O QUE É SIMETRIA? DIFERENTES USOS DA PALAVRA AO LONGO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

WHAT IS SYMMETRY? DIFFERENT USES OF THE WORD THROUGH THE HISTORY OF MATHEMATICS

Regina Célia Guapo Pasquini[1]
UEL - Universidade Estadual de Londrina
Humberto José Bortolossi[2]
UFF – Universidade Federal Fluminense

Resumo
Ao longo da história da humanidade, a palavra "simetria" possuiu diferentes significados em diferentes períodos. Apresentamos, neste artigo, um estudo que revela três acepções distintas para esta palavra, passando por Euclides, Vitruvius, Legendre e culminando com o conceito moderno como é atualmente usando em áreas como Física, Química, Biologia e a própria Matemática. Apresentamos também, ao final, algumas implicações deste estudo no campo educacional.

Palavras-chave: História da simetria; Euclides; Vitruvius; Legendre: Invariância.

Abstract
Through human history, the word symmetry has had different meanings in different periods. We present, in this article, a study that reveals three distinct meanings for this word, passing through Euclid, Vitruvius, Legendre and culminating with the modern concept as it is currently used in areas such as Physics, Chemistry, Biology and Mathematics itself. We also present, in the end, some implications of this study in the educational field.

Keywords: History of symmetry; Euclides; Vitruvius; Legendre; Invariance.

Introdução

É possível que uma mesma palavra seja usada em diferentes épocas ao longo da história por diferentes pessoas e com significados que dependem do contexto em que são usadas. Mais ainda: não é raro que um mesmo autor use o mesmo termo com sentidos diferentes em momentos diferentes[3]. Sem se conhecer a definição que está sendo adotada, interpretações equivocadas podem aparecer. Por mais que a Matemática seja uma ciência considerada exata, existem palavras que carecem de estudos ao longo da história para que possamos analisar e conhecer quais as suas formas assumidas nos diferentes contextos. Por mais que esta busca possa ser motivada por apenas uma

[1] Endereço eletrônico: rcgpasq@uel.br
[2] Endereço eletrônico: hjbortol@vm.uff.br
[3] Neste sentido, um exercício interessante para o leitor curioso é procurar pelas definições dadas para "simetria" em dicionários e enciclopédias.

"curiosidade científica", ela pode trazer implicações sobre os seus usos, trazendo ecos e permitindo-nos tecer considerações importantes no contexto escolar. Uma investigação desta natureza só poderá ser realizada a partir da história da humanidade, incluindo aí a história da Matemática. "Simetria" é uma destas palavras com múltiplos significados! Existem diversos livros que tratam da história da simetria e que podem ser visitados a fim de realizar investigações sob tal afirmação, entre eles, Mainzer (1988), Yaglom (1988), Brading e Castellani (2003), Darvas (2007), Hon e Goldstein (2008), Stewart (2012) e, PASQUINI e BORTOLOSSI (2015).

O que é "simetria", afinal? Neste artigo, seguindo os passos de Hon e Goldstein (2008), veremos que, ao longo da história, a palavra "simetria" teve diferentes acepções (culminando com o conceito moderno utilizado em áreas como Matemática, Física, Química, Biologia, Cristalografia, entre outras) e que, no contexto escolar brasileiro, apresenta-se de modo frágil (PASQUINI; BORTOLOSSI, 2015; MENDES, 2014). Para isso, realizamos uma breve apresentação sobre esta palavra em três momentos da história junto aos seus personagens, e ainda como o autores Giora Hon e Bernard Goldstein, procuramos cumprir em nosso trabalho a missão de estudar e compreender de forma diacrônica isto é, não anacrônica, a evolução histórica dos conceitos associados à palavra "simetria".

