BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

ECEEM
ENCONTRO CEARENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v8i23.4964

UM ESTUDO DA PRIMEIRA E SEGUNDA PARTE DO TRATADO DA CIRCUNFERÊNCIA DE AL-KĀSHĪ

A STUDY OF THE FIRST AND SECOND PART OF THE AL-KĀSHĪ CIRCUMFERENCE TREATY

Kaline França Correia Andrade [1]

RESUMO

O presente trabalho é um estudo sobre a primeira e a segunda parte do Tratado da Circunferência (*al-Risāla al-Muhītīyya*) (1424). Este tratado foi escrito originalmente em árabe pelo astrônomo e matemático islâmico *Ghiyāth al-Dīn Jamshīd ibn Mas'ūd ibn Mahmood al-Tabīb al-Kāshī* (1380-1429), ou simplesmente *al-Kāshī*. O objetivo desse tratado era obter uma melhor aproximação da relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro; sua motivação veio da necessidade de maior precisão nas tabelas astronômicas devido aos avanços dos estudos astronômicos. Especificamente neste trabalho, apresentamos um estudo de parte do Tratado da Cicunferência que compreende um trecho da primeira parte e a segunda parte. O título da primeira parte do tratado é "Sobre a determinação da corda de um arco, que é a soma de um arco de uma corda desconhecida e do arco que é a metade de seu suplementar" e o título da segunda parte é "sobre a determinação do perímetro de um polígono qualquer, inscrito no círculo e do perímetro do semelhante circunscrito ao círculo". Assim, para o desenvolvimento deste trabalho, tomamos por base Azarian (2010) e a tradução do russo para o português de al-Kāshī (1954) que está ainda em andamendo. Além de apresentar o Tratado da Circunferência, faremos o passo a passo percorrido por al-Kāshī para a contrução de seu método recursivo para o cálculo do perímetro do polígono regular inscrito de 3.2^n lados e seu semelhante circunscrito, para finalmente obter a aproximação do comprimento da circunferência. Uma conclusão imediata é que relação entre essas duas partes se tornou fundamental para o desenvolvimento do tratado e, diante dos conhecimentos matemáticos mobilizados por al-Kāshī para atingir seus objetivos, concluímos que o Tratado da Circunferência é um documento histórico com potencialidades para elaboração de articulações entre história em ensino.

Palavras-chave: História da Matemática Medieval Islâmica; al-Kāshī; Tratado da Circunferência (*al-Risāla al-Muhītīyya*).

ABSTRACT

The present work is a study on the first and the second part of the Circumference Treaty (al-Risāla al-Muhītīyya) (1424). This treatise was originally written in Arabic by the Islamic astronomer and mathematician Ghiyāth al-Dīn Jamshīd ibn Mas'ūd ibn Mahmood al-Tabīb al-Kāshī (1380-1429), or simply al-Kāshī. The objective of this treaty was to obtain a better approximation of the relationship between the length of the circumference and its diameter; its motivation came from the need for greater precision in the astronomical tables due to the advances in astronomical

[1] Mestra em Matemática Aplicada e Estatística pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (PPGMAE/UFRN). Professora de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN), Natal, Rio Grande do Norte, Brasil. Endereço para correspondência: E-mail: kaline.andreza@hotmail.com.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-9237-2076 .

studies. Specifically in this work, we present a study of part of the Cicunference Treaty that comprises an excerpt from the first part and the second part. The title of the first part of the treaty is "On the determination of the string of an arc, which is the sum of an arc of an unknown string and the arc that is half of its supplementary" and the title of the second part is "on the determination of the perimeter of any polygon, inscribed in the circle and the perimeter of the similar circumscribed to the circle". Thus, for the development of this work, we used Azarian (2010) and the translation from Russian into Portuguese of al-Kāshī (1954), which is still in progress. In addition to presenting the Circumference Treaty, we will do the step-by-step covered by al-Kāshī for the construction of his recursive method for calculating the perimeter of the inscribed regular polygon of 3.2^n sides and its similar circumscribed, to finally obtain the approximation of the circumference length. An immediate conclusion is that the relationship between these two parties has become fundamental for the development of the treaty and, in view of the mathematical knowledge mobilized by al-Kāshī to achieve his objectives, we conclude that the Circumference Treaty is a historical document with potential for the elaboration of articulations between history in teaching.
Keywords: History of Medieval Islamic Mathematics; al-Kāshī; Circumference Treaty (*al-Risāla al-Muhītīyya*).

