BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v8i24.5078

O PARADOXO DE BERTRAND E OS AXIOMAS DE KOLMOGOROV: UMA PROPOSTA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

BERTRAND PARADOX AND KOLMOGOROV AXIOMS: A DIDATIC PROPOSAL FOR TEACHER EDUCATION

José Vidarte[1]; Nancy Chachapoyas[2], Mariana Feiteiro Cavalari[3]

RESUMO

A importância de incluir aspectos da História da Matemática (HM) na formação inicial de professores e formas de incluí-los têm sido objeto de estudo de diversos pesquisadores. Dentre as diversas possibilidades de inclusão de temáticas relativas à História da Matemática nestes cursos, podemos destacar a apresentação de elementos da HM nas disciplinas da área de Matemática. Diante deste contexto, realizamos o presente trabalho buscando descrever uma proposta didática, que apresenta elementos da História da Matemática para o ensino de Probabilidade, em cursos de formação de professores de matemática. Nossa proposta é composta por quatro momentos, sendo que no primeiro discutimos os conceitos de Probabilidade Clássica e Geométrica, bem como, diferenças entre eventos improváveis e impossíveis. No segundo, apresentamos o Paradoxo de Bertrand e propomos uma atividade sobre ele. Posteriormente, indicamos que seja realizada uma discussão acerca de consequências deste problema para o desenvolvimento da Matemática. Por fim, expomos as ideias de Kolmogorov, bem como suas relações com a Probabilidade Clássica e o Paradoxo de Bertrand. Nestes momentos, buscamos apresentar aspectos da História da Matemática de diferentes formas, já que ora são apresentados fatos e informações históricas e ora são abordados problemas e definições traduzidos dos originais de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), Joseph Louis François Bertrand (1822-1900) e Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), com vistas a ensinar o conteúdo previsto na disciplina de Probabilidade. Neste sentido, a

---

[1] Doutor em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP) campus São Carlos – SP – Brasil. Docente na Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), Itajubá – MG – Brasil. Endereço para correspondência: Universidade Federal de Itajubá. Câmpus Prof. José Rodrigues Seabra. Av. BPS, 1303, Bairro Pinheirinho, Itajubá – MG. Caixa Postal 50 CEP: 37500-903. E-mail: vidarte@unifei.edu.br

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-7682-8790

[2] Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP) câmpus São Carlos – SP - Brasil e pela *Aix-Marseille Université* da França. Docente na Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), Itajubá – MG – Brasil. Endereço para correspondência: Universidade Federal de Itajubá. Câmpus Prof. José Rodrigues Seabra. Av. BPS, 1303, Bairro Pinheirinho, Itajubá – MG. Caixa Postal 50 CEP: 37500-903. E-mail: nancy@unifei.edu.br

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3323-2719.

[3] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho (UNESP) câmpus Rio Claro – SP - Brasil. Docente na Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI), Itajubá – MG – Brasil. Endereço para correspondência: Universidade Federal de Itajubá. Câmpus Prof. José Rodrigues Seabra. Av. BPS, 1303, Bairro Pinheirinho, Itajubá – MG. Caixa Postal 50 CEP: 37500-903. E-mail: mfcavalari@unifei.edu.br

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-2776-971X.

História da Matemática na proposta elaborada pode contribuir para problematizar o conteúdo abordado, possibilitar a ampliação do conhecimento matemático e permitir discussões que podem auxiliar um repensar sobre a natureza da Matemática.
Palavras-chave: Probabilidade; Axiomas de Kolmogorov; História da Matemática; Formação de professores; Proposta Didática.

ABSTRACT

The importance of including aspects of the History of Mathematics (HM) in teacher education and ways of including them have been the object of research carried out by several academics. Among the various possibilities of including History of Mathematics in teacher education, we highlight the presentation of themes related to the History of Mathematics in the disciplines of Mathematics contents. In this context, in this article, we describe a didactic proposal, for addressing HM concepts for teaching some Probability contents in teacher education. This didactic proposal consists of four moments, initially in the first one, we discuss the concepts of Classic and Geometric Probability and the differences between improbable and impossible events. In the second moment, we present the "Bertrand Paradox" and propose an exercise in it. Subsequently, we show the possibility of discussing the consequences of this problem for the development of Mathematics. Finally, we expose Kolmogorov's ideas, their relations with a Classical Probability and the Bertrand Paradox, as well. In those moments of our didactic proposal, we present aspects of History of Mathematics in different ways, such as, by showing important facts and historical information or presenting problems and definitions translated from the original works of Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), Joseph Louis François Bertrand (1822 - 1900) and Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987). In this sense, the History of Mathematics in our didactic proposal could contribute to problematize the mathematical content, increase students' mathematical knowledge and provide them with elements to rethink the nature of mathematical knowledge.
Keywords: Probability Kolmogorov Axiom; History of Mathematics; Teacher Education; Didactic proposal.

Introdução

A importância de abordar aspectos da História da Matemática (HM) na formação inicial de professores tem sido destacada por diversos autores. Borges (2019), ao analisar propostas didáticas para a formação de professores, que se utilizavam da HM, identificou que a abordagem da HM, em muitas delas, contribuiu para: motivar os estudos matemáticos; facilitar a compreensão do conteúdo matemático e de aspectos da natureza da matemática; permitir o estabelecimento de conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento e refletir sobre a futura prática docente.

Há, entretanto, variadas formas de abordar aspectos da HM nestes cursos de graduação que podem contribuir de diversas maneiras para a formação de professores. Dentre estas formas de abordar a HM, destacamos a "participação orgânica" proposta por Miguel e Brito (1996), na qual os aspectos da HM possibilitam trazer uma "[...] historicidade às disciplinas de conteúdo específico" (MIGUEL; BRITO, 1996, p. 49). A abordagem da HM em disciplinas de Matemática é, também, defendida por Carvalho e Cavalari (2019) e por pesquisadores da área de HM que foram entrevistados por Balestri (2008).

Nestas disciplinas, os aspectos da HM podem se constituir como uma fonte de problematização da Matemática estudada (MIGUEL; BRITO, 1996), podendo contribuir para discussões acerca do conceito, de uma história do seu desenvolvimento, bem como, de suas relações com o contexto social (BALESTRI, 2008).

Embora esta forma de incluir a HM nos cursos de formação de professores seja considerada profícua enfatizamos, assim como alguns pesquisadores, que tal proposta é difícil de ser efetivada, em especial, devido à formação de muitos professores formadores, que não os preparou para trabalhar com tal abordagem (BALESTRI, 2008) e seus possíveis interesses e convicções.