Simetria e Euclides

Ao visitarmos a obra os Elementos de Euclides encontramos como primeira definição do Livro X, em grego, o seguinte:

> Σύμμετρα (*summetra*) μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα (*assumetra*) δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι. (HEIBERG & MENGE, 1883, p. 3, inserções nossas)

Na tradução de Irineu Bicudo para o Português, encontramos:

> Magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se. (BICUDO, 2009, p. 353)

Hon e Goldstein (2008, p. 71) observam que "simetria" é a palavra de origem latina mais etimologicamente próxima da palavra original "summetra" em grego. Conclusão: o significado dado a palavra "simetria" por Euclides é o que hoje conhecemos como comensurabilidade[4]. Com a terminologia Matemática atual, dizer que duas magnitudes são comensuráveis significa dizer que a razão entre elas pode ser expressa por um número racional. No contexto de medidas, comensuralibilidade pode ser definida como:

> Se um segmento $u = CD$ é tomado como unidade, sua medida é, por definição, igual a 1. Segmentos congruentes, por definição, possuem a mesma medida. Dado um segmento AB, se n pontos interiores decompuserem AB em n segmentos justapostos, então a medida de AB será igual à soma das medidas desses n segmentos. Se estes segmentos parciais foram todos congruentes a u, então diremos que *u cabe n* vezes em AB e a medida de AB será, por definição, igual a n. Diremos que dois segmentos AB e CD são *comensuráveis* se existe um segmento $w = RS$ que cabe n vezes em CD e m vezes em AB. Nesse caso, w será então uma *medida comum* de CD e AB. Observe que, nesse caso $AB/CD = (m\ w)/(n\ w) = m/n$ é um número racional, uma vez que m e n são números inteiros, com n diferente de zero (LIMA et al, 2003).

A definição acima leva-nos a concluir que o uso matemático do equivalente em grego da palavra "simetria" não possui relação com o conceito de invariância dado à palavra nos dias atuais e que está presente nos livros didáticos de Matemática, no qual apresentaremos mais adiante.

Simetria e Vitruvius

Marcus Vitruvius Pollio (c. 80-70 a.C.- c. 15 a.C.) foi um arquiteto e engenheiro romano, conhecido pelo seu tratado de arquitetura publicado em 10 volumes, *De Architectura Libri Decem*, *Os Dez Livros sobre Arquitetura*. A obra de Vitruvius é considerada como o único tratado europeu do período greco-romano nos nossos dias e que foi fonte de inspiração para diversos textos de Arquitetura e áreas afins. Vitruvius foi o primeiro (como ele próprio reconhece), até a sua época, a cobrir todo o corpo da arquitetura de forma sistemática (KRUFT, 1996, p. 21), assim como Euclides fez com a Geometria.

A definição de simetria, em grego arcaico, no Livro I do tratado de Vitruvius é apresentada assim:

[4] Apesar da evidente conexão da palavra "simetria" como "comensurabilidade", existem livros no Brasil que afirmam (de forma equivocada) que "comensurável", "proporção" e "medida" são traduções erradas para a palavra "simetria".

> Item symmetria est ex ipsius operis membris conveniens, consensus ex partibusque separatis ad universae figurae speciem ratae partis responsus. Uti in homonis corpore e cubito, pede, palmo, digito ceterisque particulis symmetros est eurythmiae qualitas, sic est in operum perfectionibus. (VITRUVIUS, Livro I, Capítulo 3, Parágrafo 4, 1955, p. 26, grifo nosso)
>
> A simetria é um acordo uniforme entre os membros de uma mesma obra, e uma correspondência de cada uma delas em separado à obra inteira. Assim como no corpo humano existe uma simetria entre o braço, o pé, a palma, o dedo e as outras partes, assim também acontece com toda obra perfeita (VITRUVIUS, 1955, Livro I, Capítulo 3, Parágrafo 4, p. 26, tradução de Pe. Fiori, grifo nosso)

Nesta mesma obra, no Livro III, Vitruvius coloca que os princípios da simetria se referem a uma proporção adequada e, na sequência explica o que ele entende por proporção:

> Aedium compositio constat ex symmetria, cuius rationem diligentissime architecti tenere debent. Ea autem paritur a proportione, quae graece analogia dicitur. Proportio est ratae partis membrorum in omni opere totiusque commodulatio, ex qua ratio efficitur symmetriarum. Namque non potest aedis ulla sine symmetria atque proportione rationem habere compositionis, nisi uti ad hominis bene figurati membrorum habuerit exactam rationem. (VITRUVIUS, Livro III, Capítulo 1, Parágrafo 1, 1955, p. 158, grifo nosso)
>
> A composição do templo depende da simetria, as regras, as quais devem ser bem caras aos arquitetos. Nasce esta da proporção, que em grego se diz Analogia. E é uma correspondência de medida entre uma certa parte dos membros de cada obra e a obra toda. Da qual a correspondência depende a simetria: portanto, não pode nenhum empreendimento dizer-se bem composto se não foi feito com simetria e proporção, assim como são os membros de um corpo humano bem formado(VITRUVIUS, Livro III, Capítulo 1, Parágrafo 1, 1955, p. 158, tradução de Pe. Fiori, grifo nosso).

A partir de uma análise das definições apresentadas acima, podemos perceber, que ao contrário da definição moderna de simetria que trata do objeto em si, isto é, de como suas partes estão dispostas de forma a serem invariantes por determinadas transformações, na acepção de Vitruvius, “simetria” é uma questão de proporção entre as partes com o todo. Vitruvius dá um significado à palavra “simetria” bem diferente do que significado que a palavra possui atualmente.

Para além de Vitruvius, a evolução do termo "simetria" na arquitetura envolve outros nomes importantes da história como Leon Battista Alberti (1404-1472), Sebastiano Serlio (1475-1554) e Claude Perrault (1613-1688) (HON; GOLDSTEIN, 2005).

> A participação de Perrault, um acadêmico francês eminente, é peculiar: ao traduzir o tratado de Vitruvius para o Francês, ele não traduz a palavra "simmetria" como "simetria", alegando que, em Francês, "simetria" tem outro significado (a igualdade e paridade entre partes opostas). Perrault traduz "simetria" por "proporção" (PASQUINI; BORTOLOSSI, 2015, p. 78).

Simetria e Legendre: a gênese do conceito moderno

Foi em 1794 que o matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752-1833) publicou a obra *Éléments de Géométrie*[5] (Figura 1), reorganizando e simplificando muitas das demonstrações que existiam na obra de Euclides - *Os Elementos* (HON; GOLDSTEIN, 2008; VALENTE, 2007).

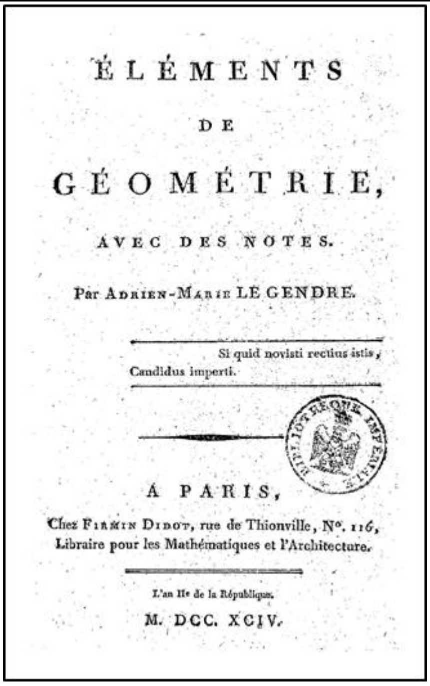
A obra supracitada dominou desde a sua publicação a instrução elementar em geometria por quase um século, chegando a substituir a obra de Euclides e sendo usada como livro texto na maioria de países da Europa, nos Estados Unidos e sendo usado por muitos anos no ensino de Geometria nas escolas militares do Brasil. (HON; GOLDSTEIN, 2008; VALENTE, 2007).

Em sua obra, Legendre realiza uma exposição sobre corpos sólidos. A Legendre atribui-se a adoção da palavra "aresta" derivada do termo francês "*aretê*": "A intersecção comum de duas faces adjacentes de um poliedro é chamada de lado [*côte*] ou aresta [*aretê*] do poliedro (Legendre [1794] 1817, 161, Book VI, def. 2): "*L'intersection commune de deux faces adjacentes d'un polyhedre s'appellé coté ou aretê du polyhedre*".

Em continuidade, Legendre reformulou a fórmula de Euler (Figura 2), e incluiu uma prova desse resultado, que de acordo com o renomado matemático francês Henri Lebesgue (1875-1941) é a primeira prova rigorosa para isto (HON; GOLDSTEIN, 2008).