Introdução

O tratado da Circunferência (*al-Risāla al-Muhītīyya*) (1424) é um trabalho marcante da matemática islâmica medieval, foi escrito em um contexto onde os estudos astronômicos ocupavam um lugar de destaque na ciência islâmica medieval e o seu avanço demandava tabelas astronômicas (*zīj*) cada vez mais precisas. Foi originalmente escrito em árabe e concluído em 1424 pelo matemático e astrônomo islâmico Ghiyāth al-Dīn Jamshīd Mas'ūd al-Kāshī, ou simplesmente al-Kāshī, (O'CONNOR; ROBERTSON, 1999), durante sua permanência em Samarcanda a convite do governante Ulugh Beg, para fazer parte da equipe de sábios de sua madrassa (tipo de universidade). Seu conteúdo é dedicado ao cálculo de uma melhor aproximação para a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, comparada às aproximações obtidas pelos seus predecessores: Arquimedes (287-212 a.C.), Abul'Wafā' al-Būzjānī (940-998) e Abū Rayhān al-Bīrūnī (973-1050).

A cópia de que dispomos para a elaboração desse trabalho consiste de uma tradução russa, al-Kāshī (1954), feita por Boris Rozenfeld e publicada na revista Pesquisa Histórica e Matemática (*ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ - Istorico-Matematicheskie Issledovaniya*), edição nº 07, uma publicação de Estado de literatura técnico-teórica, em Moscou, 1954, editada por G.F. Rybkina e A.N. Youschkevitch. Possui cinquenta e duas páginas e é divido em introdução, dez partes e conclusão. Deixamos claro que todas as demonstrações e relações matemáticas presentes no Tratado da Circunferência, foram feitas por extenso, com excessão das tabelas de cálculos.

O presente trabalho consiste de um estudo específico sobre um trecho da primeira parte do tratado (onde al-Kāshī desenvolve o que hoje podemos denominar de teorema) e da segunda parte, na qual al-Kāshī desenvolve um método recursivo para o cálculo das sucessivas cordas e, consequentemente, dos sucessivos lados dos polígonos regulares inscritos à circunferência, com vistas a obter o perímetro de um polígono de 3.2^n lados. Nesse processo, vamos também identifcar os conhecimentos matemáticos mobilizados por al-Kashi para alcançar seu objetivo. Adotando uma historiografia atualizada "que leva em conta a contextualização dos processos de elaboração, transmissão e adaptação de conceitos" (BELTRAN; SAITO; TRINDADE, 2014, p.15), este trabalho foi elaborado dentro da perpectiva que busca articular a história e o ensino de matemática, não somente através da compreensão do processo de formação dos conhecimentos matemáticos dentro de seu contexto, mas também prima pelo conteúdo matemático em si, (SAITO; DIAS, 2013, p.96).

Dividimos nosso trabalho em introdução, três partes e conclusão: na parte 1, falamos sobre o objetivo do Tratado da Circunferência e o teorema criado por al- Kāshī; na parte 2, fizemos os cálculos das sucessivas cordas; na parte 3, contamos os lados do polígono de 3.2^n lados e, por último, tecemos nossas conclusões e considerações finais.

