BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v8i24.4683

NÚMEROS IRRACIONAIS: DUAS ATIVIDADES ENVOLVENDO O PENTAGRAMA

IRRATIONAL NUMBERS: TWO ACTIVITIES INVOLVING THE PENTAGRAM

Ana Caroline Frigéri Barboza[1]; Érica Gambarotto Jardim Bergamim[2];
Lucieli Maria Trivizoli[3]

RESUMO

Este trabalho é fruto de pesquisas desenvolvidas no âmbito do Grupo de Estudos em História da Matemática e Educação Matemática (GHMEM) da Universidade Estadual de Maringá (UEM). Dentre os estudos realizados nesse grupo, tem-se aqueles relacionados à história da matemática voltada ao ensino. Nesse sentido, entende-se que a participação da história da matemática na ação pedagógica é um recurso que pode contribuir com o processo de ensino e aprendizagem de matemática. Dentro desse contexto, e relacionando com o conteúdo de números irracionais, tem-se que o objetivo neste artigo é apresentar uma proposta, para professores, com atividades que envolvem características dos números irracionais a partir de informações relacionadas à incomensurabilidade e aspectos históricos do surgimento desses números. O foco neste texto é evidenciar um modo de abordar os números irracionais, o qual compreende explorar algumas propriedades do Pentagrama – símbolo da escola pitagórica. Para tal, são apresentadas duas atividades indicadas para alunos do 1º ano do Ensino Médio, em que a primeira tem como intuito estabelecer relações entre a incomensurabilidade e um número irracional, a partir de investigações vinculadas aos segmentos relacionados ao Pentagrama, e a segunda atividade, por sua vez, tem o propósito de propiciar que os alunos encontrem um número irracional (sua representação decimal e fracionária) e investiguem suas características, também a partir de investigações no Pentagrama. Assim, espera-se que as atividades propostas possam colaborar com o estabelecimento de relações entre conteúdos geralmente trabalhados individualmente (incomensurabilidade – Grandezas e Medidas; números irracionais – Números), além de possibilitar reflexões sobre aspectos históricos

[1] Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática (UEM), Maringá. Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Mario Benedetti, 256, Jardim Esplanada, Mandaguari, Paraná, Brasil, CEP: 86975-000. E-mail: anac_fbarboza@hotmail.com.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6994-0004.
[2] Licenciada em Matemática pela Faculdade de Apucarana (FAP). Mestra pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT - UEM). Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática (UEM), Maringá. Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Doutor Saulo Porto Virmond, 884, Chácara Paulista, Maringá, Paraná, Brasil, CEP: 87005-090. E-mail: ericagambarotto@hotmail.com.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2954-3506.
[3] Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP – Rio Claro). Professora Adjunta do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM), Maringá. Paraná, Brasil. Endereço para correspondência: Universidade Estadual de Maringá Dpto. de Matemática - Bloco F67, 2º andar, sala 221 Avenida Colombo, 5790, Campus Universitário Maringá, Paraná, Brasil, CEP 87020-900. E-mail: lmtrivizoli@uem.br.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3660-6181.

relacionados à temática deste texto.
Palavras-chave: História no ensino de matemática; Pentagrama; Números irracionais.

ABSTRACT

This work is the result of research developed within the Study Group on the History of Mathematics and Mathematical Education (GHMEM) of the State University of Maringá (UEM). Among the studies carried out in this group, there are those related to the history of mathematics oriented on teaching. In this sense, it is understood that the participation of the history of mathematics in the pedagogical action is a resource that can contribute with the teaching and learning process of mathematics. Within this context, and relating to the content of irrational numbers, the objective in this article is to present a proposal, for teachers, with activities that involve characteristics of the irrational numbers from informations related to incommensurability and historical aspects of the emergence of these numbers. The focus in this text is to highlight a way to approach irrational numbers, which includes exploring some properties of the Pentagram - symbol of the pythagorean school. To this end, two activities are presented for students in the 1st year of High School, in which the first is intended to establish relationships between the incommensurability and an irrational number, based on investigations associated to the segments related to the Pentagram, and the second activity, in turn, it has the purpose of to provide that the students to find an irrational number (its decimal and fractional representation) and investigate its characteristics, also from investigations in the Pentagram. Thus, it is expected that the proposed activities can collaborate with the establishment of relations between contents usually worked individually (incommensurability - Quantities and Measures; irrational numbers - Numbers), in addition to allowing reflections on historical aspects related to the theme of this text.
Keywords: History in mathematics education; Pentragram; Irrational numbers.