Entretanto, merece destaque que, para alguns pesquisadores entrevistados por este autor, "[...] não é necessário que o professor seja um especialista em história da Matemática para utilizá-la, podendo recorrer a pesquisas livros ou outras publicações para obter informações históricas e utilizá-las em suas aulas" (BALESTRI, 2008, p. 82).

Diante deste contexto, realizamos o presente trabalho buscando descrever uma proposta didática, que se utiliza de elementos da HM para o ensino de Probabilidade[4], em

[4] A escolha por um tema voltado a Probabilidade se justifica pelo fato de que conceitos relativos à Probabilidade são previstos para serem lecionados na Educação Básica, tanto no Ensino Fundamental como

cursos de formação de professores de Matemática. Entendemos que por meio da apresentação desta proposta, podemos contribuir para amenizar tais dificuldades e, também, para aumentar a inclusão da abordagem da HM em disciplinas da área de Matemática nestes cursos.

Para tanto, neste artigo, apresentamos em linhas gerais a proposta elaborada e descrevemos cada um de seus quatro momentos, indicando os aspectos históricos e suas atividades, bem como, tecemos breves considerações sobre a inserção da HM nas atividades propostas.

Uma possibilidade de utilizar a História da Matemática no Ensino de Probabilidade na formação de professores

A proposta didática que apresentamos se utiliza de elementos da HM para abordar as questões relativas à ideia de acaso e a relevância dos axiomas de Kolmogorov.

Para a elaboração desta proposta nos inspiramos nos trabalhos de Batanero e colaboradores (2009a, 2009b, 2012) e buscamos, no decorrer dos seus momentos, trazer trechos e problemas traduzidos diretamente dos originais. Desta forma, a proposta elaborada foi dividida em quatro momentos, conforme apresentado no quadro 1 a seguir.

Quadro 1 - Os momentos da proposta a ser apresentada

#	Resumo das ideias a serem abordadas	Estudiosos de destaque
1	Apresentar o conceito de Probabilidade Clássica e Geométrica. Discutir diferença entre um evento improvável e um impossível.	Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) Conde de Buffon (1707-1788)
2	Apresentar o Paradoxo de Bertrand. Propor a realização de uma atividade sobre este Paradoxo.	Joseph Louis François Bertrand (1822-1900)
3	Discutir as resoluções da atividade proposta. Discutir algumas consequências deste problema para a Matemática. Mostrar o sexto problema proposto por Hilbert.	David Hilbert (1862-1934)
4	Apresentar as ideias de Kolmogorov para auxiliar a resolução parcial do sexto problema proposto por Hilbert. Relacionar estas ideias com a Probabilidade Clássica e o Paradoxo de Bertrand.	Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987).

Fonte: Elaborado pelos autores

Destacamos que nossa proposta se configura como uma sugestão e deve ser

no Médio (BRASIL, 2018) e, também, porque os dois primeiros autores deste artigo trabalham com estas disciplinas matemáticas.

adaptada para os diferentes contextos das disciplinas de Probabilidade dos cursos de Licenciatura. Sugerimos que, no decorrer dos momentos propostos, sejam incluídos exemplos, exercícios e a apresentação de biografias dos estudiosos citados no quadro 1[5]. Apresentaremos, a seguir, um detalhamento de cada um destes momentos.

Momento 1: Discussão do conceito de Probabilidade Clássica e Geométrica

Neste primeiro momento de nossa proposta, apresentamos algumas ideias referentes a Probabilidade Clássica e a Geométrica, bem como a distinção da ideia de um evento improvável e um evento impossível.

Com relação à Probabilidade Clássica, destacamos que, em 1774, Pierre-Simon de Laplace publicou o artigo intitulado *Mémoire sur les suítes récurro-récurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hasards* (Memória sobre as sequências recursivas e seus usos na teoria do acaso), no qual utilizou métodos analíticos para uma teorização da Probabilidade. Neste artigo, do qual apresentamos a página de rosto na figura 1, ele enunciou a definição clássica de Probabilidade, em suas próprias palavras, "o princípio" (GORROOCHURN, 2016). Para ele,

> A probabilidade de um evento é igual à soma de produtos de cada caso favorável à sua probabilidade dividido pela soma de produtos de cada caso possível à sua probabilidade, e se cada caso é igualmente provável, a probabilidade do evento é igual ao número de casos favoráveis divididos pelo número de todos os casos possíveis. (LAPLACE, 1774, p. 10-11, tradução nossa).[6]

Esta definição, que é utilizada atualmente, é atribuída a Laplace, embora vários outros matemáticos tenham fornecido definições semelhantes anteriormente (GORROOCHURN, 2016).

Entendemos ser relevante discutir com os estudantes que, ao observamos esta definição, identificamos que, do ponto de vista da Probabilidade Clássica, se lançarmos uma moeda equilibrada teremos a probabilidade de ½ de obter cara, já que as possibilidades seriam cara ou coroa.

[5] Estes não puderam ser incluídos no presente trabalho devido à limitação de espaço. Entretanto, sugerimos a utilização de biografias disponíveis no site "MacTutor" de responsabilidade da *School of Mathematics and Statistics – University of St. Andrews* – Escócia. Disponível em: http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/. Acesso em fevereiro de 2021.

[6] No original: "La probabilité d'un événement est égale à la somme des produits de chaque cas favorable par sa probabilité divisée par la somme des produits de chaque cas possible par sa probabilité, et si chaque cas est également probable, la probabilité de l'événement est égale au nombre des cas favorables divisé par le nombre de touts les cas possibles" (LAPLACE, 1774, p. 10-11).

Entretanto, se observarmos experimentos com um número grande de lançamentos, nem sempre esta é a probabilidade encontrada. Tal fato pode ser observado no trabalho intitulado *Flipping, spinning and tilting coins*[7], que indica que, ao girar uma moeda de um centavo de dólar americano, a probabilidade de obter cara é 0,45, entretanto, ao girar uma moeda de um euro belga tem-se 0,56 de chance de cair cara[8].

Neste contexto, é necessário enfatizar com nossos estudantes que se pode atribuir a probabilidade de um acontecimento A à frequência relativa da ocorrência de A, de modo que esta frequência é obtida de forma empírica, ou seja, baseada na observação. Esta observação deve ser referente a muitos ensaios para estabelecer uma probabilidade.

Este conceito de Probabilidade pode ser considerado o mais popular e baseia-se na frequência relativa, que se configura como um conceito objetivo e possui a qualidade de poder ser aplicado até mesmo em eventos que não são igualmente prováveis.

O estudo da Teoria da Frequência de Probabilidade teve início com os trabalhos dos matemático britânico Robert Leslie Ellis (1817-1859) e do matemático e filósofo francês Antoine Augustin Cournot (1801-1877). Nesta temática, merece, também, destaque os estudos de John Venn (1834-1923), Richard von Mises (1883-1953) e Sir. Ronald Aylmer Fisher (1890-1962) (KEYNES, 1921).