Parte 1: o objetivo e teorema central

Na introdução do tratado, após analisar as aproximações feitas por seus predecessores, Arquimedes (287-212), Abu'l-Wafā Būzjānī (940-998) e Abu Rayhān al-Bīrūnī (973-1048), e concluir que não eram satisfatórias, al-Kāshī estabelece um ousado objetivo:

> [...] queremos determinar a circunferência do círculo com a suposição de que seu diâmetro é conhecido em termos de uma determinada medição de tal maneira que estaríamos certos de que em um círculo que seu diâmetro é seiscentas mil vezes maior que o diâmetro da esfera terrestre, a diferença entre o resultado de nossos cálculos e o valor real não ultrapasse a largura de um fio de cabelo, ou seja, um sexto da largura de um grão de cevada, de modo que tal diferença para círculo menor que este seja ainda menor.[2] (AL-KĀSHĪ, 1954, p.329, tradução nossa).

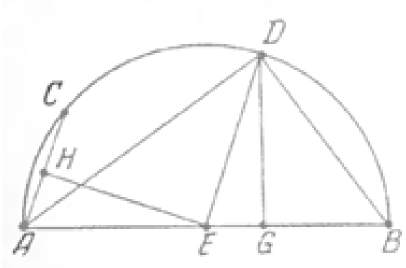
Logo, al- Kāshī queria determinar o comprimento da circunferência de diâmetro conhecido em termos de alguma medição (ou seja, em alguma unidade de medida), de tal forma que, para um círculo de diâmetro seiscentas mil vezes maior que o diâmetro da Terra, a diferença entre o valor real e o valor calculado não fosse maior que a largura de um fio de cabelo de cavalo, que equivale a um sexto da largura de um grão de cevada; além disso, para círculos menores, essa margem de erro seria menor ainda.

Então, na primeira parte do tratado, embora não use essa denominação, al- Kāshī desenvolve o que hoje podemos denominar de teorema (Figura 1):

[2] "[...] мы хотим так определить окружность круга в частях, в которых выражен диаметр, чтобы мы были уверены, что в круге, диаметр которого равен шестистам тысячам диаметров земли, разница между ней [полученной величиной окружности] и истинной была не больше волоса, т.е. одной шестой ширины среднего ячменного зерна, так что разность для круга, меньшего чем этот, была бы меньше" (AL-KĀSHĪ, 1954, p.329, tradução nossa).

> Digo que: uma superfície [retangular] [construída] na soma do diâmetro e da corda de cada arco menor que o semicírculo e na metade do diâmetro [10] é igual ao quadrado da corda do arco que é igual à soma do primeiro arco e a metade de seu suplemento ao semicírculo[3] (AL-KĀSHĪ, 1954, p.329, tradução nossa).

Figura 1



Fonte: al- Kāshī (1954, p.329).

Ou seja, dado um arco AD que é a soma de um arco conhecido AC com a metade de seu suplemento CD, o quadrado da sua corda $\overline{AD}$ é igual a superfície retangular construída na soma do diâmetro AB e da corda desse arco menor que o semicírculo AC e na metade do diâmetro R, onde $AB = 120$. No contexto de al-Kāshī uma superfície retangular significava o produto entre dois valores, logo, escrevendo em notação moderna temos que $R.(AB + AC) = AD^2$. Em Azarian (2010) este teorema é denominado de teorema fundamental de al-Kāshī e é enunciado da seguinte forma:

> (Teorema Fundamental de Kāshī). Se em um semicírculo com o diâmetro $AB = 2r$ e o centro E consideramos um arco arbitrário AG, e chamamos o meio do arco GB de ponto D, e desenhamos a corda AD, então, $R.(AB + AC) = AD^2$. (AZARIAN, 2010, p.68)

Abaixo, temos a tradução do trecho da primeira parte do tratado em que al-Kāshī demonstra sua proposição:

> A fim de demonstrar construamos o semicírculo ACB de centro E na linha AB; traçamos uma corda arbitrária AC; [o arco] BC que é o suplemento de AC dividimos ao meio encontrando o ponto D; ligamos A e D. Então a asserção [diz]: a superfície na metade do diâmetro e a soma AB e AC é igual ao quadrado AD.
> Demonstração: Traçamos BD. Então o ângulo ADB é reto pela proposição trinta do terceiro [livro] d'Os Elementos.
> A seguir baixamos do ponto D a perpendicular DG à linha AB. Obtém-se os triângulos DBG e DAG, semelhantes aos triangulo ADB pela oitava

[3]" Я говорю: [прямоугольная] поверхность, [построенная] ра сумме диаметра и хорды каждой дуги, меньшей полукруга, и на половине диаметра [10], равна квадрату хорды дуги, равной сумме первой дуги и половины её дополнения до полукруга." (AL-KĀSHĪ, 1954, p.329, tradução nossa).

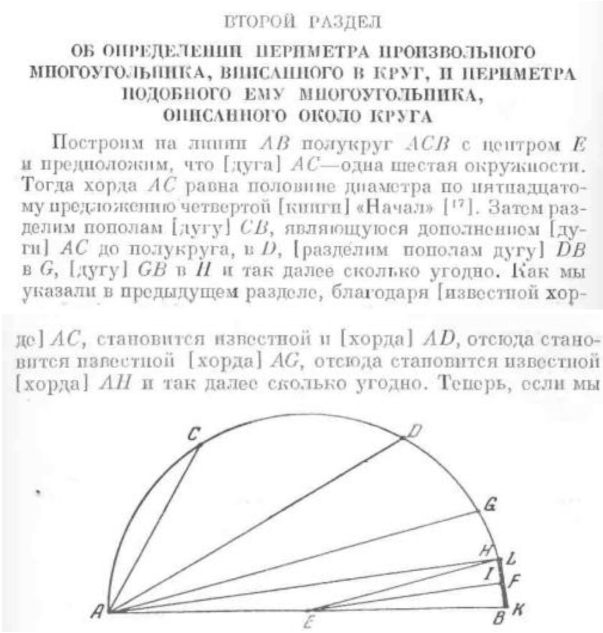
> proposição do [livro] seis d'Os Elementos. Por isso, o diâmetro AB está para AD assim como AD está para AG e pela proposição dezenove do [livro] sete dos Elementos, a superfície no diâmetro é igual ao quadrado de AD.
> A seguir, pelo ponto H traçamos a perpendicular HE ao segmento AC. Então H será ponto médio de AC pela proposição três do terceiro livro de Os Elementos. Ligamos os pontos ED. Uma vez que a medida do ângulo BAC é metade do arco CB, a mesma do ângulo BED, estes dois ângulos [BAC e DEG] são iguais. Por isto o triângulo AHE e EGD são iguais, uma vez que eles têm os ângulos retos H e G, ângulos iguais em E, A e lados iguais AE e ED. Portanto, o lado EG é igual ao lado AH, que é metade de AC e a superfície sobre AG, ou seja, a soma da metade do diâmetro e EG é igual à metade de AC e sobre o diâmetro é igual ao quadrado de AD. Uma vez que a superfície sobre uma linha e sobre a metade de outra é igual superfície sobre a metade da primeira e sobre a outra inteira, então a superfície sobre a soma do diâmetro e o dobre de EG, i.e., sobre a soma do diâmetro e AC e sobre a metade do diâmetro é igual ao quadrado de AD. Isto é o queríamos [demonstrar]. (AL-KĀSHĪ, 1954, p.329-330, tradução nossa)

Com base neste resultado, na segunda parte do tratado, al-Kāshī desenvolveu seu método recursivo de cálculo de cordas de arcos.