Introdução

A História na Educação Matemática é um campo de investigação que se direciona para estudos relacionados à participação da história na ação pedagógica (MIGUEL; MIORIM, 2011). Em relação a essa participação, tem-se, na literatura, autores (TZANAKIS; ARCAVI, 2000; JANKVIST, 2009; MIGUEL; MIORIM, 2011) que argumentam favoravelmente a respeito da integração da história da matemática em sala de aula.

Nesse sentido, levando em consideração argumentos que reforçam a presença da história da matemática no ensino e considerando, também, o fato de que alunos da educação básica manifestam dificuldades no entendimento do conceito de números irracionais (REZENDE, 2013), o objetivo neste artigo é apresentar uma proposta, para professores, com atividades que envolvem características dos números irracionais a partir de informações relacionadas à incomensurabilidade e aspectos históricos do surgimento[4] desses números.

Para atender ao objetivo proposto, tem-se que o enfoque neste texto é evidenciar uma abordagem possível sobre os números irracionais, a qual parte de explorações de algumas propriedades do Pentagrama[5] – símbolo da escola pitagórica – e proporciona reflexões sobre o contexto histórico vinculado a esse símbolo.

Quanto à organização deste texto, na próxima seção serão apresentados alguns aspectos históricos dos números irracionais e, na seção seguinte, uma possível proposta com atividades a ser desenvolvida com alunos do 1º ano do Ensino Médio acerca desses números. Para finalizar, serão apresentadas algumas considerações a respeito do texto.

Sobre alguns aspectos históricos dos números irracionais

Não há consenso entre historiadores sobre a origem dos números irracionais. Livio (2006, p. 15, grifo do autor) corrobora esta ideia afirmando que “a data exata da descoberta de números que não são inteiros nem frações, conhecidos como *números irracionais*, não é conhecida com grau algum de certeza”. O que alguns autores (BOYER, 2010; EVES, 2011; ROQUE, 2012) parecem concordar é que esse conjunto de números

[4] O entendimento das autoras a respeito deste termo se dá no sentido das primeiras constatações de existência dos números irracionais.
[5] Este símbolo também é conhecido como estrela de cinco pontas (LIVIO, 2006).

surgiu a partir de investigações oriundas dos pitagóricos – aproximadamente século 5 a. E. C.

Segundo Boyer (2010) e Eves (2011), o surgimento desses números causou um desconforto para os pitagóricos, uma vez que representava uma ameaça para a filosofia desses matemáticos, segundo a qual os números inteiros positivos eram a base de tudo. Nesse sentido, os autores mencionados indicam que os pitagóricos não aceitavam os números irracionais. Roque (2012, p. 96), no entanto, discorda das informações proferidas, apontando que "[...] a conexão entre esse problema e a filosofia pitagórica é duvidosa. Não se tem certeza nem mesmo da relação entre a descoberta dos incomensuráveis e a aplicação do teorema "de Pitágoras"".