[5] "Elementos de Geometria" foi traduzida para o português por Manuel Ferreira de Araújo Guimarães.

DOI: 10.30938/bocehm.v3i9.50



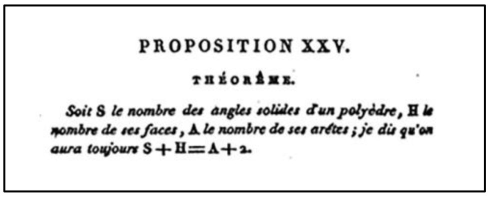
ÉLÉMENTS
DE
GÉOMÉTRIE,
AVEC DES NOTES.
Par Adrien-Marie LE GENDRE.

Si quid novisti rectius istis,
Candidus imperti.

À PARIS,
Chez Firmin Didot, rue de Thionville, N°. 116,
Libraire pour les Mathématiques et l'Architecture.

L'an IIe de la République.
M. DCC. XCIV.

Figura 1 – Recorte da página de rosto do livro
Éléments de Géométrie de Legendre
Fonte: Gallica Bibliothèque Numérique, 2014.



PROPOSITION XXV.
THÉORÈME.
Soit S le nombre des angles solides d'un polyèdre, H le nombre de ses faces, A le nombre de ses arêtes; je dis qu'on aura toujours S + H = A + 2.

Figura 2 – Enunciado da Fórmula de Euler no livro
Éléments de Géométrie de Legendre
Fonte: Gallica Bibliothèque Numérique, 2014.

Entre suas diversas contribuições, das quais são de grande importância para a Geometria, Legendre apresenta um novo estudo de poliedros. Na estrutura de sua obra, ele inclui um conjunto de notas explicativas com diferentes objetivos, destacamos uma delas:

> Nota I: Acerca de alguns nomes e definições. Introduzimos nessa obra algumas expressões e definições novas que servem para dar à linguagem geométrica mais exatidão e clareza. Daremos conta dessas mudanças e proporemos outras que poderiam atender mais completamente os mesmos objetivos. (LEGENDRE, 1794, p. 287, tradução nossa)

Particularmente em relação ao Livro VI, Legendre coloca que quando comparado a Os Elementos, sua abordagem é inteiramente nova. Nas palavras do autor, "O Livro VI trata dos Poliedros e de sua medida. Este livro parecerá bastante distinto daquilo que é contido em outros Elementos; acreditamos que devíamos apresentá-lo de forma inteiramente nova." (LEGENDRE, 2009, p. vi).

Entretanto, foi a crítica realizada por Robert Simson (1687-1768) a *Os Elementos* a motivação para que Legendre desenvolvesse seu trabalho. Simson tece considerações sobre as definições 9 e 10 que definem figuras sólidas semelhantes e figuras sólidas iguais e semelhantes, as quais apresentamos a seguir:

> 9. Figuras sólidas semelhantes são as contidas por planos semelhantes iguais em quantidade.
> 10. E figuras sólidas iguais e semelhantes são as contidas por planos semelhantes em quantidade e em magnitude (BICUDO, 2009, p. 481-482).

Em síntese, Simson coloca que a igualdade de figuras sólidas é algo a ser demonstrado, pelo método da superposição, ou de alguma outra forma, o que contradiz a definição 10, que deveria ser enunciada como teorema, um resultado a ser demonstrado. E para ilustrar esta afirmação Simson dá um contraexemplo. Legendre também dá um contraexemplo para a Definição 10 o qual, quando comparado ao de Simson, pode ser considerado mais simples (PASQUINI; BORTOLOSSI, 2015). A Figura 3 ilustra este contraexemeplo. Nele, os dois tetraedros ABCS e ABCT justapostos pela face ABC são tais que existe uma correspondência entre os tetraedros que preserva as medidas das arestas e ângulos sólidos, mas não é possível sobrepor um sobre o outro.