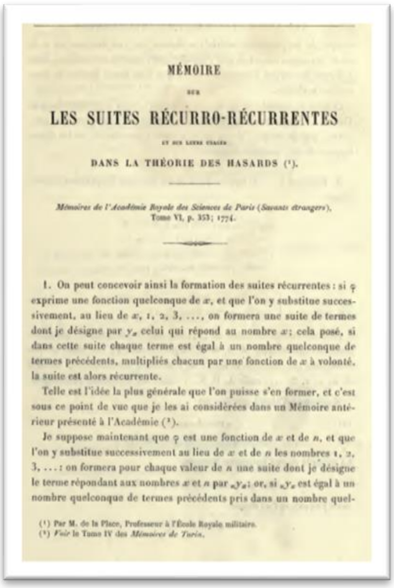
As probabilidades na abordagem Frequentista, em linguagem atual, pode ser descrita como o valor limite do número de sucessos em uma sequência de tentativas, ou seja, $P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$, onde n_A é o número de ocorrências do evento A em n repetições independentes do experimento em questão e Ω é enumerável.

Um novo ramo da Teoria da Probabilidade é a Probabilidade Geométrica que teve como um de seus fundadores o cientista francês Georges-Louis Leclerc, Conde de Buffon. Este estudioso fundou um novo ramo da Teoria da Probabilidade com um artigo escrito em 1733, mas publicado corretamente em 1777, que era intitulado *Essai d'Arithmétique Morale, em naturelle, générale et particulière Supplément* 4 (GORROOCHURN, 2016). A página inicial deste trabalho de Buffon é apresentada na figura 2, a seguir.

Figura 1 – Página inicial de Laplace (1774) **Figura 2 -** Página inicial de Buffon (1777)

[7] Disponível no endereço http://www.dartmouth.edu/~chance/, no "Chance news 11.02"

[8] Esta situação pode ser justificada por alguns fatores, sendo um destes, referente ao peso da moeda não ser simétrico entre a cara e a coroa. No texto citado, é indicado que Tomasz Gliszczynski e Waclaw Zawadowski entendem que a tendência de as moedas de um Euro cair mais cara que coroa pode estar relacionada ao fato de que o lado da coroa é mais pesado que o da cara.



MÉMOIRE

SUR

LES SUITES RÉCURRO-RÉCURRENTES

ET SUR LEURS USAGES

DANS LA THÉORIE DES HASARDS (1).

Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris (Savants étrangers), Tome VI, p. 353; 1774.

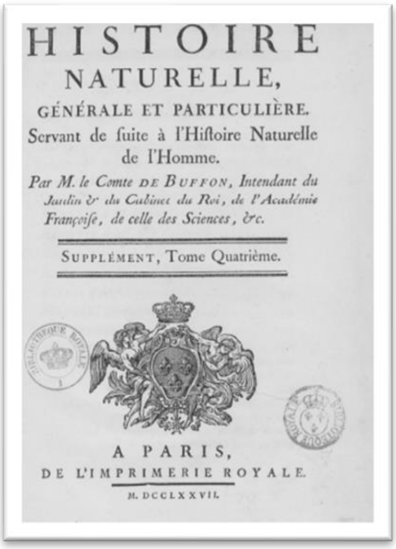
1. On peut concevoir ainsi la formation des suites récurrentes : si φ exprime une fonction quelconque de x, et que l'on y substitue successivement, au lieu de x, 1, 2, 3, ..., on formera une suite de termes dont je désigne par y_x celui qui répond au nombre x; cela posé, si dans cette suite chaque terme est égal à un nombre quelconque de termes précédents, multipliés chacun par une fonction de x à volonté, la suite est alors récurrente.

Telle est l'idée la plus générale que l'on puisse s'en former, et c'est sous ce point de vue que je les ai considérées dans un Mémoire antérieur présenté à l'Académie (2).

Je suppose maintenant que φ est une fonction de x et de n, et que l'on y substitue successivement au lieu de x et de n les nombres 1, 2, 3, ... : on formera pour chaque valeur de n une suite dont je désigne le terme répondant aux nombres x et n par ${}_n y_x$: or, si ${}_n y_x$ est égal à un nombre quelconque de termes précédents pris dans un nombre quel-

(1) Par M. de la Place, Professeur à l'École Royale militaire.
(2) *Voir* le Tome IV des *Mémoires de Turin*.

Fonte: Elaborado pelos autores com base em Laplace (1774)



HISTOIRE
NATURELLE,
GÉNÉRALE ET PARTICULIÈRE.
Servant de suite à l'Histoire Naturelle de l'Homme.
Par M. le Comte DE BUFFON, Intendant du Jardin & du Cabinet du Roi, de l'Académie Françoise, de celle des Sciences, &c.

SUPPLÉMENT, Tome Quatrième.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DCCLXXVII.

Fonte: Elaborado pelos autores com base em Buffon (1777)

Neste artigo, Buffon apresenta o "problema da agulha de Buffon", que é considerado o primeiro problema de Probabilidade Geométrica, pois para sua solução requeria um método geométrico ao invés do clássico método combinatório (GORROOCHURN, 2016). Este problema de Buffon, para Gorroochurn (2016), pode ser explicado como: Qual a probabilidade de uma agulha de comprimento l, lançada aleatoriamente em um plano (no qual há um conjunto de linhas paralelas separadas por uma distância maior que *l)*, cruzar uma das linhas? Destacamos que nos problemas de Probabilidade Geométrica, os pontos aleatórios, devem ser distribuídos uniformemente em um determinado domínio.

A Probabilidade Geométrica, então, pode ser entendida como a razão entre a área (comprimento ou volume) desejada (evento favorável) e a área total. De forma mais precisa, matematicamente, podemos definir, em notação moderna, que partindo de um subconjunto Ω (um subconjunto de uma reta, um plano, um espaço ou qualquer espaço n-dimensional) e de A que seria subconjuntos de Ω, a probabilidade de um ponto escolhido aleatoriamente em Ω pertencer também a A é proporcional à medida de A (comprimento, área., …, etc). Logo, a probabilidade que o ponto pertença a A é igual a:

$$P(A) = \frac{Medida\ em\ A}{Medida\ em\ \Omega}.$$

Para exemplificar esta ideia, podemos propor aos estudantes que imaginem um quadrado de lado 10 cm, no qual há um pequeno quadrado de área 25cm^2 e respondam:

- Qual a probabilidade de um dardo atingir o pequeno quadrado?