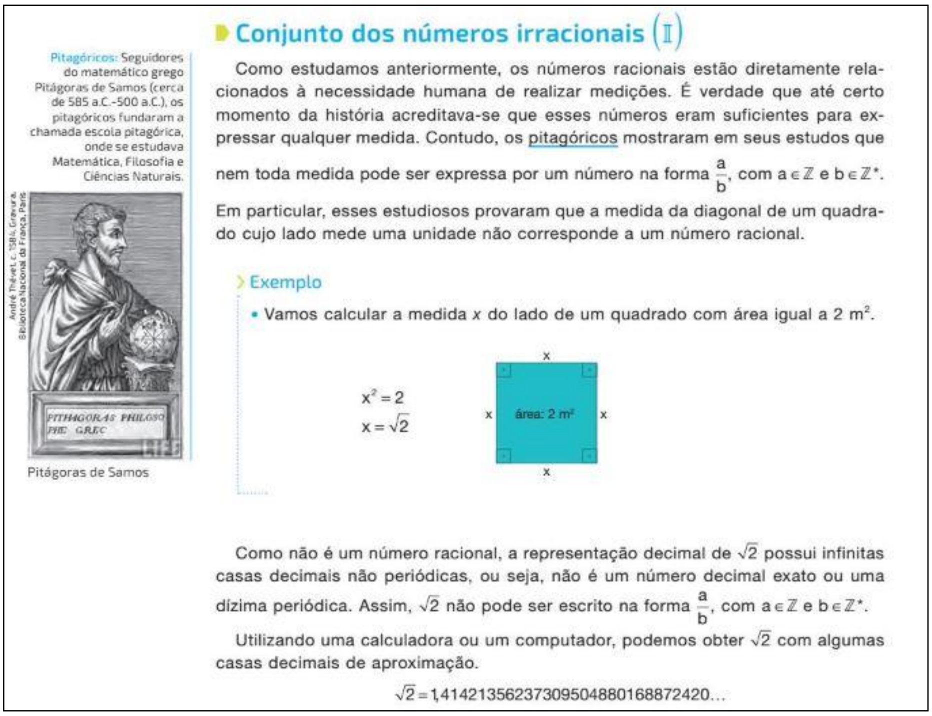
Apesar dessas divergências, destaca-se que em muitos materiais (DANTE, 2016; SOUZA; GARCIA, 2016) são feitas afirmações de que a incomensurabilidade tenha surgido com investigações realizadas a partir de medidas de segmentos que representavam a diagonal e o lado do quadrado de 1 unidade de medida. Nesse contexto, por meio do Teorema de Pitágoras[6], mostra-se a $\sqrt{2}$ como resultado da medida da diagonal do quadrilátero, a qual se classifica como um número irracional[7].

Como exemplo do que foi declarado no parágrafo anterior, tem-se a Figura 1 a seguir:

[6] "Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos." (SOUZA; GARCIA, 2016, p. 241).

[7] "Os números que não admitem uma representação decimal exata nem uma representação na forma de dízima periódica chamam-se **números irracionais**." (DANTE, 2016, p. 20, grifo do autor).

Figura 1 – Contexto histórico dos números irracionais em um livro didático.



Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$)

Pitagóricos: Seguidores do matemático grego Pitágoras de Samos (cerca de 585 a.C.-500 a.C.), os pitagóricos fundaram a chamada escola pitagórica, onde se estudava Matemática, Filosofia e Ciências Naturais.

André Thévet. c. 1584. Gravura. Biblioteca Nacional da França, Paris

PITHAGORAS PHILOSOPHE GREC

Pitágoras de Samos

Como estudamos anteriormente, os números racionais estão diretamente relacionados à necessidade humana de realizar medições. É verdade que até certo momento da história acreditava-se que esses números eram suficientes para expressar qualquer medida. Contudo, os pitagóricos mostraram em seus estudos que nem toda medida pode ser expressa por um número na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Em particular, esses estudiosos provaram que a medida da diagonal de um quadrado cujo lado mede uma unidade não corresponde a um número racional.

Exemplo

- Vamos calcular a medida x do lado de um quadrado com área igual a 2 m².

$x^2 = 2$
$x = \sqrt{2}$

x
x área: 2 m² x
x

Como não é um número racional, a representação decimal de $\sqrt{2}$ possui infinitas casas decimais não periódicas, ou seja, não é um número decimal exato ou uma dízima periódica. Assim, $\sqrt{2}$ não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Utilizando uma calculadora ou um computador, podemos obter $\sqrt{2}$ com algumas casas decimais de aproximação.

$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242 0\ldots$

Fonte: Souza, Garcia (2016).

Com base no que foi exposto, evidencia-se o modo como os números irracionais são abordados na maioria dos livros didáticos, que decorre do que muitos livros de História da Matemática (BOYER, 2010; EVES, 2011) expõem para o leitor sobre o surgimento desses números. Destaca-se que, embora não existam constatações, muitos textos apresentam que o surgimento do primeiro número irracional é a $\sqrt{2}$, devido às investigações já proferidas.

Neste texto, o enfoque é destacar outra abordagem que evidencia a existência dos números irracionais, a saber: explorando algumas propriedades do Pentagrama – símbolo da escola pitagórica. As propriedades que serão consideradas neste trabalho são descritas por Livio (2006, p. 48-49) da seguinte forma:

> O pentagrama também tem relação estreita com o pentágono regular – a figura plana que tem cinco lados e ângulos iguais [...] Conectando-se todos os vértices do pentágono por diagonais, obtém-se um pentagrama. As diagonais também formam um pentágono menor no centro, e as diagonais desse pentágono formam um pentagrama e um pentágono ainda menor [...] Essa progressão pode prosseguir *ad infinitum*, criando pentágonos e pentagramas cada vez menores. Uma propriedade notável de todas essas figuras é que, se olharmos os segmentos de linha em ordem decrescente de comprimento [...], poderemos provar facilmente, usando geometria elementar, que *cada segmento é menor que seus antecessor por um fator que é exatamente igual à Razão Áurea*, Φ. [...] Mais importante ainda, podemos usar o fato de que o processo de criar uma série de pentágonos e pentagramas encaixados pode ser continuado

> indefinidamente com tamanhos cada vez menores, para provar rigorosamente que a diagonal e o lado do pentágono são incomensuráveis, isto é, a razão entre seus comprimentos (que é igual a Φ) não pode ser expressa como a razão entre dois números inteiros. Isto quer dizer que a diagonal e o lado do pentágono não podem ter uma medida comum, de tal forma que a diagonal seja algum múltiplo inteiro dessa medida e o lado também seja algum múltiplo inteiro da mesma medida.

Em consonância às propriedades descritas anteriormente, no próximo tópico será apresentada uma possível proposta com atividades a ser desenvolvida com alunos do 1º ano do Ensino Médio, e também como subsídio para professores de matemática, com o intuito de propiciar discussões envoltas de aspectos históricos relacionados aos números irracionais.

Uma proposta com atividades envolvendo os números irracionais

De início, o professor pode introduzir o conteúdo de números irracionais por meio de questionamentos relacionados aos conhecimentos prévios que os alunos possuem. Seguem exemplos: i) Vocês já ouviram falar sobre os números irracionais?; ii) O que vocês imaginam que seja um número irracional?; iii) Vocês sabem citar algum número que seja irracional? Se sim, explique.

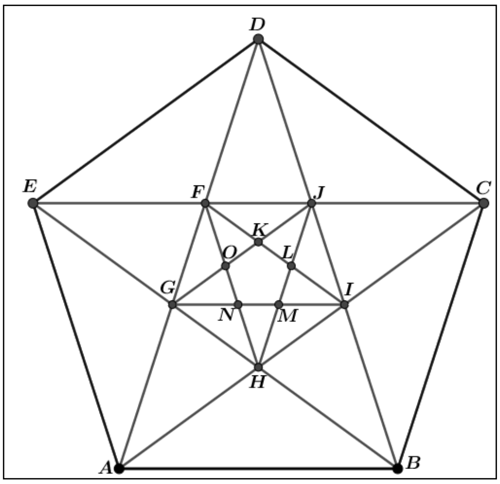
Com base nas respostas que os alunos apresentarem sobre as questões elencadas, o professor pode socializar as ideias e provocar a curiosidade sobre o surgimento desses números. Para isso, na sequência apresenta-se uma sugestão de duas atividades relacionadas aos números irracionais, a fim de proporcionar direcionamentos aos professores em suas aulas.

Na primeira atividade, o professor pode propiciar que os alunos se familiarizem com a ideia de incomensurabilidade, para promover discussões relacionadas a aspectos geométricos associados aos números irracionais; na segunda, a finalidade é que o professor possibilite que os alunos identifiquem características de um número irracional por meio da sua representação decimal e fracionária.

- **Atividade 1**

Dizemos que dois segmentos AB e CD são incomensuráveis se não for possível encontrar um terceiro segmento que cabe um número inteiro de vezes no segmento AB e um número inteiro de vezes no segmento CD (SANTOS, 2013). Nesse sentido, no que se refere ao surgimento da incomensurabilidade, alguns historiadores afirmam que ela provavelmente tenha surgido a partir de investigações que os pitagóricos fizeram no símbolo de sua escola – o Pentagrama. Com base na definição de segmentos incomensuráveis e nos Pentagramas apresentados na Figura 2, identifique segmentos que são incomensuráveis.

Figura 2[8] – O Pentagrama e a incomensurabilidade.



Fonte: As autoras.

Objetivo: Estabelecer relações entre a incomensurabilidade e um número irracional.

Como um subsídio para o professor, tem-se a possibilidade de verificação por meio de régua e compasso[9], conforme os passos[10] abaixo:

1º Passo: Utilizando o compasso, transportar as medidas de dois segmentos em "posição" horizontal.

2º Passo: Verificar a quantidade de vezes que o menor dos segmentos "cabe" no segmento maior.