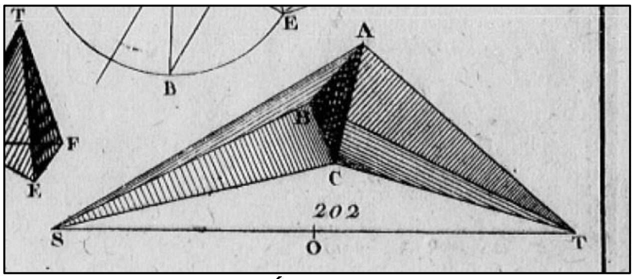


Figura 3 – 'Figura 202' dos *Éléments de Géométrie* de Legendre
Fonte: Gallica Bibliothèque Numérique, 2014.

Enfim, para que a apresentação de Legendre fosse possível, foi essencial avaliar as propriedades de ângulos sólidos. Seus esforços são apresentados nos Livros V (*a Les*

Planeja et let Ângulos Solides) e VI (*Les Polyedres*). No Livro V, ele introduz *"*simetria*"* em geometria sólida:

> Proposição XXII. Se dois ângulos sólidos ∠S e ∠T são compostos de três ângulos planos iguais cada um a cada um, os planos nos quais os ângulos são iguais estarão igualmente inclinados entre si.
>
> Escólio. Se dois ângulos sólidos forem compostos de três ângulos planos iguais, cada um a cada um, e ao mesmo tempo os ângulos iguais ou homólogos estiverem dispostos da mesma maneira nos dois ângulos sólidos, então estes ângulos serão iguais e, postos um sobre o outro, irão coincidir.

E na sequência

> [...] Essa coincidência contudo não tem lugar senão supondo que os ângulos planos iguais estão *dispostos da mesma maneira nos dois ângulos sólidos*. Porque, se os ângulos planos iguais estiverem dispostos em ordem inversa, . . . então, seria impossível fazer coincidir os dois ângulos sólidos um com o outro. Esta sorte de igualdade, que não é absoluta ou de sobreposição, merece ser distinguida por uma denominação particular: nós a chamaremos *igualdade por simetria*. Assim, os dois ângulos sólidos de que se trata que são formados por três ângulos planos iguais, cada um a cada um, mas dispostos em ordem inversa, se chamarão *ângulos iguais por simetria* ou simplesmente *ângulos simétricos* (LEGENDRE, 1794, p. 173-174, tradução nossa).

Ao contrário do que o senso comum possa indicar, a definição de Legendre para *"*simetria*"* não possui precedentes. "Simetria" torna-se uma relação entre sólidos, independente das posições que ocupam no espaço. Com o conceito moderno de "simetria" podemos demonstrar os resultados que dependem da coincidência de figuras sólidas, e, sem o novo conceito, as provas destes resultados não seriam possíveis (HON; GOLDSTEIN, 2008, p.260, tradução nossa).

O conceito moderno de "simetria"

Apresentamos a seguir a definição de "simetria" no plano, tal como é apresentada atualmente[6]:

Definição 1. Seja **X** um subconjunto não vazio do plano euclidiano IR^2. Dizemos que uma função **F**: $\mathrm{IR}^2 \rightarrow \mathrm{IR}^2$ é uma *"simetria"* do conjunto **X** se **F** satisfaz as duas condições seguintes.

1. **F** é uma *isometria*, isto é, **F** preserva distâncias. Mais precisamente, quaisquer que sejam os pontos **P** e **Q** em $\mathbf{IR^2}$, a distância de **P** a **Q** (no domínio de **F**) é sempre igual a distância de **F**(**P**) a **F**(**Q**) (no contradomínio de **F**) (Figura 4).

[6] Para um estudo detalhado consulte: Florencio (2014).

DOI: 10.30938/bocehm.v3i9.50

2. **F**(**X**) = **X**, isto é, **X** é invariante por **F** (a imagem do conjunto **X** pela função **F** é igual ao próprio conjunto **X**).