Denominando o quadrado menor de B, temos: $P(B) = \frac{Medida\ de\ B}{Medida\ de\ \Omega} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

- Qual seria a probabilidade de um dardo acertar o ponto médio (ou qualquer outro ponto fixo do quadrado)?

Denominando este ponto médio de C, temos: $P(C) = \frac{Medida\ de\ C}{Medida\ de\ \Omega} = \frac{0}{100} = 0$ (nula).

Neste exemplo, destacamos que não é impossível atingir este ponto e, portanto, deve-se distinguir um evento de probabilidade nula (ou improvável), de um evento impossível. Para tanto, enfatizamos que a probabilidade do evento impossível é zero, mas um evento de probabilidade zero nem sempre é impossível.

Uma interpretação matemática deste fato, em notação moderna, seria: Sejam $r, s, t, u \in \mathbb{R}$, com $r \leq s \leq t \leq u$, considere Ω, o intervalo $[r, u]$. Aqui a medida, sendo Ω um intervalo, é o comprimento do intervalo. Escolhendo aleatoriamente um ponto no intervalo $[r, u]$, a probabilidade que esse ponto pertença a $[s, t]$ é $P([s, t]) = \frac{t-s}{u-r}$.

Destacamos a relevância da abordagem deste tipo de problemas em sala de aula, já que permite a identificação da distinção entre eventos improváveis e impossíveis. Em especial, devido ao fato de que é estranho para os estudantes compreenderem que atingir um dardo em um ponto ou em um número numerável de pontos sejam ambas zero.

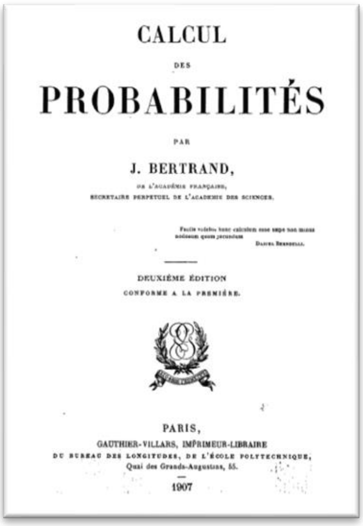
Com esta abordagem é finalizado o memento 1. Sugerimos que, neste momento, seja solicitada a resolução de alguns exercícios sobre a temática abordada.

Momento 2: A Probabilidade Geométrica e o Paradoxo de Bertrand

No segundo momento da proposta, apresentamos o Paradoxo de Bertrand e propomos a realização de uma atividade sobre ele.

A Probabilidade Geométrica suscita variadas interpretações de um mesmo problema, de modo que esta é a essência do Paradoxo divulgado por Joseph Bertrand no livro *Calcul de probabilitiés* publicado em 1889. Uma ilustração da página de rosto da segunda edição desta obra datada de 1907, está disponível na figura 3.

Figura 3 - Página de rosto de Bertrand (1907)


CALCUL
DES
PROBABILITÉS
PAR
J. BERTRAND,
DE L'ACADÉMIE FRANÇAISE,
SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

DEUXIÈME ÉDITION
CONFORME A LA PREMIÈRE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1907

Fonte: Elaborado pelos autores com base em Bertrand (1907)

Este problema ganhou notoriedade internacional por mostrar algumas limitações da Probabilidade Clássica como, por exemplo, aquelas referentes aos problemas em que o número de resultados possíveis é não enumerável.

O Paradoxo de Bertrand foi introduzido na referida obra por meio do questionamento: "Traçamos ao acaso uma corda em um círculo. Qual é a probabilidade desta corda ser maior que o lado de um triângulo equilátero inscrito?" (BERTRAND, 1907, p. 4, tradução nossa)[9]. Sugerimos apresentar este problema para propor uma atividade aos estudantes.

Entretanto, antes de expô-la, descreveremos as três distintas soluções elaboradas por Bertrand (1907) que aparentemente são válidas e se diferenciam por meio da forma como a corda é escolhida, ou seja, do espaço amostral da função de Probabilidade. Destacamos que apresentamos estas soluções para que o professor formador tenha contato com tal material, no entanto, entendemos que estas não devem ser expostas aos estudantes antes da realização da atividade.

Para resolver o problema, Bertrand (1907) expôs que:

> Podemos dizer: se uma das extremidades da corda é conhecida, esta informação não muda a probabilidade; a simetria do círculo não permite atribuir nenhuma influência, favorável ou desfavorável à probabilidade do evento solicitado.
> Uma das extremidades da corda sendo conhecida, a direção deve ser regulada aleatoriamente. Se traçamos os dois lados do triângulo equilátero tendo por vértice o ponto dado, formam entre eles e com a tangente três ângulos de 60°.

[9] No original: "On trace *au hasard* une corde dans um cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus petite que le côté du triangle équilatéral inscrit?" (Grifo no original)

> A corda, para ser maior que o lado do triângulo equilátero, deve estar em um dos três ângulos, aquele que está entre os outros dois. A probabilidade de que esta corda seja escolhida aleatoriamente entre esses três ângulos iguais é 1/3.
> Podemos dizer também: se conhecemos a direção da corda, essa informação não muda a probabilidade. A simetria do círculo não permite atribuir nenhuma influência, favorável ou desfavorável à probabilidade do evento solicitado.
> A direção da corda está dada, ela deve, para ser maior que o lado de um triângulo equilátero, cortar um ou o outro raio que compõem o diâmetro perpendicular, a metade mais próxima do centro. A probabilidade é 1/2.
> Podemos dizer agora: que escolher uma corda aleatoriamente, é escolher aleatoriamente o ponto médio. Para que a corda seja maior que o lado do triângulo equilátero, é necessário e suficiente que o ponto médio esteja a uma distância do centro menor que a metade do raio, isto é, ao interior de um círculo quatro vezes menor. O número de pontos situados no interior de uma superfície quatro vezes menor é quatro vezes menor. A probabilidade de que a corda, onde o ponto médio é escolhido aleatoriamente seja maior que o lado de um triângulo equilátero, por definição é 1/4.
> Entre essas três respostas, qual delas é a verdadeira? Nenhuma das três não é falsa, nenhuma não é exata, a questão está mal colocada (BERTRAND, 1907, p. 4-5, tradução nossa)[10].

Tendo como base as ideias deste autor, propomos que seja solicitado que os estudantes, em grupos, resolvam o problema proposto por Bertrand, de modo que cada grupo[11] tenha a indicação de um ponto de partida da solução proposta por este autor, conforme mostrado no quadro 2. Sugerimos que os grupos não tenham conhecimento de que os outros grupos estão partindo de escolhas distintas da corda.

