BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v8i24.4616

O QUE É ISTO? GEOMETRIAS QUE SE CONSTITUEM NAS POSSIBILIDADES DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

WHAT IS THIS? GEOMETRIES THAT CONSTITUTE IN THE POSSIBILITIES OF EUCLIDIAN GEOMETRY

Carolina Cordeiro Batista[1]; Carolina Yumi Lemos Ferreira Gaciolli[2]

RESUMO

Neste texto, discutimos aspectos da constituição da Geometria Euclidiana como um campo da ciência, tendo como objetivo compreender se as geometrias que se constituem a partir desse campo do conhecimento podem ser consideradas novas. Na busca por tais compreensões, elegemos dois "tipos" de Geometria: a Geometria Dinâmica e a Geometria do Origami e adentramos em um movimento de reflexão de cunho histórico e filosófico, por meio do qual lançamos questionamentos que nos levam a uma compreensão. Olhamos para a Geometria Dinâmica na perspectiva filosófica da fenomenologia, para a qual a dinamicidade pode ser compreendida a partir da ideia de movimento do sujeito e da concepção de intencionalidade. Relativamente à Geometria do Origami, nossa compreensão se deu a partir dos seis axiomas de Huzita e da potencialidade deles para a resolução de situações que não podem ser solucionadas somente por meio da Geometria Euclidiana. À medida que avança, a discussão nos leva à origem da Geometria, isto é, ao modo pelo qual ela se constituiu como um campo científico, bem como à maneira pela qual a Geometria Euclidiana, organizada por meio de um sistema axiomático, favoreceu uma abertura para que outras formas de pensar esse campo da ciência se tornassem possíveis. A partir de nossa análise e discussão, foi possível destacar o modo dessas geometrias de se mostrarem como uma possibilidade para avançar em relação aos conhecimentos da Geometria Euclidiana, quais sejam, a Geometria Dinâmica, tornando explícita a relação de movimento com objetos geométricos, e a Geometria do Origami, constituindo-se por meio de um sistema axiomático.

Palavras-chave: Geometria Dinâmica; Geometria do Origami; Fenomenologia.

ABSTRACT

In this text we discuss aspects about the constitution of Euclidean Geometry as a field of science, aiming to understand whether the geometries that are formed from this field of knowledge can be considered new. In the search for understandings, we chose two "types" of Geometry: Dynamic Geometry and Origami Geometry and entered a movement of reflection of historical and philosophical nature, through which we launched questions that lead us to an understanding. We

[1] Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Expedicionário Dilermando de Oliveira Cornetti, 7, Portal das Colinas, Guaratinguetá, São Paulo, Brasil, CEP: 12516-260. E-mail: carolina.batista@unesp.br.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-0923-647X.

[2] Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP). Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Caminho das Cerejeiras, 158, Quinta das Frutas, Taubaté, São Paulo, Brasil, CEP: 12092-522. E-mail: carolina.graciolli@unesp.br.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3763-4157.

look at Dynamic Geometry in the philosophical perspective of phenomenology, for which dynamics can be understood from the idea of the subject's movement and the conception of intentionality. With regard to Origami Geometry, our understanding was based on the Huzita's six axioms and the potential of these axioms for solving situations that cannot be resolved only through Euclidean Geometry. As it progresses, the discussion takes us to the origin of Geometry, that is, the way in which Geometry was constituted as a scientific field and how Euclidean Geometry, organized by means of an axiomatic system, favored an opening for other ways of thinking about geometry became possible. From our analysis and discussion it was possible to highlight the way of these geometries to show itself as a possibility to advance in relation to the knowledge of Euclidean Geometry, that is, Dynamic Geometry for making explicit the relation of movement with geometric objects and Origami Geometry by its constitution by means of an axiomatic system.
Keywords: Dynamic Geometry; Origami Geometry; Phenomenology.

Introdução

A Geometria Euclidiana surgiu com o matemático grego Euclides, por volta do ano 300 a.C. Para Irineu Bicudo (2009), assim como acontece com vários matemáticos da Grécia Antiga, pouco se sabe sobre Euclides. No entanto, o autor pôde concluir, por meio dos relatos de Eudemo, que "Euclides recebeu o seu treinamento matemático dos discípulos de Platão em Atenas" e que viveu no tempo do primeiro Ptolomeu, o qual teve seu reinado entre 306 a.C. e 287 a.C (BICUDO, I., 2009, p. 42). Euclides escreveu diversas obras científicas, sendo "Os Elementos" a mais famosa dentre elas, uma vez que, segundo Bongiovanni e Jahn (2010), é o texto completo mais antigo de que temos conhecimento. Tal obra, que fundamenta a Geometria Euclidiana, é constituída por 13 livros que reúnem resultados de matemática elementar desde Tales até Euclides. O modo como as construções são feitas pela descrição dada em "Os Elementos" faz com que a Geometria Euclidiana também seja conhecida como a geometria da régua e do compasso não graduados, pois elas podem ser realizadas por meio destes instrumentos (MONTEIRO, 2008).