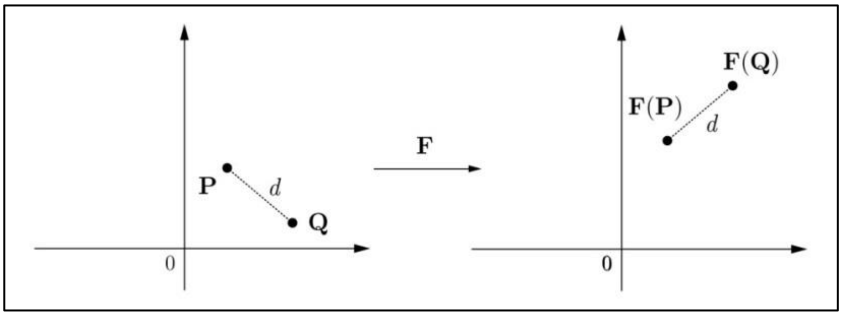


Figura 4 – Isometrias preservam distâncias

Note que, o conceito moderno usa funções para definir simetrias: toda "simetria" de um conjunto **X** do plano é, em particular, uma função cujo domínio é o plano e o contradomínio é o plano (e que, também, preserva distâncias e deixa o conjunto **X** invariante). De um modo geral, "simetria" pode ser definida no espaço $\mathbf{IR}^n$ (FLORENCIO, 2014).

Algumas considerações: implicações no contexto escolar

Pesquisas revelam que o conceito moderno de "simetria" praticamente não aparece no contexto da Escola Básica (PASQUINI; BORTOLOSSI, 2015; MENDES, 2014; MENDES & BORTOLOSSI, 2014). Por outro lado, é o conceito moderno que se aplica a diversas áreas das ciências além da Matemática, tais como: Física, Química, Biologia, Cristalografia e outros (FEYNMAN, 2012; BRADDING & CASTELANI, 2003; HON; GOLDSTEIN, 2008).

Podemos afirmar que as orientações curriculares bem como os livros didáticos abordam o tema com uma interpretação ingênua e frequentemente anacrônica (e sem consciência do anacronismo), ligando o conceito de "simetria" aos desenhos e ornamentos "simétricos" na Antiguidade, isto sem contar o erro gritante em boa parte dos livros didáticos em fazer análise de "simetria" de objetos tridimensionais substituindo-os por fotografias bidimensionais e mencionando "eixos de simetria" onde, o correto, seriam "planos de simetria" (PASQUINI; BORTOLOSSI, 2015).

Os aspectos históricos apresentamos neste texto, ainda que apresentados em um curto espaço, foi capaz de revelar que esta negligência pode estar associada aos vários significados e usos que a palavra "simetria" possuiu ao longo de sua história. No nosso entendimento o estudo realizado ratifica as funções que a História da Matemática possui na formação do professor que ensina Matemática (BARONI; TEIXEIRA; NOBRE, 2004). Além disso, este texto mostrou-nos que conhecer a Matemática do passado pode melhorar nossa compreensão sobre a Matemática que vamos ensinar, além de oportunizar uma reflexão crítica sob o que vamos ensinar. E para isso,

> [...] entendemos que é necessário vestirmos os 'óculos do passado' e discernir os conceitos e ideias que possuímos nos tempos atuais em comparação com aqueles que eram usados no passado. Nesse contexto, é necessário aproximar o professor que ensina Matemática da História da Matemática, a fim de subsidiar o seu trabalho para que ela possa elaborar estratégias de ensino, com intuito de articular História e Ensino da Matemática (PASQUINI; BORTOLOSSI, 2015, p. 64).

Para além dos objetivos deste artigo esperamos tornar o leitor interessado próximo desta discussão.

Ainda no âmbito educacional surgem-nos outros questionamentos: (1) Dada a importância do conceito moderno de "simetria" e de promovermos conexões interdisciplinares da Matemática com outras do conhecimento, não deveríamos dedicar mais espaço para o conceito moderno de "simetria" no currículo da Educação Básica, principalmente no Ensino Médio onde a linguagem funcional está disponível? (2) Onde e como o conceito moderno de "simetria" está presente nos cursos de formação de professores? (3) O modo como o conceito de "simetria" é abordado nos cursos de formação de professores é capaz de trazer o conhecimento necessário para que este possa participar desta discussão? São perguntas que carecem de investigação.