Quadro 2 - Atividade a ser desenvolvida pelos estudantes em grupos

Atividade sobre o Paradoxo de Bertrand

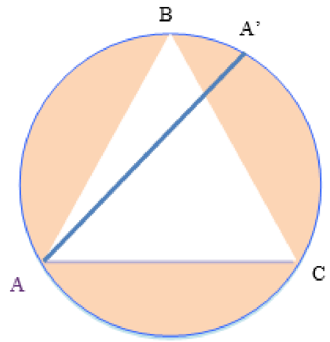
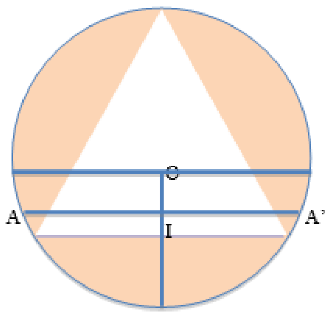
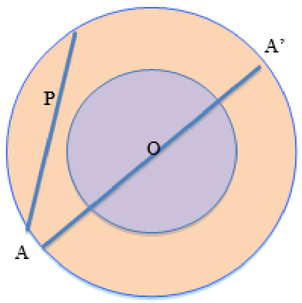
[10] No original: "On peut dire: si l'une des extrémités de la corde est connue, ce renseignement ne change pas la probabilité; la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé. L'une des extrémités de la corde étant connue, la direction doit être réglée par le hasard. Si l'on trace les deux côtés du triangle équilatéral ayant pour sommet le point donné, ils forment entre eux et avec la tangente trois angles de 60°. La corde, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, doit se trouver dans celui des trois angles qui est compris entre les deux autres. La probabilité pour que le hasard entre trois angles égaux qui peuvent le recevoir le dirige dans celui-là semble, par définition, égale à 1/3.
On peux dire aussi: si l'on connaît la direction de la corde, ce renseignement ne change pas la probabilité. La symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivé de l'événement demandé.
La direction de la corde étant donnée, elle doit, pour être plus grande que le côte du triangle équilatéral, couper l'un ou l'autre des rayons qui composent le diamètre perpendiculaire, dans la moitié la plus voisine du centre. La probabilité pour qu'il en soit ainsi semble, par définition, égale à 1/2.
On peux dire encore: choisir une corde au hasard, c'est en choisir au hasard le point milieu. Pour que la corde soit plus grande que le côte du triangle équilatéral, il faut et il suffit que le point milieu soit à une distance du centro plus petite que la moitié du rayon, c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle quatre fois plus petit en surface. Le nombre des points situés dans l'intérieur d'une surface quatre fois moindre est quatre fois moindre. La probabilité pour que la corde dont le milieu est choisi au hasard soit plus grande que le côte du triangle équilatéral semble, par définition, égale à 1/4.
Entre ces trois réponses, quelle est la véritable ? Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal possée."
[11] Uma possibilidade seria dividir a sala em x grupos, sendo x múltiplo de três.

Responda ao seguinte questionamento: **“Traçamos ao acaso uma corda em um círculo. Qual é a probabilidade de a corda ser maior que o lado de um triângulo equilátero inscrito?”**
Dica (grupo 1): Trace a corda ligando dois pontos escolhidos aleatoriamente, sendo um deles, o vértice do triângulo equilátero.
Dica (grupo 2): Escolha um ponto “I” ao acaso em um dos raios, e por esse ponto trace a perpendicular ao raio que passa por I obtendo assim a corda
Dica (grupo 3): Escolha aleatoriamente um ponto no círculo e a corda será o segmento do qual este ponto é o ponto médio.

Fonte: Elaborado pelos autores baseados em Bertrand (1907)

Se os grupos seguirem as dicas apresentadas na atividade, para a escolha da corda, eles encontrarão três respostas distintas, a saber: 1/2, 1/3 e ¼, conforme exposto no quadro 3, a seguir.

Quadro 3 - Resposta esperada para a atividade

<table>
<tr><td colspan="3">Solução esperada do grupo 1:
Conforme proposto, devem ser escolhidos dois pontos que determinarão a corda desejada. Ao seguir a indicação da atividade, os estudantes irão assumir que a primeira extremidade coincida com o vértice do triângulo equilátero (Vértice A na figura 4 apresentada a seguir). O círculo, assim, estará dividido por três arcos AB, AC e BC iguais. A corda será maior que o lado de um triângulo inscrito sobre essa circunferência, se o segundo ponto A’ se encontrar no arco BC (um arco dos 3 arcos). Assim, a probabilidade a ser encontrada é 1/3.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Solução esperada do grupo 2:
Se os estudantes seguirem a dica apresentada na atividade, eles irão escolher um ponto “I’’ ao acaso em um dos raios e por esse ponto traçarão uma perpendicular ao raio que passa por I, dessa forma obterão a corda AA’. A corda depende da escolha do ponto I, a escolha do ponto é equivalente a sortear um ponto ao acaso em um segmento de [0, R], conforme mostrado na figura 5. A corda será maior que o lado de um triângulo inscrito se o ponto I for escolhido entre [0, R/2] (a metade do [0, R]). Assim a probabilidade a ser encontrada é ½.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Solução esperada do grupo 3:
Se os estudantes seguirem a dica apresentada na atividade, eles irão escolher aleatoriamente um ponto P dentro do círculo e pegarão a corda AA’ de tal forma que P seja seu ponto médio, conforme mostrado na figura 6. A área do círculo C de raio R/2 é 4 vezes menor que a área do círculo de raio R. Assim a probabilidade a ser encontrada é 1/4.</td></tr>
<tr>
<td>Figura 4 - Representação geométrica da primeira solução

</td>
<td>Figura 5 - Representação geométrica da segunda solução

</td>
<td>Figura 6 - Representação geométrica da terceira solução

</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborado pelos autores baseados em Bertrand (1907)

Posteriormente a resolução dos problemas propostos a cada grupo, sugerimos que seja realizada a socialização dos resultados encontrados, que será um dos objetivos do momento 3, exposto a seguir.

Momento 3: Socialização das soluções

O terceiro momento da proposta é dedicado a socialização dos resultados e a realização de uma discussão para que os estudantes percebam que partindo do mesmo problema é possível encontrar respostas diferentes. Em tal momento, entendemos que os estudantes poderiam, até mesmo, sentir algum estranhamento com relação a este fato.