A obra de Euclides foi escrita, aproximadamente, em 300 a.C., mas ainda hoje encontra-se presente nas listas de referências dos cursos de Matemática. Ávila (2001) destaca que isso se deve ao fato de a mesma possuir um valor histórico, pois o modo de trabalhar Geometria não apresentava, naquela época, interesses em uma Matemática totalmente prática e isso levou à necessidade de torná-la mais teórica. Foi Euclides "o primeiro a ordenar e estruturar todo esse conhecimento como uma ciência, isto é, a assumir um pequeno conjunto de definições e noções comuns e então demonstrar teoremas relacionados com esses mesmos axiomas e definições" (MONTEIRO, 2008, p. 66).

Em contrapartida, o modelo de Euclides levou os matemáticos da época a interrogarem se, em comparação com os demais, o seu quinto postulado[3] poderia realmente ser considerado como tal. Esse pensar gerou diversas tentativas de demonstrá-lo, para que se tornasse um teorema, de modo que pudesse ser deduzido a partir dos outros postulados. Bongiovanni e Janh (2010) destacam que essas tentativas geraram resultados

[3] Em seu quinto postulado, também conhecido como postulado das paralelas, Euclides afirma: "e, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos" (EUCLIDES, 2009, p. 98).

equivalentes, como, por exemplo, aquele que determina que “retas paralelas são equidistantes”.

Após séculos orientando discussões de pesquisadores interessados em Geometria, novas possibilidades de pensá-la foram se constituindo. Detoni (2019, p. 79) destaca que, após “séculos assentada placidamente em suas poderosas bases euclidianas[,] [...] vemos se constituindo novos olhares sobre diversas realizações alternativas que vão convergindo para uma nova e necessária compreensão”. A fala do autor nos faz questionar: será que esse novo olhar levou à constituição de novas geometrias ou é apenas uma referência aos distintos modos de pensar a mesma Geometria Euclidiana?

O autor ressalta ainda que “a problemática da Geometria se inicia nela mesma, em sua potencial riqueza de escolhas e tratamentos” (DETONI, 2019, p. 78). Logo, não estaria implícito, em sua natureza, um modo de se abrir a novas possibilidades? A partir desses questionamentos, trazemos uma discussão de cunho histórico e filosófico, por meio de reflexões relativas à Geometria Dinâmica e à Geometria do Origami, com o objetivo de compreender se há a possibilidade de constituir novas geometrias a partir da Euclidiana.

Compreendendo a Geometria Dinâmica

Com o questionamento de ideias consideradas válidas pela Geometria Euclidiana, postulados e proposições abriram-se a novas indagações ou a novos olhares. Essa abertura possibilitou outros modos de pensar a Geometria. De acordo com Detoni (2019, p. 79), nesse contexto, se:

> Por um lado, temos as chamadas geometrias não-euclidianas, oriundas, principalmente, da quebra da visão absoluta acerca do famoso quinto postulado euclidiano e se organizando durante todo o século XIX. Por um outro lado, temos as transformações geométricas incorporadas às técnicas operatórias e repertório de espacialização, gerando novas relações e novos objetos científicos.

Na fala do autor, dois pontos se destacam em relação à constituição desses novos conhecimentos. O primeiro diz respeito à origem das chamadas geometrias não euclidianas, possibilitada principalmente pelo questionamento acerca do quinto postulado de Euclides, que levou à “ideia original” de outra geometria, a partir das tentativas de tornar esse postulado um teorema. Com base nessa “ideia original”, entendemos o segundo ponto a ser destacado, o qual nos leva a refletir acerca de novos modos de pensar a Geometria.

Podemos, a princípio, compreender que o movimento de questionar a Geometria Euclidiana levou à constituição de novas geometrias, assumindo como novas as chamadas geometrias não euclidianas. É possível pensar também acerca dos “novos conhecimentos geométricos” constituídos, como “as transformações geométricas incorporadas às técnicas operatórias e repertório de espacialização” (DETONI, 2019, p. 79).