Referências

BARONI, R. L. S; TEIXEIRA, M. V; NOBRE, S. R. **A investigação científica em história da Matemática e suas relações com o programa de pós graduação em educação Matemática**. In: BICUDO, M. A. V; BORBA, M. de C. (Orgs.). Educação Matemática: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012. p. 179 – 202.

BICUDO, I. **Os Elementos de Euclides** (tradução e introdução). São Paulo, Editora UNESP, 2009.

BRADING, K.; CASTELLANI, E. (Eds). **Symmetries in Physics: Philosophical Reflections**. Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press, 2003.

DARVAS, G. **Symmetry: Cultural-Historical and Ontological Aspects of Science–Arts Relations**. Tradução: David Robert Evans. Basel, Switzerland: Birkhäuser Verlag AG, 2007.

FEYNMAN, R. **Sobre As Leis da Física**. Tradução: Marcel Novaes. Rio de Janeiro: Editora PUC-Rio, 2012.

FLORENCIO, M. P. **Transformações no Plano e Grupos de Simetria**. São Carlos: UFSCar, 2011. 49 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2011. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/6/TCC_Final_Mariele.pdf>. Acesso em: 25 nov. 2015.

HEIBERG, I. L.; MENGE, H. **Euclidis Opera Omnia**. Vol. III. Lipsiae: aedibus B. G. Teubneri 1883.

HON, G.; GOLDSTEIN, B. R. **From Proportion to Balance: The Background to Symmetry in Science.** Studies in History and Philosophy of Science, v. 36, p. 1-21, 2005.

HON, G.; GOLDSTEIN, B. R. **From Summetria to Symmetry: The Making of A Revolutionary Scientific Concept**. Archimedes: New Studies in The History of Science and Technology, New York: Springer-Verlag, 2008.

KRUFT, H. **History of Architectural Theory.** Princeton: Princeton Architectural Press, 1996.

LEGENDRE, A. **Elementos de Geometria**. Tradução: Manoel Ferreira de Araújo Guimarães. Organização e adaptação: Luiz Carlos Guimarães. Rio de Janeiro: Editora LIMC-UFRJ, 2009.

LEGENDRE, A. **Eléments de Géométrie, avec des Notes**. Paris: Firmin Didot, 1794.

LIMA, E. L.; Carvalho, P. C. P. C.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 1. Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.

MAINZER, K. **Symmetries of Nature: A Handbook for Philosophy of Nature and Science**. Tradução: Barbara H. Mohr. Boston: Walter de Gruyter & Co., 1988.

MENDES, C. O. de A. e S. **O Conceito Moderno de Simetria nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental: Uma Análise**. Niterói: UFF, 2014. 48 f. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso de Especialização em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Fluminense, Niterói, 2014.

MENDES, C. O. de A. e S.; BORTOLOSSI, H. J. **O Conceito Moderno de Simetria nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental:** Uma Análise. Anais do VI Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro, Niterói: Universidade Federal Fluminense, 2014. Disponível em: <http://eemat.sbemrj.com.br/wp-content/uploads/2014/10/CC45_Carlos_Humberto.pdf>. Acesso em: 25 nov. 2016.

PASQUINI, R. C. G.; BORTOLOSSI, H. J.. **Simetria: História de um Conceito e suas Implicações no Contexto Escolar.** Livraria da Física, 2015.

STEWART, I. **Uma História da Simetria na Matemática.** Tradução: Claudio Carina. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2012.

VALENTE, W. R. **Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730-1930)**. São Paulo: Annablume/FAPESP, 2007.

VITRUVIUS. **On Architecture.** Volume I. Tradução para o Inglês: Frank Granger. The Loeb Classical Library, Harvard University Press, 1955.

VITRUVIUS. **The Ten Books On Architecture**. Tradução: Morris Hicky Morgan. London: Humphrey Milford, 1914.

YAGLOM, I. M. **Felix Klein and Sophus Lie: Evolution of The Idea of Symmetry in the Nineteenth Century.** Tradução: Sergei Sossinsky. Harrisonburg: Birkhiiuser Boston, 1988.

Agradecimento
Ao Padre Fiori (Londrina – PR) que gentilmente realizou as traduções dos trechos em latim arcaico, da obra de Vitruvius, que pertencem a este texto.