Nesta oportunidade, o docente pode discutir as razões para que os diferentes grupos tenham encontrado distintas soluções e as possíveis alternativas, matemáticas, para eliminar esta situação. Ou seja, apresentar que o fato de ter resultados diferentes para a mesma questão gera um problema aparentemente paradoxal, entretanto, se analisarmos as três situações, podemos identificar que se tratam de três problemas distintos. Isto se deve ao fato de que no problema proposto as palavras "acaso" e "aleatório" não estão apresentadas de forma precisa. Para tal, é necessário apresentar claramente no problema qual é o *espaço amostral* Ω a ser trabalhado e qual é a *função de probabilidades P.*

Neste sentido, entendemos a importância de que os estudantes vivenciem o Paradoxo de Bertrand e sintam a necessidade de apresentar com maior clareza o termo "Aleatório", bem como a relevância de uma axiomatização da Probabilidade. Pode ser, ainda, apresentado que este estranhamento sentido por eles também, pode ter sido sentido por matemáticos do século XIX.

Assim, é relevante, também, mostrar aos estudantes que tal problema ficou conhecido na Matemática como o Problema da Corda de Bertrand e que gerou o Paradoxo de Bertrand. Tal problema contribuiu, de acordo com Shaferet e colaboradores (2006), para o aumento da insatisfação com a Probabilidade Clássica na virada do século XX e forneceu um ímpeto para a posterior axiomatização da Probabilidade por Kolmogorov em 1933.

Tal situação pode ser percebida na palestra de abertura do II Congresso Internacional de Matemática proferida pelo matemático alemão David Hilbert em 1900, na qual Hilbert apresentou 23 problemas não resolvidos que poderiam nortear a

Matemática do século XX (HILBERT, 1901).

Em sua palestra, Hilbert reconheceu, no sexto problema, a necessidade de uma rigorosa e coerente Teoria da Probabilidade, já que este é referente, entre outras temáticas, a importância de uma axiomatização dos espaços de Probabilidades, conforme pode ser identificado a seguir:

> 6. **Tratamento Matemático dos Axiomas da Física.**
> As investigações sobre os fundamentos da geometria sugerem o problema: tratar da mesma maneira, por meio de axiomas, aquelas ciências físicas nas quais a matemática, hoje em dia, desempenha um papel importante; na primeira fila estão *a teoria das probabilidades* e mecânica.
> Quanto aos axiomas da teoria das probabilidades, parece-me desejável que sua investigação lógica seja acompanhada de um desenvolvimento rigoroso e satisfatório do método dos valores médios da física matemática e, em particular, da teoria cinética dos gases (HILBERT, 1902, p. 454, tradução nossa).[12]

Uma solução parcial para este problema foi apresentada na obra intitulada *Fundamentos da Teoria das Probabilidades* publicada por Andrey N. Kolmogorov, em 1933 (FERREIRA JUNIOR, 2003). De fato, nessa obra é apresentada uma axiomatização de espaços de Probabilidades que será o foco do momento 4 de nossa proposta.

Momento 4 : Axiomas de Kolmogorov

Na obra *Fundamentos da Teoria das Probabilidades*, da qual apresentamos a página de rosto da segunda edição em inglês na figura 7, Kolmogorov estabeleceu os fundamentos axiomáticos modernos da Teoria da Probabilidade. Neste estudo, ele apresentou três propriedades, que ficaram conhecidas como os Axiomas de Kolmogorov[13].

---

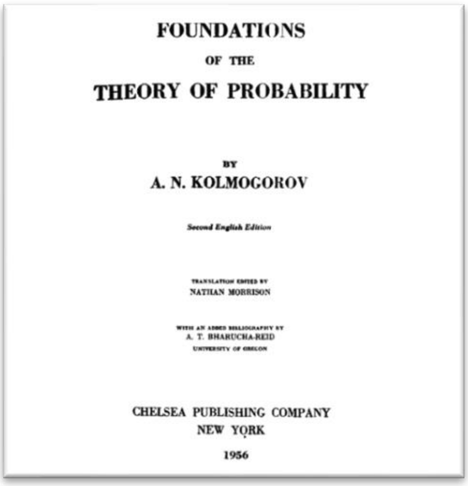
[12] No original: "6. MATHEMATICAL TREATMENT OF THE AXIOMS of PHYSICS: The investigations on the foundations of geometry suggest the problem: *To treat in the same manner, by means of axioms, those physical sciences in which mathematics plays an important part; in the first rank are the theory of probabilities and mechanics.* As to the axioms of the theory of probabilities, it seems to me desirable that their logical investigation should be accompanied by a rigorous and satisfactory development of the method of mean values in mathematical physics, and in particular in the kinetic theory of gases."

[13] Os axiomas apresentados são: "Let E be a collection of Elements $\xi, \eta, \zeta, \cdots$, which we shall call elementar events, and $\mathcal{F}$ a set of subnets of E; the elements of the set $\mathcal{F}$ will be called random events.

I. $\mathcal{F}$ is a field of sets.
II. $\mathcal{F}$ contains the set E. III.
III. To each A in $\mathcal{F}$ is assigned a non-negative real number $P(A)$. This number $P(A)$ is called the probability of the event A.
IV. $P(E)$ equals 1.
V. If A and B have no element in common, then: $(A) + P(B)$.

A system of sets, $\mathcal{F}$, together with a definite assignment number $P(A)$, satisfying Axioms $I - V$, is called a field of probability." (KOLMOGOROV, 1956, p. 2)

Figura 7 - Página de rosto de Kolmogorov (1956)



FOUNDATIONS
OF THE
THEORY OF PROBABILITY

BY
A. N. KOLMOGOROV

Second English Edition

TRANSLATION EDITED BY
NATHAN MORRISON

WITH AN ADDED BIBLIOGRAPHY BY
A. T. BHARUCHA-REID
UNIVERSITY OF OREGON

CHELSEA PUBLISHING COMPANY
NEW YORK
1956

Fonte: Elaborado pelos autores com base em Kolmogorov (1956)

Para explicar estes axiomas, utilizando a linguagem moderna, apresentaremos algumas definições e exemplos.

Iniciaremos com um conjunto abstrato não vazio Ω chamado de espaço amostral, que é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório sobre o qual construiremos a estrutura de um Espaço de Probabilidades.

Vamos considerar neste conjunto Ω uma classe de subconjuntos, denominada σ-álgebra, que será usada para a definição axiomática de Probabilidade. Assim, apresentaremos algumas definições elaboradas com base em Magalhães (2006).

Definição. Uma coleção $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω é um σ-algebra se satisfaz as seguintes propriedades:

(i) O conjunto todo Ω e o vazio $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{F}$;

(ii) Um conjunto $A \in \mathcal{F}$ se e somente se seu complementar $A^c \in \mathcal{F}$;

(iii) Para toda sequência $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, temos que a união $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$ e a intersecção $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

Com vistas a auxiliar a obtenção de uma forma simples de uma σ-álgebra, apresentamos a seguinte definição, que foi baseada em Magalhães (2006).