Parte 2: o cálculo das sucessivas cordas

A segunda parte do tratado da circunferência (Figura 2) tem por título: "Segunda parte sobre a determinação do perímetro de um polígono qualquer, inscrito no círculo e do perímetro semelhante circunscrito ao círculo". Nele, o primeiro passo de al-Kāshī é construir um semicírculo de diâmetro $\overline{AB}$ (Figura 3). e o arco AC igual a um sexto da circunferência, ou seja, a medida do arco AC é 60°, logo, a corda AC é igual ao raio da circunferência, de acordo com a proposição quinze do quarto livro de *Os Elementos* de Euclides. Prosseguindo com a demonstração, al-Kāshī divide ao meio sucessivos arcos: D divide ao meio o arco CB (que é suplementar a AC), G é divide ao meio o arco DB, J divide ao meio o arco GB, P divide ao meio o arco JB e assim por diante. Observemos que ele determina as metades dos sucessivos arcos de circunferência, mas em nenhum momento fala em "ponto médio" ou "bissetriz", apenas fala em "dividir o arco ao meio".

Figura 2 –Trecho da Segunda parte do Tratado da Circunferência.



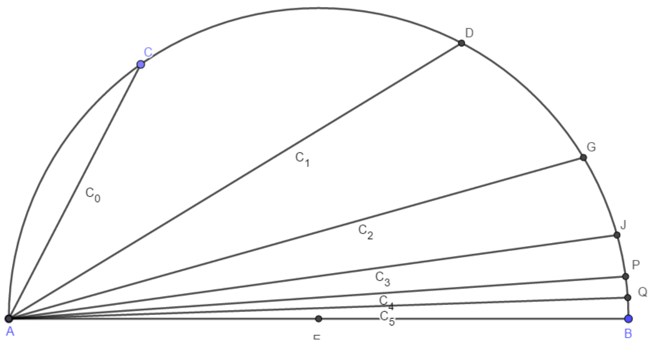
ВТОРОЙ РАЗДЕЛ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЕРИМЕТРА ПРОИЗВОЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА, ВПИСАННОГО В КРУГ, И ПЕРИМЕТРА ПОДОБНОГО ЕМУ МНОГОУГОЛЬНИКА, ОПИСАННОГО ОКОЛО КРУГА

Построим на линии *AB* полукруг *ACB* с центром *E* и предположим, что [дуга] *AC*—одна шестая окружности. Тогда хорда *AC* равна половине диаметра по пятнадцатому предложению четвертой [книги] «Начал» [17]. Затем разделим пополам [дугу] *CB*, являющуюся дополнением [дуги] *AC* до полукруга, в *D*, [разделим пополам дугу] *DB* в *G*, [дугу] *GB* в *H* и так далее сколько угодно. Как мы указали в предыдущем разделе, благодаря [известной хорде] *AC*, становится известной и [хорда] *AD*, отсюда становится известной [хорда] *AG*, отсюда становится известной [хорда] *AH* и так далее сколько угодно. Теперь, если мы

Fonte: al-Kāshī (1954, p.330-331).

Figura 3



Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Assim, utilizando o resultado da primeira parte do tratado: "[...] como conhecemos a corda AC, também conheceremos a corda AD, de onde também será conhecida a corda AG, AH, e assim por diante" (AL-KĀSHĪ, 1954, p.30). Temos que, dado $R.(AB + AC) = AD^2$, obtemos:

$$R.(AB + AC) = AD^2$$

$$R.(AB + AD) = AG^2$$

$$R.(AB + AG) = AJ^2$$

$$\vdots$$

Generalizando, dado $R = 60$ e $c_0 = \sqrt{3}$:

$$R.(2R + c_{n-1}) = {c_n}^2, n \geq 1$$
$$c_n = \sqrt{R.(2R + c_{n-1})}, n \geq 1$$

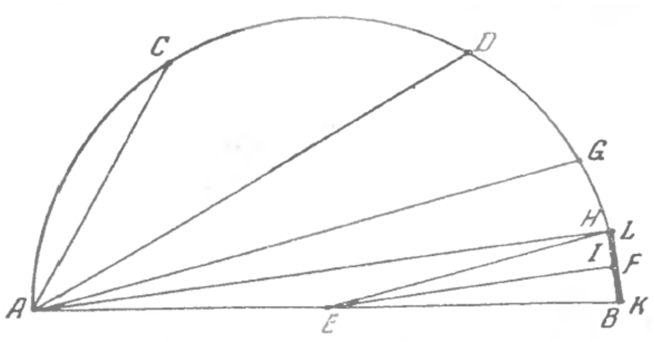
Assim, al-Kāshī obtém um método recursivo para obter as sucessivas cordas c_n. Ele calcula seus valores através de vinte e oito tabelas desenvolvidas ao longo do tratado. Consideramos que, de fato, este o teorema central do tratado, pois todo ele se desenvolve a partir deste teorema.