3º Passo: No passo anterior, caso não seja possível encontrar uma quantidade inteira de vezes, utilizar a parte que sobrou e verificar a quantidade de vezes que ela "cabe" nos segmentos selecionados *a priori*. Verificar se essa parte "coube" uma quantidade inteira de vezes. Se precisar, repita esse procedimento várias vezes.

[8] Optou-se por apresentar essa figura, com a representação de algumas propriedades descritas anteriormente, a fim de que o professor possa visualizá-las e explorá-las no decorrer das possíveis discussões dessa atividade.
[9] Outra possibilidade poderia ser algum software educativo, por exemplo, o Geogebra.
[10] Os passos indicados foram baseados em Santos (2013).

Ressalta-se que ao propor essa atividade alguns cuidados devem ser levados em consideração, como o fato de que a régua é um instrumento que pode deixar a desejar no que se refere à precisão e, o compasso, pode apresentar distorções na medida, a depender do manuseio dos estudantes. É importante destacar, também, que para a constatação de que determinados dois segmentos são incomensuráveis o passo a passo indicado acima se repete infinitamente, mas para efeitos de compreensão dessa repetição o professor pode delimitar que os alunos façam o processo de repetição uma quantidade limitada de vezes. Assim, enfatiza-se que essa atividade se trata de um procedimento didático, e como tal, faz-se necessárias adaptações para o contexto de ensino.

Nessa atividade, os alunos terão a possibilidade de verificar que a diagonal do pentágono e o seu lado são segmentos incomensuráveis, pois não encontrarão um segmento de medida menor que caiba um número inteiro de vezes na diagonal e no lado dos pentágonos relacionados aos Pentagramas. Alguns exemplos de pares de segmentos incomensuráveis que podem ser observados nos Pentagramas apresentados na Figura 2 são: BD e BC, IF e IJ.

Além disso, no momento de socialização de ideias acerca dos resultados que os alunos apresentarem, o professor pode abordar sobre o que a incomensurabilidade significou para a época em que surgiu e a sua importância. Para mais, também pode suscitar algumas indagações sobre a valorização (ou não) que os gregos deram a essa descoberta, de maneira a relacionar aspectos da história que contribuam para a interação de ideias com maior significado.

Alguns questionamentos que podem direcionar esse momento da aula são exemplificados a seguir: i) Que motivações causaram a descoberta da incomensurabilidade?; ii) O que a descoberta da incomensurabilidade ocasionou para a época?; iii) Qual a relação entre incomensurabilidade e número irracional?[11]

Com o intuito de discutir acerca da relação entre a incomensurabilidade de grandezas e a irracionalidade de números é importante que o professor deixe claro que os procedimentos realizados na Atividade 1 dão indícios de que o segmento que representa a diagonal do pentágono e o segmento que representa o seu lado são incomensuráveis, e o número que representa o resultado da razão entre a medida da diagonal e o lado do pentágono é um número irracional.

[11] Como um respaldo para que o professor possa conduzir possíveis discussões a partir dessas questões sugeridas, indica-se a seção 2 deste texto e, também, o material de Roque (2012).

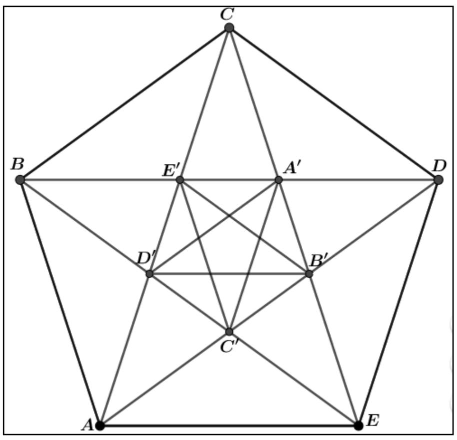
Em consonância à ideia antecedente, o professor pode complementar ainda mais a sua aula abordando o material de Roque (2012) no que diz respeito ao Método Antifairese. Em síntese, esse método advém do grego e fundamenta-se de comparações entre números ou grandezas, em que se retira o menor do maior até o momento em que o resto seja inferior aos fatores que se está comparando.

Nesse sentido, diante o que foi abordado até então, há possibilidades de o professor estabelecer relações da incomensurabilidade com características dos números irracionais. Caso o professor sinta a necessidade de buscar maior respaldo teórico sobre o estabelecimento dessas relações, indica-se o trabalho de Santos (2013).

