fins de ensino, onde o tema a ser ensinado não necessariamente é diretamente a Matemática. A autora cita que esse aspecto tem sido utilizado pela humanidade desde

⁵“perhaps the most concise definition of recreational mathematics is the one that has been provided by the leading figure of recreational mathematics of all times, namely Martin Gardner, who claimed that recreational mathematics is that part of mathematics that “includes anything that has a spirit of play about it”. (BARTLOVÁ, 2016, p.2)

⁶ “interested layman, though the solutions may be harder. By recreational mathematics we can understand the approach using which we can make serious mathematics understandable or, at least, more palatable.”(BARTLOVÁ, 2016, p.2)



épocas antigas até os dias atuais. Dessa forma, podemos vislumbrar o uso pedagógico da Matemática Recreativa em sala de aula para o ensino de conteúdos matemáticos.

Por fim, o aspecto histórico é ressaltado, pois a Matemática Recreativa “sempre desempenhou um papel muito importante na história da matemática e foi responsável pela origem de teorias e conceitos matemáticos importantes que não existiriam sem ela.”⁷(BARTLOVÁ, 2016, p.2, tradução nossa)

Com a exposição das definições de Matemática Recreativa feita por alguns autores, podemos ter uma noção do que seja a Matemática Recreativa na atualidade. Como forma de organizar as ideias e buscar uma melhor compreensão, apresentamos no quadro 1 alguns termos, que destacamos, e que foram utilizados pelos autores na discussão e definição da Matemática Recreativa.

Quadro 1 - Palavras destacadas nas definições de MR de alguns autores

Autores	Termos destacados
Martins, Picado	Puzzles, Jogos
Singmaster	Divertida, Popular, Desvio da Matemática Séria, Compreensível
Barves, Barves	Divertida, Desvio da Matemática Séria, Matemática para Leigos
Gadner, Stewar	Jogos, Alegria, Divertida
Bartlová	Divertida, Popular, Palatável, Compreensível para um leigo, Desvio da Matemática Séria.

Fonte: SILVA (2020, p.11)

Examinando o quadro 1, podemos observar que os autores apresentam vários termos e palavras na busca por definir a Matemática Recreativa, deixando claro que não temos uma definição única e representativa. Com o que foi expostos pelos pesquisadores, de acordo com o quadro 1, baseados nas nossas reflexões, entenderemos por Matemática Recreativa como sendo uma matemática que procura desviar da matemática ensinada da forma tradicional, tornando-a mais compreensível até para leigos, desta forma, a matemática se apresenta de forma divertida e popular.

⁷“ has always played a very important part in the history of mathematics and it was responsible for the origin of whole important mathematical theories and concepts that would not exist without it.” (BARTLOVÁ, 2016, p.2)



Entretanto, encontramos estudos que preferem não definir a Matemática Recreativa. Por exemplo, ao apresentarem o seu estudo, Martins e Picado (2014, p.101) falam que “o melhor é mesmo não a tentar definir. As definições tendem a fechar, e a Matemática Recreativa, na sua gênese, é aberta.” Mesmo construindo uma definição sobre a Matemática Recreativa, acreditamos que o melhor seria não definir, haja vista não ter uma definição concreta e unificada. Assim, quando buscamos definir o que seria Matemática Recreativa, acabamos por restringir até onde esta Matemática pode alcançar.

Atualmente, discussões sobre o uso da Matemática Recreativa, como recurso pedagógico no processo de ensino e aprendizagem na Educação Básica, vem crescendo. Alternativas às aulas tradicionais podem fazer parte do cotidiano da sala de aula, onde podemos utilizar a Matemática Recreativa para prender a atenção do aluno para o que será ensinado, introduzir um assunto, explicar um teorema de forma mais divertida e alegre ou até mesmo verificar a aprendizagem de algum conteúdo. Nessa perspectiva, podemos almejar que o aluno entenda melhor, podendo, também, mudar um pouco sua visão do que seja a Matemática. Ribeiro compartilha da mesma ideia quando diz que:

A procura da solução de um problema nem sempre exige um grande conhecimento de matemática. É nesse momento que a recreação atrai a curiosidade dos que não se interessam pela matéria e os convida à prática do raciocínio lógico-dedutivo e conseqüentemente ao estudo da disciplina. (RIBEIRO, 2018, p.11)

Desta forma, a Matemática Recreativa pode desempenhar um papel importante na desconstrução da Matemática tradicional e na quebra do paradigma de ser a disciplina com maior dificuldade entre os alunos da Educação Básica. E cada vez mais, hoje em dia, é preciso que ela se faça presente nas salas de aula para que a visão de uma matemática sistemática e as vezes que não serve para o dia a dia das pessoas seja aos poucos desconstruída.

Matemática Recreativa ao longo da história

Em muitos documentos antigos são encontrados problemas que remetem a nossa noção atual sobre Matemática Recreativa. Muitas vezes, historicamente, utilizada para ensinar algo ou suscitar novos conhecimentos dentro da própria Matemática.



O Papiro de Rhind é um documento egípcio escrito por volta de 1650 a.C e foi escrito por Ahmes (por isso, algumas vezes, o papiro de Rhind é também conhecido como papiro de Ahmes). Nesse documento, encontram-se diversos problemas matemáticos, sua grande maioria problemas não cotidianos da época, que abordam conteúdos de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, entre outros. Ribeiro (2018, p.11) relata que o papiro Rhind possui “problemas criativos e lúdicos”. Já Bartlová, expõe o lado recreativo de um fragmento do Papiro de Rhind,

Os egípcios costumavam declarar seus problemas de matemática na forma de um quebra-cabeça. Como estes problemas não tinham aplicação na vida cotidiana, talvez seu principal objetivo fosse fornecer prazer intelectual. Um dos primeiros casos tem a forma de uma canção de ninar:

Há 7 casas, em cada casa temos 7 gatos, cada gato mata 7 ratos, cada rato comeu 7 grãos de cevada, cada grão teria produzido 7 hekats de cevada. Qual a soma das coisas enumeradas?”⁸ (BARTLOVÁ, 2016, p.15, tradução nossa)

Outro momento importante para a Matemática que teve início em situações recreativas foi a origem da probabilidade. A probabilidade existia em nosso meio há muito tempo, segundo Carloni (2019, p.13) os primeiros registros de probabilidade estão associados a jogos de azar na época da idade média. Mais tarde, no século XVII, um desafio proposto pelo Chevalier de Meré, à Blaise Pascal, conhecido como problema dos pontos, apresenta a seguinte situação: “Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo. Quando o primeiro jogador tinha 4 pontos e o segundo tinha 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio?” (CARLONI, 2019, p.13). Com o problema em mãos, Pascal passou a acionar e trocar cartas com seu amigo matemático Pierre de Fermat em busca de solucionar tal problema. Estas cartas são os registros do início da construção da teoria da probabilidade.

Outro exemplo de Matemática Recreativa, dando origem a uma grande teoria, está associada a resolução do problema das sete pontes de Königsberg, resolvido por Leonard Euler em 1736. O problema refere-se à cidade de Königsberg, a qual possui um conjunto de pontes interligando partes da cidade. O desafio consiste em passar por todas as pontes

⁸There are seven houses; in each house there are seven cats; each cat kills seven mice; each mouse has eaten seven grains of barley; each grain would have produced seven hekat. What is the sum of all the enumerated things. (BARTLOVÁ, 2016, p.15)



uma única vez e retornar para o ponto de partida. Tal problema e solução deram origem a teoria de grafos.