Analisemos agora o seguinte trecho:

> "[...] o ângulo AHB é reto pela proposição trinta do terceiro [livro] <<d'*Os Elementos*>> [18] e, consequentemente, o quadrado de AB é igual aos quadrados AH e HB pelo "teorema da noiva"[4] [19]" (AL-KĀSHĪ, 1954, p.331, tradução nossa).

Com a conclusão de que AHB é um ângulo reto (Figura 4) pelo "Teorema da Noiva", que concluímos ser o que hoje denominamos de Teorema de Pitágoras, al-Kāshī calcula a corda HB corresponde às sucessivas cordas a_n (Figura 5) que é o lado do polígono regular inscrito, assim, $HB = a_n = \sqrt{4r^2 - c_n^2}, n \geq 1$.

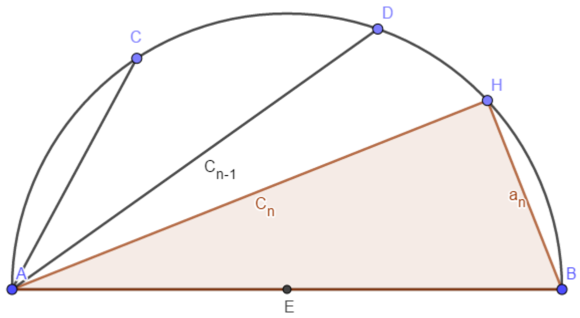
Figura 4



Fonte: al-Kāshī (1954, p.331).

[4] "[..] угол АНВ прямой по тридцатому предложению третьей [книги] «Начал» [18] и, следовательно, квадрат АВ равен квадратам АН, НВ но «теореме невесты» [19]." (AL-KĀSHĪ; 1954, p.329, tradução nossa).

Figura 5



Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Enquanto na primeira parte do tratado al-Kāshī utiliza quatro proposições de *Os Elementos* de Euclides (proposição oito do livro seis, dezenove do livro sete, três do livro três e proposição trinta do livro três), na segunda, ele cita duas: a proposição quinze do quarto livro e a proposição trinta do terceiro livro, mas tomamos o cuidado de conferir em Euclides (2009) se as proposições citadas correspondiam a sua utilização e, verificamos que, tanto na primeira quanto na segunda parte do tratado, ao invés de ser a proposição trinta do livro três, o correto seria a proposição trinta e um do livro três, as outra estão corretas. Em nenhuma parte do Tratado da Circunferência al-Kāshī cita diretamente *Os Elementos* de Euclides, apenas fala a proposição e o livro, atribuímos isso ao fato de que era um livro extremamente difundido entre os estudiosos do mundo islâmico. Quando subentendido no texto que se trata de "*Os Elementos*", o tradutor Rozenfeld o escreve assim <<*Os Elementos*>>, entre <<>>. Já as demais palavras, atribuídas de acordo com o contexto, entre colchetes [ ].