- **Atividade 2**

Segundo Livio (2006), a construção do Pentagrama possui relações com o pentágono. Ao conectar, por meio de diagonais, todos os vértices do pentágono, encontra-se um Pentagrama. Nesse sentido, se traçarmos as diagonais de um pentágono ABCDE, estas se interceptam em pontos A'B'C'D'E' de modo a formar outro pentágono. E esse processo vai se repetindo infinitamente. Ainda segundo esse autor, esse processo auxilia para mostrar que a diagonal e o lado do pentágono são incomensuráveis, e que a razão entre as medidas de seus comprimentos possui uma propriedade particular: se trata da razão áurea. Com base nesse texto de apoio e na observação da Figura 3 que apresenta alguns Pentagramas, encontre a razão entre as medidas dos segmentos AD e DE.

Figura 3 – Apresentação do Pentagrama.



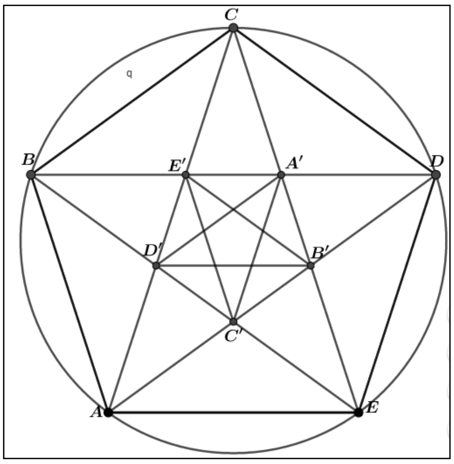
Fonte: As autoras.

Objetivo: Propiciar que os alunos encontrem um número irracional (sua representação decimal e fracionária) e investiguem suas características.

Com o intuito de dar subsídios ao professor, apresenta-se, em seguida, uma possível estratégia de resolução[12] para essa atividade.

1º Passo: Inicialmente, para facilitar a compreensão, circunscrever uma circunferência no pentágono de vértices ABCDE, conforme figura abaixo.

Figura 4 - Circunferência circunscrita em um pentágono.



Fonte: As autoras.

A medida de cada ângulo interno do pentágono regular é igual a 108º. Além disso, duas diagonais, traçadas em qualquer vértice, dividem o ângulo formado por esse vértice em três partes iguais (repartindo-o em três ângulos de $36º$ cada), devido à propriedade de ângulos inscritos na circunferência com mesmo arco.

No triângulo ADE, tem-se que o ângulo $E\hat{A}D = E\hat{D}A = 36$º, e o ângulo $A\hat{E}D =$ 108º.

No triângulo $EB'D$, tem-se que o ângulo $E\hat{D}B' = D\hat{E}B'$ = 36º, assim, o ângulo $D\widehat{B'}E = 108$º.

Desse modo, o triângulo ADE é semelhante ao triângulo $EB'D$, pelo caso de semelhança AAA (ângulo, ângulo, ângulo). Portanto, tem-se que:

$$\frac{AD}{DE} = \frac{DE}{B'D}.$$

[12] Essa estratégia de resolução foi adaptada de Swetz (1994).

Suponha-se que $AD = 1$, pela propriedade da proporção, tem-se que:

$$\frac{1}{DE} = \frac{DE}{B'D},$$

o que implica que $(DE)^2 = B'D$. **(1)**

Nota-se que, pela congruência dos triângulos $DB'E$ e $AC'E$, $AC' = B'D$.

Nota-se também que o triângulo EDC' é isósceles de base $C'E$, e por isso, $DE = DC'$.

Assim, pode-se escrever $AC' = B'D = AD - DC' = 1 - DE$. **(2)**

Substituindo **(2)** em **(1)**, tem-se:

$$(DE)^2 = 1 - DE,$$

que é equivalente a $(DE)^2 + DE - 1 = 0$.

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtém-se $DE = \frac{(-1+\sqrt{5})}{2}$ ou $DE = \frac{(-1-\sqrt{5})}{2}$.

Como DE representa a medida de um segmento - que não pode ser negativa -, considera-se $\frac{(-1+\sqrt{5})}{2}$.

Calculando a razão solicitada, tem-se que:

$$\frac{AD}{DE} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}.$$

Encontrada a razão entre os segmentos solicitados, o professor poderá explicar que o valor encontrado ao realizar os cálculos necessários é o Número de Ouro. Nesse momento, ele pode introduzir o que é esse número e suas particularidades. Para mais, caso ache pertinente, o professor pode elencar alguns questionamentos nessa perspectiva. Seguem alguns exemplos: i) Quais as características do Número de Ouro?; ii) Com base nos conjuntos numéricos já estudados[13], o Número de Ouro pertence a qual(is) dele(s)?