Definição. O conjunto das partes (ou conjunto potência) de Ω denotado por $P(\Omega)$ ou 2^{Ω} é o conjunto cujos elementos são os objetos do universo que são subconjuntos de Ω. Em símbolos, temos: $P(\Omega) = \{A \in \mathcal{F} : A \subseteq \Omega\}$.

Para exemplificar, apresentamos o caso no qual $\Omega = \{1,2,3\}$, assim, temos: $P(\Omega) = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$. Podemos verificar que $P(\Omega)$ é um σ-algebra.

Sendo assim, podemos apresentar, em notação moderna, com base em Magalhães (2006), a definição axiomática de Probabilidade.

Definição. Uma função P, definida na σ-álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω, e com valores $[0,1]$ é uma probabilidade se satisfaz os Axiomas de Kolmogorov :

1. $P(\Omega) = 1$;
2. Para todo subconjunto $A \in \mathcal{F}$, $P(A) \geq 0$;
3. Para toda sequencia $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, mutuamente exclusivos, temos

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

A terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é denominada Espaço de Probabilidade e os subconjuntos que estão em $\mathcal{F}$ são denominados Eventos, de modo que é somente aos eventos que se atribui uma probabilidade.

Posteriormente, propomos que seja questionado aos estudantes se:

- Estes axiomas são compatíveis com a Probabilidade Clássica? Seria possível reescrever a definição de Laplace usando este axioma?

- Estes axiomas contribuem para "resolver" o Paradoxo de Bertrand?

Podemos responder ao primeiro questionamento de forma positiva, já que a descrição de Laplace pode ser escrita usando os axiomas de Kolmogorov. Conforme mostrado no quadro 4 a seguir:

Quadro 4 - Definição de Laplace utilizando os axiomas de Kolmogorov.

Considere o espaço amostral finito $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e a σ -álgebra das partes de Ω, também chamada de σ -álgebra discreta. Nesse caso, nosso conjunto $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ mensurável será o conjunto de partes de Ω . Agora, passaremos a definir a função de probabilidade para qualquer evento A da seguinte maneira : Para os n eventos elementares $\{a_i\}, i = 1, 2, \ldots,$ n, associamos uma probabilidade p_i=$P(\{a_i\})$ que satisfaz as seguintes condições: A. $p_i \geq 0, i = 1,2, \ldots,$ n; B. $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Para um evento qualquer $A = \{a_{j1}, a_{j2} \dots, a_{jk}\} \in \mathcal{F}$ definimos como

$$P(A) = p_{j1} + p_{j2} \dots + p_{jk}.$$

Assim, nosso espaço de Probabilidade para esse caso seria $(\Omega, 2^{\Omega}, P)$.

Se no caso anterior temos a propriedade $p = P(\{a_1\}) = \dots = P(\{n\})$ dizemos que Ω é um espaço amostral finito equiprovável. Fazendo uso do item B, obtemos que $p = \frac{1}{n}$. Assim, neste caso a definição clássica de Probabilidade torna-se

$$P(A) = \frac{Número\ de\ elementos\ de\ A}{Número\ total\ de\ elementos\ de\ \Omega}.$$

Usando esta definição clássica, muitos problemas são resolvidos através de técnicas de análise combinatória e de contagem.

Fonte: Elaborado pelos autores baseado nas ideias de Bertrand e Magalhães (2006)

Já para responder ao segundo questionamento, sugerimos a apresentação da resolução do problema usando os axiomas de Kolmogorov e a discussão de que forma se relacionam com o Paradoxo de Bertrand.

Quadro 5 - Resolução do problema da corda usando os Axiomas de Kolmogorov.

Primeiro método: **escolha de dois pontos na circunferência**.

Para construir uma corda sobre um círculo dado, a forma mais natural é escolher uma das extremidades, depois escolher o segundo ponto que seria a outra extremidade sobre o círculo e juntamos os pontos obtendo a corda desejada. Podemos ver que a escolha da primeira extremidade independe do lugar e vamos assumir que coincida com o vértice do triângulo equilátero (Vértice A na figura 4 exposta anteriormente)

Podemos notar que os arcos AB, AC e BC são iguais. A corda será maior que o lado de um triângulo inscrito nessa circunferência se o segundo ponto A' se encontrar no arco BC.

Seja R o raio do círculo, para este método usando a Probabilidade Geométrica, o espaço amostral é Ω= [0,2ΠR] e a σ-álgebra $\mathcal{F} = \{A \subset [0, 2\Pi R]\ mensurável\}$, cuja probabilidade é:

$$P(arco\ BC) = (medida\ do\ arco\ BC)\ /\ 2\,\pi\,R.$$

A medida do arco BC na figura é 2ΠR/3, portanto a probabilidade desejada

$$P(cordas\ maiores) = P(BC) = \frac{2\,\pi\frac{R}{3}}{2\,\pi\,R} = \frac{1}{3}.$$

Segundo método: **ponto aleatório no raio.**

A construção da corda é dada da seguinte forma: escolha um ponto "I'' ao acaso em um dos raios e, por esse ponto traçamos a perpendicular ao raio que passa por I e é paralela ao diâmetro, dessa forma obtemos a corda AA'. Vemos que a corda depende da escolha do ponto I, a escolha do raio é irrelevante e a escolha do ponto é equivalente a sortear um ponto ao acaso num segmento de [0,R].

Suponha que L é o lado do triângulo. Temos que a altura é dada por $BD = h = \frac{\sqrt{3}L}{2}$, o comprimento do centro a D é $\frac{\sqrt{3}L}{6}$, tendo um triângulo retângulo de lados L/2 e $\frac{\sqrt{3}L}{6}$, do qual a hipotenusa é R, então $R = \frac{L\sqrt{3}}{3}$, assim $L = R\sqrt{3}$. O comprimento do centro a D é $R/2$.

A corda será maior que o lado de um triângulo inscrito se o ponto I for escolhido entre [0,R/2]. Vide figura 5 apresentada anteriormente.

Para este método é usado a Probabilidade Geométrica, onde $\Omega = [0, R]$ e a σ-álgebra $\mathcal{F} = \{A \subset [0,\ \text{R}]\ mensurável\}$. Cuja probabilidade é: $$P([a,b]) = \frac{b-a}{R}.$$ Portanto a probabilidade procurada é: $P(cordas\ maiores) = P\left(\left[0, \frac{R}{2}\right]\right) = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2}$.
Terceiro método: **ponto médio aleatório** A corda é escolhida ao acaso da seguinte forma: Escolha aleatoriamente um ponto P dentro do círculo e pegue a corda AA' de tal forma que P seja seu ponto médio e seja perpendicular ao segmento P0. Vide figura 6 apresentada anteriormente. Para que a corda AA' seja maior que o lado de um triângulo equilátero, o ponto P escolhido deve estar dentro de um círculo inscrito C de mesmo centro e de raio menor que R. Neste método usamos novamente Probabilidade Geométrica, onde, $\Omega = \{\text{círculo de raio R}\}$ e σ - álgebra $\mathcal{F} = \{\text{subconjunto mensurável no círculo de raio R}\}$. $$P(C') = \frac{\text{Área Círculo } C'}{\pi R^2}.$$ Portanto a probabilidade desejada é: *P(Cordas maiores)=P(C)=* $\frac{\pi(\frac{R}{2})^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$.