Nossa história está repleta de exemplos no contexto da Matemática Recreativa, dentre eles, ainda destacamos, os números binários que foram criados apenas pela curiosidade e diversão e que hoje em dia é a linguagem da nossa computação. Além dos binários, temos desafios e jogos que encontramos hoje em dia, como o cubo mágico, Sudoku e torre de Hanoi. No Brasil, um autor se destacou por popularizar a Matemática Recreativa em todo território nacional, Júlio César de Mello e Souza (1895-1974). Conhecido como Malba Tahan, seus livros foram traduzidos para vários idiomas e ainda hoje desafia seus leitores. Assim, observamos que a Matemática Recreativa sempre esteve presente na história da humanidade.

Kaprekar e sua matemática

Nosso objetivo central é apresentar a Constante de Kaprekar e alguns aspectos históricos relativos a essa constante. Para isso, começaremos por expor um pouco do contexto histórico em que o indiano Kaprekar viveu e alguns aspectos relacionados a sua vida. A Índia, no início do século XX, vivia sob controle do império britânico. Após o fim da primeira guerra mundial, o parlamento britânico acabou fazendo inúmeras reformas na comunidade indiana a fim de amenizar os efeitos que a guerra trouxe a nação inglesa. Tais reformas trouxeram indignação ao povo e ao parlamento indiano e uma onda em busca da independência da Índia tomou força. Além dessa tensão, existia uma disputa religiosa entre os Hindus e os Mulçumanos pela predominância no território indiano. Após o fim da segunda guerra mundial, a Inglaterra vê insustentável o domínio do território indiano e resolve fazer transição de independência da Índia.

Nesse cenário, nasceu e viveu nosso personagem. Em 17 de janeiro de 1905, na cidade de Dahanu, a cerca de 100 quilômetros da capital indiana Mumbai, nascia Dattatreya Ramchandra Kaprekar. Ele vem de uma família muito humilde e foi basicamente criado pelo pai, já que sua mãe faleceu quando ainda tinha apenas oito anos de idade. O pai de Kaprekar era fascinado pela astrologia, muito das vezes o jovem indiano acompanhava seu pai nos estudos sobre os astros, na qual deve ser o motivo pelo encantamento que Kaprekar adquiriu pelos números, já que o estudo da astrologia necessita um certo conhecimento matemático.



Kaprekar frequentou a escola secundária em Thane, região próxima da capital indiana Mumbai. Naquela época, ele já mostrava o seu gosto por uma Matemática mais divertida, mais recreativa. O'Connor e Robertson (2007) confirmam quando diz que na escola, Kaprekar passava muitas horas felizes resolvendo quebra-cabeças matemáticos. Posteriormente, em 1923, Kaprekar estudou no *Fergusson College* em Pune. A escola é bastante conceituada na Índia, muitas pessoas importantes do povo indiano estudaram nesta instituição de ensino. Nessa instituição, em 1927, Kaprekar ganhou o prêmio *Wrangler R.P. Paranjpe*, que é concedido pela melhor matemática original produzida por um aluno. Assim, o jovem indiano começou a mostrar a sua aptidão pela matemática.

Em 1929, na Universidade de Mumbai, Kaprekar se formou bacharel em Matemática. Após sua formação, começou a lecionar numa cidade na região central da Índia, chamada Devlali. À medida que os anos se passaram, Kaprekar chamava a atenção da forma como os seus alunos se encantavam pela Matemática, muito pela forma como o professor transmitia o seu conhecimento. Assim, Kaprekar (figura 1) passou a dar palestras nas universidades e escolas da redondeza sobre os métodos que praticava em sala de aula e revelar um pouco sobre suas pesquisas.

Figura 1 - Dattatreia Ramchandra Kaprekar



Fonte: O'Connor e Robertson (2007).