2º Passo: Solicitar que os alunos utilizem calculadoras para encontrar a representação decimal do Número de Ouro a fim de discutir sobre algumas de suas propriedades.

Utilizando as 10 primeiras casas decimais, tem-se que o Número de Ouro é representado por $1{,}6180339887\ldots$. Nesse momento, é interessante fazer algumas observações relacionadas à quantidade finita ou infinita de casas decimais e à verificação de que não há um período de algarismos se repetindo. Quando os alunos perceberem que

[13] Entende-se que como a proposta está sendo direcionada para o 1º ano do Ensino Médio os alunos já tiveram contato com os vários conjuntos numéricos.

o Número de Ouro é um número com infinitas casas decimais sem período de repetição, o professor poderá destacar que números com essas características são denominados como números irracionais.

Nesse momento, os seguintes questionamentos podem ser realizados: i) Como surgiram os números irracionais?; ii) Por que surgiu o número irracional? Qual era a preocupação da época?; iii) Vocês imaginam que tem mais representações de números irracionais ou racionais no nosso cotidiano? Por quê?[14]

Para mais, o professor também pode mostrar aos alunos a representação decimal do Número de Ouro, conforme exposto abaixo, e a partir disso discutir características que circundam esse número.

Figura 5 – Representação decimal do Número de Ouro.

										Casa decimal
1.61803	39887	49894	84820	45868	34365	63811	77203	09179	80576	50
28621	35448	62270	52604	62818	90244	97072	07204	18939	11374	100
84754	08807	53868	91752	12663	38622	23536	93179	31800	60766	
72635	44333	89086	59593	95829	05638	32266	13199	28290	26788	200
06752	08766	89250	17116	96207	03222	10432	16269	54862	62963	
13614	43814	97587	01220	34080	58879	54454	74924	61856	95364	300
86444	92410	44320	77134	49470	49565	84678	85098	74339	44221	
25448	77066	47809	15884	60749	98871	24007	65217	05751	79788	400
34166	25624	94075	89069	70400	02812	10427	62177	11177	78053	
15317	14101	17046	66599	14669	79873	17613	56006	70874	80710	500
13179	52368	94275	21948	43530	56783	00228	78469	97829	77834	
78458	78228	91109	76250	03026	96156	17002	50464	33824	37764	
86102	83831	26833	03724	29267	52631	16533	92473	16711	12115	
88186	38513	31620	38400	52221	65791	28667	52946	54906	81131	
71599	34323	59734	94985	09040	94762	13222	98101	72610	70596	
11645	62990	98162	90555	20852	47903	52406	02017	27997	47175	
34277	75927	78625	61943	20827	50513	12181	56285	51222	48093	
94712	34145	17022	37358	05772	78616	00868	83829	52304	59264	
78780	17889	92199	02707	76903	89532	19681	98615	14378	03149	
97411	06926	08867	42962	26757	56052	31727	77520	35361	39362	1000

Fonte: Adaptado de Livio (2006).

É interessante que o professor, por meio da Figura 5 apresentada acima, evidencie que no Número de Ouro não há um período de algarismos se repetindo e que os algarismos são infinitos, o que ressalta características intrínsecas a ele.

Além disso, com o intuito de ampliar conhecimentos envoltos do tema da aula, o professor pode explicar distinções entre Número de Ouro e Razão de Ouro, bem como

[14] Com o intuito de dar um respaldo para que o professor possa conduzir uma discussão com essas questões sugeridas, entende-se que a seção 2 deste texto pode auxiliar, e para o professor interessado em aprofundar um pouco mais, indica-se o material de Miguel et al. (2009).

promover discussões acerca de registros históricos relacionados a esses dois conceitos, etc. Ainda, mais alguns questionamentos podem ser realizados: i) Além da razão encontrada no Pentagrama, pode-se descobrir outra razão?; ii) Quantas razões podem ser identificadas?[15]

Como outro subsídio para o encaminhamento da aula, o professor pode abordar que com relação ao Pentagrama, uma característica interessante se dá pelo fato de ao considerar segmentos em ordem decrescente de comprimentos, as razões entre as medidas de um segmento e seu antecessor resultam no Número de Ouro (LIVIO, 2006; BERGAMIM; BARBOZA; TRIVIZOLI, 2019).