Fonte: Elaborado pelos autores baseado nas ideias de Bertrand e Magalhães (2006)

Após esta apresentação, é interessante discutir com os estudantes que os axiomas de Kolmogorov foram importantes para o desenvolvimento da Probabilidade, em especial, por dois fatores, a saber: porque através das σ-álgebra é possível fixar, dentro do espaço amostral, os conjuntos que podemos medir o "acaso" e, também, porque por meio da função Probabilidade e suas propriedades é fixada a forma de medir o acaso de cada conjunto do σ-álgebra sem ambiguidades.

Com esta abordagem finalizamos a apresentação de nossa proposta didática e ressaltamos a relevância de sua adaptação aos diferentes contextos dos diversos cursos brasileiros. Merece destaque, ainda, a necessidade da inclusão de mais exemplos, bem como a proposição de exercícios e apresentação de biografias dos estudiosos de destaque.

Para finalizar, enfatizamos que a nossa proposta se volta para a utilização da HM no ensino de Probabilidade em cursos de formação de professores, visando contribuir para a formação matemática destes estudantes. Esta proposta foi elaborada buscando uma variedade na forma que a HM é abordada, ora apresentando fatos e informações históricas e ora utilizando definições e problemas formulados ao longo do tempo com vistas a lecionar de modo significativo o conteúdo matemático.

Neste sentido, nossa proposta está em consonância com Balestri (2008), já que os aspectos da HM possibilitam problematizar o conteúdo matemático abordado, por meio da apresentação e estudo de um Paradoxo relevante no contexto da História das

Probabilidades, bem como, contribuem para a ampliação do conhecimento matemático, por meio da abordagem de biografias, da apresentação de trechos e/ou obras relevantes do desenvolvimento da Matemática, e ainda, permitem discussões sobre as implicações dos Paradoxos para a Matemática, que podem contribuir, até mesmo, para um repensar sobre a natureza do conhecimento Matemático.

Considerações Finais

No presente trabalho buscamos descrever uma proposta de ensino, que se utiliza de elementos da HM para abordagem de conceitos de Probabilidade na formação de professores. Entendemos que a produção e divulgação de materiais desta natureza é relevante para a área de HM e/ou Educação Matemática à medida que pode se constituir como fonte de pesquisa para professores formadores, podendo contribuir para um aumento da apresentação de elementos da HM nos cursos de licenciatura.

Nesta proposta, os elementos da HM são apresentados de modo a problematizar o conteúdo matemático abordado, a ampliar a cultura matemática dos estudantes e a possibilitar discussões que permitam um repensar sobre a natureza do conhecimento matemático. Podendo assim, contribuir para a formação matemática do futuro professor. Em que pese este fato, para finalizar, enfatizamos a necessidade de uma implementação desta proposta com vistas a analisar as efetivas contribuições desta para a formação de professores.

Referências

BALESTRI, R. D. “A participação da História da Matemática na formação inicial de professores”. In. BALESTRI, R. D. **A Participação da História da Matemática na Formação Inicial de Professores de Matemática na Ótica de professores e pesquisadores**. Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, 2008.

BATANERO, C.; FERNÁNDEZ, J. A. Y CONTRERAS, J. M. Uma análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. **SUMA**, v. 62, 11-18, 2009a.

BATANERO, C; CONTRERAS, J. M.; DÍAZ, C. Y ARTEAGA, P. Paradojas en la historia de la probabilidad como recurso didáctico. **XV Jornadas de Investigaciónenel Aula de Matemáticas**. Granada: Sociedad Thales, 2009b.

BATANERO, C.; CONTRERAS, J. M.; CAÑADAS, C.; YGEA, M. M. Valor de las paradojas en la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo de probabilidad. **Novedades educativas**, v. 261 (1), 78-84, 2012.

BERTRAND, J. **Calcul des Probabilités**. Deuxième édition. Paris: Gauthier-Vilars, Imprimeur-Libraire, 1907.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a Base. Brasília, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: junho de 2021.

BORGES, L. C**. A História da Matemática na Formação inicial de Professores de Matemática: um estudo em teses e dissertações brasileiras**. Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências da Universidade Federal de Itajubá. 2019.

BUFFON, G. **Essai d'arithmétique morale. Histoire naturelle, générale er particulière**, Supplément 4, 1777.

CARVALHO, L. S.; CAVALARI, M. F. History of mathematics in basic education: a study of undergraduate students graduating in mathematics. **Res., Soc. Dev**. 4 (8), 2019.

FERREIRA JUNIOR, W. C. O sexto problema de Hilbert: quando o fim se tornou método. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 3, n. 5, p. 63-72, 2003.

GORROOCHURN, P. **Classic Problems of Probability**. 1ª. Edição. New Jersey: John Wiley & Sons, 2016.

HILBERT, D. Mathematical Problems. **Bulletin of the American Mathematical Society**, vol. 8, no. 10, pp. 437–479, 1902.

KAYNES, J. **A treatise on Probability**. London: Macmillan e Co, 1924.

KOLMOGOROV, A. N. **Foundations of Probability Theory**. Tradução: Nathan Morrison. Segunda edição em língua inglesa. New Jersey: Chelsea Publishing Company, 1956.

LAPLACE, P. Mémoire sur les suites récurro-récurrentes et sur leur usages dans la théorie des hasards, **Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris,** 6, 353–371, 1774. Reprinted in Oeuvres Compétes, 8, 5–24.

MAGALHAES, M. N. **A Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. São Paulo: Edusp, 2006.

MIGUEL A.; BRITO, A. J. A História da Matemática na Formação do Professor de Matemática. In: FERREIRA, E. S. (org). **Cadernos CEDES** 40 (Centro de Estudos Educação e Sociedade) – História e Educação Matemática. 1ª Edição. P. 47-61. Papirus: 1996.

SHAFER, G.; VOVK, V. The sources of Kolmogorov's Grundbegriffe. Statistical Science. **A Review Journal of the Institute of Mathematical Statistics**, v.21, n.1, p. 70-98, 2006.

Recebido em: 06 / 03 / 2021
Aprovado em: 09 / 07 / 2021