Mesmo depois de formado, Kaprekar continuou a estudar e praticar a matemática mais avançada. Um dos ramos que mais gostava de estudar e se identificava era a teoria dos números. Para expressar sua paixão pela Matemática, ele costumava falar que “Um bêbado quer continuar bebendo vinho para permanecer naquele estado agradável. O mesmo acontece comigo no que diz respeito aos números.” (O'CONNOR, ROBERTSON, 2007)



À medida que Kaprekar pesquisava, percebeu a necessidade de divulgar os resultados. Porém, Kaprekar sempre encontrou dificuldade em divulgar suas pesquisas em revistas renomadas da Índia. Gomes e Malheiro explicam que

Os problemas matemáticos a que Kaprekar se dedicava eram considerados pelos matemáticos mais iminentes como triviais e pouco importantes, de tal forma que dificilmente ele conseguia publicar os seus trabalhos em revistas renomadas, sendo conhecido fundamentalmente no nível da Matemática recreativa e dos jogos matemáticos. (GOMES, MALHEIROS, 2011, p.1)

Como Kaprekar não fez pós-graduação, nunca recebeu um treinamento formal da Matemática superior, que na época era peculiar aos estudantes de pós-graduação. Esta falta de conhecimento de uma Matemática mais formal era comum em alguns matemáticos indianos. Essa falta de formalização da sua Matemática e o ramo em que gostava de pesquisar, fez com que Kaprekar sofresse julgamentos negativos dos companheiros indianos matemáticos acerca dos trabalhos divulgados, relatavam que seus trabalhos eram sem importância e muito triviais.

Durante toda a sua vida, Kaprekar trabalhou sozinho nas suas pesquisas. O reconhecimento em nível mundial só veio a partir de 1975, quando o grande percursor da Matemática Recreativa no mundo, Martin Gardner, escreveu sobre uma das pesquisas de Kaprekar em sua coluna *Mathematical Games*, na edição de março da revista *Scientific American*. Seus resultados, como a Constante de Kaprekar e Números de Kaprekar, passaram a ser conhecidos e estudados por muitas pessoas da Matemática e fora da Matemática. Após 11 anos da publicação de Martin Gardner, em 1986, Kaprekar faleceu, mas deixou um legado importante para a Matemática Recreativa.

A constante de Kaprekar

Um dos trabalhos mais notáveis de Kaprekar é sobre a Constante de Kaprekar, popularizado pela publicação de Martin Gardner em sua coluna. Aqui no Brasil, a Constante de Kaprekar foi citada recentemente em grandes portais eletrônicos como Globo, Uol, Folha de São Paulo e BBC. Para introduzir e compreender a Constante de Kaprekar, nossa metodologia contou com uma revisão da literatura disponível em sites da internet de trabalhos que se apresentam esse tema e seus desdobramentos matemáticos. Além da compreensão acerca da constante de Kaprekar, também procuramos responder



a seguinte questão: como esse tema pode auxiliar no ensino de Matemática na Educação Básica? A seguir, apresentamos uma síntese da análise e interpretação das informações encontradas.

Na vigésima nona edição da Olimpíada de Matemática do Brasil, uma das questões voltada para o público do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental II foi sobre a Constante de Kaprekar:

Em 1949 o matemático indiano D. R. Kaprekar, inventou um processo conhecido como Operação de Kaprekar. Primeiramente escolha um número de quatro dígitos (não todos iguais), em seguida escreva a diferença entre o maior e o menor número que podem ser formados a partir de uma permutação dos dígitos do número inicial. Repetindo o processo com cada número assim obtido, obtemos uma seqüência. Por exemplo, se o primeiro número for 2007, o segundo será $7200 - 0027 = 7173$. O terceiro será $7731 - 1377 = 6354$. Começando com o número 1998, qual será o 2007-ésimo termo da seqüência? (XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática. Segunda Fase. Nível 2. Disponível em www.obm.org.br 2007)

Para encontrar a resposta para esse problema o participante da Olimpíada deveria proceder as iterações propostas no enunciado partindo do número 1998:

Primeira iteração: $9981 - 1899 = 8082$

Segunda iteração: $8820 - 0288 = 8532$

Terceira iteração: $8532 - 2358 = \mathbf{6174}$

Quarta iteração: $7641 - 1474 = \mathbf{6174}$

Percebemos que a partir da terceira iteração sempre obteremos o número **6174**. Assim, a resposta para o problema da Olimpíada é 6174. Foi seguindo esse raciocínio que Kaprekar descobriu essa operação que leva sempre ao número 6174, que é conhecido por **Constante de Kaprekar**.