As transformações, embora já estivessem contempladas nos conhecimentos constituídos na Geometria Euclidiana, são tratadas por ela com “um apelo tácito sensualista, sem metodizar as possibilidades de movimentos” (DETONI; PINHEIRO, 2016, p. 235) e, portanto, a ideia de trabalhar com tais transformações geométricas como um fenômeno espacializado lança à Geometria Euclidiana um novo olhar, pois torna explícita a possibilidade que se abre no espacializar, a possibilidade de uma relação com o movimento, sendo esta uma experiência do sujeito.

Na relação com o movimento, ao perceber o móvel em movimento, o sujeito segue reorganizando seu olhar, compreendendo-o no espaço, de forma contínua, mediando sua percepção pelo corpo-próprio (DETONI, 2000). Nessa compreensão, o corpo-próprio não é um objeto que pode ser decomposto em partes para ser estudado e compreendido por distintas áreas da ciência, como, por exemplo, pela Biologia, mas é um todo que vivencia suas experiências, voltando-se para o mundo. O corpo, que também é corpo-encarnado, “é uma totalidade vivida em sua inteireza ao locomover-se intencionalmente *em direção a*..., ao perceber-se estando ‘ao mundo’ com os outros seres e entes. Realiza a existência, expressando o que sente, ama, rejeita” (BICUDO, M., 2004, p. 81 – grifo do autor).

Compreendido desse modo, o corpo-próprio sempre é, não possui momentos vazios, visto que não pode ser entendido como a junção de momentos discretos ou cenas estáticas. Esse espaço percebido pelo corpo-próprio:

> é caracteristicamente geométrico, na medida em que a geometria me dá pressupostos puros de dimensão e orientação com os quais tenho uma base estrutural transparente e homogênea para enquadrar os objetos. Tenho, assim, a possibilidade uniperspectival de conformar as coisas nesse quadro que dôo ao mundo: espacializo esse mundo (DETONI, 2000, p. 49).

Logo, o sujeito possui um modo natural de perceber o mundo, buscando compreender os objetos que o constituem em função de suas características geométricas.

O sujeito espacializa o mundo à medida que é e se percebe como um ser em movimento. É uma relação dinâmica.

Relativamente à Geometria Dinâmica, Pinheiro, Bicudo e Detoni (2019, p. 265) afirmam que é:

> aquela ambientada no computador ou equipamento similar com sua potencialidade, que permite construir, explorar e conhecer propriedades de uma figura geométrica disponíveis na interface de um *software*, por meio da visualização do movimento de objetos pertencentes à figura.

Nesse sentido, o que caracteriza uma Geometria como dinâmica é que sua condição de ser ambientada em um computador ou outro recurso tecnológico tem como presença uma potencialidade. Essa potencialidade pode ser compreendida como as possibilidades que se abrem ao sujeito que produz conhecimento de Geometria com o computador, "construindo, explorando e conhecendo" representações de objetos geométricos. Esses verbos trazem explícita uma ideia de movimento que pode ser compreendida somente como sendo movimento do sujeito, pois, ainda que esteja dada na natureza de um *software*, sua potencialidade para algo sempre dependerá da disposição do sujeito para que haja uma interação.

As possibilidades se abrem por meio da visualização do movimento dos objetos geométricos pelo sujeito. Logo, a Geometria Dinâmica pode favorecer o desenvolvimento de habilidades, como a visualização, que podem, por exemplo, levar à reflexão das ações, para revê-las ou pensar nos próximos passos no movimento com o *software*.

Assim, falar sobre a Geometria Dinâmica nos leva à ideia das possibilidades que se abrem ao sujeito, seja para se lançar ao movimento com os objetos geométricos representados, seja para o desenvolvimento de habilidades. A Geometria Dinâmica pode abrir possibilidades, posto que convida a habitar um mundo de vivências do que se mostra ao sujeito na tela do computador, pois tudo o que se mostra é um horizonte de possibilidades (PINHEIRO; BICUDO; DETONI, 2019).

Nesse mundo de vivências, a dinamicidade se dá quando há um encontro entre o que é solicitado e o que é realizado no movimento do sujeito, o qual, abrindo-se às possibilidades, dispondo-se a interagir com o *software*, coloca-se em movimento com os objetos dados na tela do computador. Nesse encontro, que é percebido pelo corpo-próprio, há uma "intencionalidade de atentar-se ao que essa realização [do movimento] mostra na interface do software", buscando estudá-la e compreendê-la (PINHEIRO; BICUDO;

DETONI, 2019, p. 274). Desse modo, a compreensão da dinamicidade passa pela concepção de intencionalidade do sujeito, subsidiada pela fenomenologia.