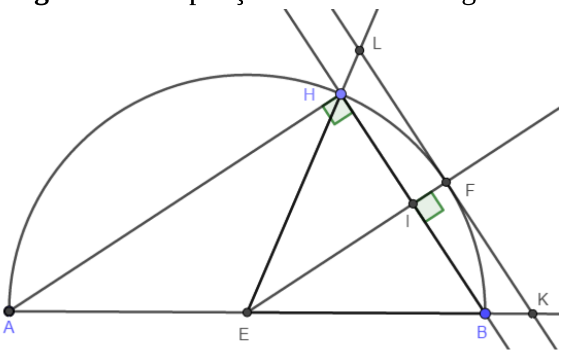
Assim, desconsiderando a notação moderna, mas considerando o método obtido através de $c_n = \sqrt{R.(2R + c_{n-1})}, n \geq 1$e $a_n = \sqrt{4r^2 - c_n^2}$, $n \geq 1$, al-Kāshī pôde calcular o perímetro do polígono regular inscrito à circunferência. Mas, como calcular o perímetro do semelhante circunscrito?

Consideremos agora, o seguinte trecho (Figura 6):

> EI é a metade da linha AH, uma vez que os triângulos AHB e EIB são semelhantes em virtude de que, os ângulos H e I são retos e o ângulo Â, na circunferência que acompanha o arco BH, é igual ao ângulo central Ê, que

> acompanha o arco BF, que é metade do arco BH, e EB que é metade de AB. Desse modo EI é metade de AH[5] (AL-KĀSHĪ, 1954, p.331, tradução nossa).

Figura 6 – Ampliação de detalhe da figura 4.



Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Al-Kāshī usou Semelhança de Triângulos entre os triângulos AHB e EIB juntamente com o fato de a reta suporte do segmento KL tangenciar o ponto F e , de acordo com o que conhecemos hoje como Teorema do Valor Médio, obteve que $\frac{\overline{EI}}{\overline{EF}-\overline{EI}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{KL}-\overline{HB}}$, onde KL é o lado do polígono semelhante circunscrito e $\overline{EI}$, $\overline{EF}$ e $\overline{HB}$ são conhecidos. Mas, quantos lados devem ter esses polígonos regulares inscritos e circunscritos semelhantes?

Parte 3: contando os lados do polígono regular inscrito

Consideremos $\alpha_n, n \geq 0$ as medidas dos sucessivos arcos $AC, AD, AG,$ ..., (Figura 4), observemos (Quadro 1):

Quadro 1 – Medida $\alpha_n, n \geq 1$ e $\alpha_0 = arc(AC) = 60°$.

$\alpha_1 = arc(AD) = arc\ (AC) + \frac{arc(CB)}{2} = 60° + 60° = 180° - 60° = 120°$
$\alpha_2 = arc(AG) = 60° + 60° + 30° = \mathbf{180}° - \frac{\mathbf{60}°}{\mathbf{2}} = 150°$
$\alpha_3 = arc(AJ) = 60° + 60° + 30° + 15° = 180° - \frac{60°}{4} = \mathbf{180}° - \frac{\mathbf{60}°}{\mathbf{2^2}} = 165°$
$\alpha_4 = arc(AP) = 60° + 60° + 30° + 15° + 7{,}5° = 180° - \frac{60°}{8} = \mathbf{180}° - \frac{\mathbf{60}°}{\mathbf{2^3}} = 172{,}5°$

[5] "EI есть половина [линии] AH, так как треугольники AHB и EIB подобны в силу того, что углы H, I прямые, угол A при окружности, стягиваемый дугой BH, равен центральному углу E, стягиваемому дугой BF, являющейся половиной дуги BH, а EB есть половина AB. Таким образом, EI есть половина AH." (ROZENFELD, 1954, p.331, tradução nossa).

$\alpha_5 = arc(AQ) = 60° + 60° + 30° + 15° + 7{,}5° + 3{,}75° = 180° - \frac{60°}{16} = \mathbf{180°} - \frac{\mathbf{60°}}{\mathbf{2^4}} = 176{,}25°$
$\vdots$
$\boldsymbol{\alpha_n = 180° - \frac{60°}{2^{n-1}}}$