Para compreender melhor o funcionamento dessa operação, descrevemos o procedimento que devemos seguir:

- 1º) Escolha um número inteiro positivo de quatro dígitos, desde que possua pelo menos dois dígitos diferentes;
- 2º) Em seguida reorganize os dígitos do número escolhido em ordem decrescente e subtraia do número estabelecido organizando os dígitos em ordem crescente;
- 3º) Pegamos o resultado da subtração e repetimos o procedimento imediatamente anterior até encontrar a Constante de Kaprekar, o número 6174.



Vamos ilustrar repetindo o procedimento descrito anteriormente para o número 1956.

1º passo: escolher um número de 4 dígitos: 1956;

2º passo: reorganizar os dígitos em ordem decrescente, 9651. Depois em ordem crescente, 1569. Após isso, fazer a subtração destes dois números:

$$9651 - 1569 = 8082.$$

3º passo: caso não tenha chegado ao número 6174 (chegamos ao número 8082) temos que realizar o procedimento novamente. Reorganizar em ordem decrescente, 8820, e na ordem crescente, 0288. E fazer a subtração:

$$8820 - 0288 = 8532.$$

4º passo: repetiremos novamente a 2ª instrução. Reorganizamos na ordem decrescente, 8532, e na ordem crescente, 2358. E fazer a subtração:

$$8532 - 2358 = \mathbf{6174}.$$

Reorganizando na ordem decrescente, 7641, e na ordem crescente, 1467, e fazendo a subtração obteremos, $7641 - 1467 = 6174$, ou seja, ao repetir a instrução para o número 6174 chegamos a ele mesmo. Assim, observamos que partindo do número 1956 chegamos ao número 6174 repetindo a instrução por três vezes.

Agora vamos realizar o procedimento com o número 8349, porém de forma mais rápida e intuitiva:

$$9843 - 3489 = 6354$$

$$6543 - 3456 = 3087$$

$$8730 - 0378 = 8352$$

$$8532 - 2358 = \mathbf{6174}$$

Observamos que chegamos no mesmo número que no exemplo anterior, só que utilizamos a instrução quatro vezes. Vamos realizar agora com o número 1993:

$$9931 - 1399 = 8532$$

$$8532 - 2358 = 6174$$

Seguindo as instruções dadas anteriormente, sempre chegaremos na Constante de Kaprekar, **6174**. Esta descoberta foi feita por Kaprekar em 1946 e anunciada em 1949 na conferência nacional de Madras, na Índia, e posteriormente publicada no artigo Problemas Envolvendo Reversão de Dígitos, em 1953. Observamos que os exemplos apresentados, nos fizeram chegar ao número 6174, entretanto o número de iterações necessária para isso pode ser diferente.



A descoberta de Kaprekar suscitou uma questão: qual a quantidade de iterações necessárias para se chegar a Constante de Kaprekar? Matemáticos se debruçaram em estudos e chegaram a conclusão que o número máximo de iterações é sete. A tabela 1 mostra a relação entre quantidade de número de quatro dígitos e a quantidade de iterações que precisamos fazer para alcançar a Constante de Kaprekar.

Tabela 1 - Quantidade de iterações e a frequência dos números de quatro dígitos

Quantidade de Iteração	Frequência
0	1
1	356
2	519
3	2124
4	1124
5	1379
6	1508
7	1980

Fonte: Gomes e Malheiros (2011, p.2)

Vale salientar que esses mesmos procedimentos foram testados para números com outras quantidades de dígitos. Foi verificado que com três dígitos, repetindo o mesmo procedimento acima, chegaremos sempre no número 495.