Ainda, de acordo com Livio (2006), o professor pode ressaltar que ao traçar as cinco diagonais de um pentágono forma-se um pentágono menor, e ao construir as diagonais desse segundo, é formado outro pentágono menor ainda. Ou seja, esse procedimento pode ser realizado infinitamente, resultando em pentágonos cada vez menores e, nesse sentido, evidencia-se a irracionalidade presente no número que resulta da razão entre a diagonal e o lado do pentágono.

Para tanto, o enfoque dessa atividade voltou-se para o estudo dos números irracionais a partir de um número específico: o Número de Ouro, resultante da razão entre segmentos incomensuráveis. Contudo, o professor poderá dar continuidade discutindo características de outros números irracionais, como o π e as raízes quadradas não exatas. Caso o professor queira evidenciar a incomensurabilidade desses números, como foi feito com o Número de Ouro, sugerimos que se paute na dissertação de Santos (2013).

Considerações

O objetivo neste texto foi apresentar uma proposta, para professores, com atividades que envolvem características dos números irracionais a partir de informações relacionadas à incomensurabilidade e aspectos históricos do surgimento desses números. Nesse sentido, ressalta-se que a relevância deste texto está na possibilidade de uma abordagem distinta da usualmente utilizada no ensino de números irracionais, o que pode colaborar para o estabelecimento de relações entre conteúdos geralmente trabalhados individualmente (incomensurabilidade – Grandezas e Medidas; números irracionais –

[15] Como apoio para discutir essas questões sugeridas, indica-se o material de Livio (2006).

Números), além de possibilitar reflexões sobre aspectos históricos relacionados à temática deste texto.

No que tange aos encaminhamentos sugeridos tanto para a Atividade 1 quanto para a Atividade 2, estes são apenas um norte para o professor, pois cabe a ele o direcionamento para a sua aula, de acordo com a turma, com os alunos, suas experiências, etc. Os encaminhamentos não são para serem seguidos rigidamente, mas sim passíveis de modificações conforme as necessidades de cada docente. Além disso, a adaptação por parte dos professores ressalta a autonomia perante suas práticas pedagógicas.

Para mais, como uma possibilidade de trabalho futuro, de caráter interdisciplinar, tem-se como sugestão um estudo sobre o contexto social, político e econômico do período da escola pitagórica, vieses que podem aproximar a História, a Geografia, a Arte, dentre outras áreas.

Referências

BERGAMIM, E. G. J.; BARBOZA, A. C. F.; TRIVIZOLI, L. M. História da matemática para o ensino da razão áurea: um relato de experiência. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática, 15, 2019, Londrina. **Anais do XV EPREM**. Londrina, 2019. Disponível em: <http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/view/1021/854>. Acesso em: 21 jan. 2021.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto & aplicações – ensino médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora UNICAMP, 2011.

JANKVIST, U. T. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 3, p. 235-261, jan. 2009.

LIVIO, M. **Razão Áurea:** a história de Fi, um número surpreendente. Tradução de Marco Shinobu Matsumura. Rio de Janeiro: Record. 2006.

MIGUEL, A. MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: Propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MIGUEL, A.; et al. **História da matemática em atividades didáticas**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

REZENDE, V. **Os conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses no processo escolar**: um estudo com alunos concluintes dos três níveis de ensino. 2013. 209 p. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013. Disponível em: <http://www.pcm.uem.br/uploads/veridiana-rezende--08042013_1434858045.pdf>. Acesso em: 21 jan. 2021.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTOS, A. C. G. **Uma contribuição ao ensino de números irracionais e de incomensurabilidade para o ensino médio**. 2013. 163 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, 2013. Disponível em: <http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/AnaClaudia.pdf>. Acesso em: 03 jan. 2019.

SOUZA, J. R. de. GARCIA, J. da S. R. **#Contato Matemática**. São Paulo: FTD, 2016.

SWETZ, F. J. **Learning Activities from the History of Mathematics**. Portland: J. Weston Walch Publisher, 1994.

TZANAKIS, C.; ARCAVI, A. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In: FAUVEL, John; VAN MAANEN, Jan (Ed.). **History in Mathematics Education:** The ICMI Study. Netherlands: Springer, 2000. p. 201-240.

Recebido em: 25 / 01 / 2021
Aprovado em: 13 / 04 / 2021