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Para o arco HB (Figura 6) juntamente com $\boldsymbol{\alpha_n} = \mathbf{180°} - \frac{\mathbf{60°}}{\mathbf{2^{n-1}}}$, $n \geq 1$ obtemos:

$$arc(HB) = 180° - arc(AD) \Rightarrow$$
$$arc(HB) = 180° - \alpha_n \Rightarrow$$
$$arc(HB) = 180° - \left(180° - \frac{60°}{2^{n-1}}\right) \Rightarrow$$
$$arc(B) = \frac{360°}{6.2^{n-1}}$$
$$arc(HB) = \frac{1}{3.2^n}.360°$$

Portanto, o arco HG (Figura 6) corresponde a $\frac{1}{3.2^n}$ da circunferência. Logo, para obter o perímetro, basta multiplicar a medida da corda $HB = a_n$ pela quantidade de lados, 3.2^n , do polígono regular inscrito, assim, al-Kāshī obteve o polígono ideal.

Conclusões e Considerações finais

Neste trabalho, fizemos uma breve apresentação do Tratado da Circunferência de al-Kāshī e o seu contexto; explicitamos o principal resultado da primeira parte do tratado, o teorema de al-Kāshī. Sobre a segunda parte do tratado, fizemos o passo a passo de como al-Kāshī desenvolveu de maneira bastante engenhosa e surpreendente, utilizando o teorema por ele desenvolvido na primeira parte, um método para calcular o comprimento do polígono regular inscrito de 3.2^n lados e o seu semelhante circunscrito de maneira recursiva, através do que podemos representar hoje com as equações $c_n = \sqrt{R.(2R + c_{n-1})}$ e $a_n = \sqrt{4r^2 - c_n^2}$, $n \geq 1, c_0 = \sqrt{3}$, de fundamental importância para a obtenção do comprimento da circunferência. Vemos também que a principal ferramenta para a execução das ideias de al-Kāshī foram os conhecimentos matemáticos presentes em *Os Elementos* de Euclides, nisto concluímos que ele dominava seu conteúdo sendo capaz de articular várias de suas proposições para obter um resultado inédito. O fato de não enunciar diretamente *Os Elementos*, mostra que este era extremamente difundido no contexto de al-Kāshī, bastando citar o livro e a proposição utilizada para que seus leitores o compreendessem.

Tanto a primeira como na segunda parte do Tratado da Circunferência apresentam diversos conceitos matemáticos compatíveis com o conteúdo matemático ensinado no nosso ensino básico: circunferência, semicircunferência, corda, arco, medida de ângulo, perpendicularidade, ponto médio, tangência, semelhança de triângulos, relações métricas na semicircunferência, recursividade, etc. Logo, diante de tudo que expusemos, concluímos que o Tratado da Circunferência de al-Kāshī apresenta potencialidades para o desenvolvimento da articulação entre história da matemática e ensino conforme citado em Saito e Dias (2013, p.96), algo que será mais explorado na continuação dos nossos estudos.

Referências

AL-KĀSHĪ, G. **Al-Risāla al-Muhītīyya**. Biblioteca Central de Āstāne Qudse Razawī. Coleção de matemática, n. 162, coleção geral n. 5389. Mashhad, Irã, 827 A.H./1424.

AL-KĀSHĪ, G. Traktat ob okruzhnosti**.** In: ROZENFELD, B. (trad.). **Istorico-matematicheskie lssledovaniya**, n.7, p.327-379, Moscou, 1954.

AZARIAN, M. Al-risāla al-muhītīyya: a summary. **Missouri journal of mathematical sciences**, v.22, n.2, p.64-85, 2010.

BELTRAN, M.; SAITO F.; TRINDADE, L. **História da Ciência para formação de professores**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

O'CONNOR, J.; ROBERTSON, E. Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi. **MacTutor.** Um recurso online gratuito que contém biografias de matemáticos. School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland, (1999). Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Kashi/>. Acesso em: 27 fev.2021.

SAITO, F.; DIAS, M. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação** (Bauru). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho São Paulo, Brasil. v. 19, n. 1, p. 89-111, 2013.

Recebido em: 27 / 02 / 2021
Aprovado em: 23 / 04 / 2021