No que diz respeito ao uso da Constante de Kaprekar no ensino de Matemática na Educação Básica, não encontramos trabalhos que explorasse esse tema, no entanto, vemos potencialidades de abordagem lúdica de conceitos matemáticos, como por exemplo, no ensino de subtração de números naturais. Além disso, temos que considerar o desenvolvimento do raciocínio lógico do estudante que busca compreender as iterações envolvidas para se encontrar a Constante de Kaprekar.

Considerações Finais

O presente artigo teve como objetivo a apresentação da Constante de Kaprekar. Como o contexto de seu surgimento nos remete a Matemática Recreativa, fizemos um estudo bibliográfico a fim de nos aproximar de uma definição sobre o tema. Salientamos que os estudos sobre Matemática Recreativa estão ganhando corpo e o seu papel pedagógico no ensino da Matemática na Educação Básica ainda carecem de mais pesquisas. Mostramos exemplos da Matemática Recreativa na História da Matemática e



destacamos que encontramos poucos trabalhos que tratam dessa abordagem. Entretanto, percebemos que a Matemática Recreativa se mostrou presente na construção de algumas teorias e resultados matemáticos que conhecemos hoje em dia.

Sobre a Constante de Kaprekar, identificamos o lado curioso do desafio proposto por esse indiano no final da metade do século XV e sua repercussão no mundo da Matemática, provocando o estudo de outros matemáticos para encontrar o número de iterações necessárias para se alcançar o número 6174.

Após o nosso estudo, destacamos a possibilidade de associar a Matemática Recreativa e a História da Matemática para o ensino de conteúdos de ensino em sala de aula da Educação Básica. De forma a apresentar uma curiosidade matemática por meio da História da Matemática, promovendo a interdisciplinaridade e aguçando o poder de investigação dos estudantes. Destacamos que no âmbito de alcance do professor de matemática, esperamos que este, de forma particular, amplie seus conhecimentos sobre Matemática Recreativa e História da Matemática e, mais particularmente, sobre a história da Índia e o matemático indiano Kaprekar.

Referências

BARTLOVÁ, Tereza. **History and current state of recreational mathematics and its relation to serious mathematics**. 2016. 148f. Tese (Doutorado em matemática).

Departamento de análise matemática. Universidade Charles em Praga. 2016.

BARVE, Vasant; **Minakshi. Recreational Mathematics**. Departamento de Educação em Ciência e Matemática. 2012.

CARLONI, Paula Carolina. **O Estudo de Probabilidade no ensino médio**. 2019. 59f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). PROFMAT. Universidade Federal do Espírito Santo. 2019.

FRANÇA, Kleber Vieira; SANTOS, Josiel Almeida; SANTOS, Lúcia S. B. dos. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática**. 2007. 41f. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática). Centro Universitário Adventista de São Paulo Campus São Paulo. 2007.

GOMES, Alexandra; MALHEIRO, Catarina. A Rotina de Kaprekar. **Jornal de Matemática Elementar**, nº 292. 2011.

MARTINS, Paula Mendes; PICADO, Jorge. Cinco tributos a Martin Gardner. Sociedade Portuguesa de Matemática. **Periódico 71**. p. 97-111. 2014.



O'CONNOR, J. J. ROBERTSON, E. F. **Dattatreya Ramachandra Kaprekar**. 2007. Disponível em: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kaprekar.html> . Acesso em 05 de Março de 2021.

RIBEIRO, Bruno da Silva. **Matemática Recreativa: Uma Experiência Baseada em Clubes**. 2018. 58f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). PROFMAT. Colégio Pedro II.

SILVA, Arthur Henrique. **Matemática recreativa de Kaprekar na educação básica**. 2020. 98f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). PROFMAT. Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

SINGMASTER, David. **The Utility of Recreational Mathematics. Proceedings of Recreational Mathematics Colloquium v - G4G (Europe)**. p. 3-46. 2000.

XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática. Segunda Fase. Nível 2. Disponível em: <www.obm.org.br>. Acesso em 20 de fevereiro de 2020.

Recebido em: 06 / 03 / 2021
Aprovado em: 20 / 04 / 2021