A intencionalidade é o que possibilita à consciência dirigir-se para algo, a fim de que se possa entrar em contato ou estabelecer relações com os objetos junto aos quais vivenciamos nossas experiências no mundo (MARTINS; BOEMER; FERRAZ, 1990). Ela está presente não só no atentar-se à realização do movimento, mas também em todos os outros momentos da vivência do sujeito com o *software*, dado que "o sujeito da ação [...] intencionalmente atualiza em/com movimento o que lhe é dado como potencialmente dinâmico" (PINHEIRO; BICUDO; DETONI, 2019, p. 266), de modo que, se não houver uma intencionalidade para mover um objeto; atualizar-se em/com movimento de acordo com o que percebe na tela do computador; estar atento, buscando interpretar e compreender o que vê, o *software* é somente um objeto estático, não pode se lançar sozinho a um horizonte de possibilidades. Portanto, a intencionalidade do sujeito é condição necessária para que uma Geometria se constitua dinâmica.

Intencionado ou voltado para o que é feito, o sujeito em movimento com o *software* de Geometria Dinâmica faz descobertas. No entanto, nelas, "os sentidos que se abrem ao sujeito apontam indícios a respeito da intencionalidade do programador de programar algo que espera que aquele que está com a máquina possa, intencionalmente, fazer" (PINHEIRO, BICUDO, DETONI, 2019, p. 268), isto é, por mais aberta que seja a tarefa a que um aluno direcione sua atenção (ou para a qual se volte), ele sempre vai se encontrar limitado pelas funcionalidades do *software* com o qual esteja lidando, como, por exemplo, o GeoGebra. Além das limitações da programação do *software*, há as imposições dos próprios axiomas e das propriedades da Geometria Euclidiana, mas, mesmo assim, há possibilidade de se produzir "conhecimentos não só novos para eles [alunos] como surpreendentes para seus professores, ainda que dentro do propósito que estes organizavam atividades abertas" (DETONI, 2019, p. 93), pois enquanto a Geometria Euclidiana deixa:

> implícitos os movimentos, as transformações, a desenvoltura do pensamento que assim espacializa, para deixar apenas aparente seus resultados. Consonante à questão da presença (uma quase ausência) de um pensamento dinâmico, [sendo que] esse modo é hegemônico em nossas salas de aula e em nossos livros didáticos (DETONI, 2019, p. 79).

A Geometria Dinâmica pode ser compreendida como um novo olhar, que traz ao foco o "como se dá" uma transformação, seu movimento de constituição e não apenas seu resultado.

Diante do exposto, a fim de que possamos entender se esse novo olhar que apresenta a ideia de movimento é suficiente para que a Geometria Dinâmica se constitua como uma nova geometria, ainda precisamos compreender o modo pelo qual se dá a constituição de uma nova geometria para análisar a Geometria Dinâmica à luz dessa compreensão. Essa discussão será apresentada nas próximas seções.

A Geometria do Origami

O origami, ou seja, a arte de dobrar papéis, vem sendo utilizado para resolver problemas de Matemática há bastante tempo. Há registros de que o ato de dobrar o papel já era utilizado para pensar em atividades de raciocínio lógico por volta do ano de 1721, data de publicação do livro “Wakoku Chiyekurabe” (RODRIGUES, 2015). Rêgo, Rêgo e Gaudêncio (2003) apontam que o origami pode auxiliar em vários aspectos relativos à Geometria, entre eles: na construção de conceitos matemáticos; na discriminação de formas, posições e tamanhos; na interpretação de diagramas, por meio de linguagem simbólica; no desenvolvimento do raciocínio lógico; na apresentação de termos geométricos, por meio da descrição dos passos necessários para uma dobradura, e na exploração de padrões geométricos. Os autores destacam que:

> O Origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que os cercam. Com uma atividade manual que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Arte (RÊGO; RÊGO; GAUDÊNCIO, 2003, p. 18).

De acordo com Rancan (2011, p. 18), a Geometria possibilita desenvolver competências como experimentar, representar, argumentar e, “ao repensar a prática pedagógica de Geometria, o Origami surge [...] como um instrumento instigante para a revitalização dessa prática”. Conforme compreendemos pela fala dos autores (RANCAN, 2011; RÊGO; RÊGO; GAUDÊNCIO, 2003), o origami é um recurso metodológico que pode favorecer o desenvolvimento de habilidades e a compreensão de conteúdos de Matemática, permitindo, portanto, abrir possibilidades para a discussão de novos conhecimentos relativos à Geometria. Sendo assim, seguindo suas ideias, é possível considerar que a dobradura é relevante para o trabalho com conteúdos de Geometria do currículo escolar, tendo em vista que este consiste, quase exclusivamente, na Geometria Euclidiana, isto é, uma geometria com origami, sendo o origami outra forma de abordar a Geometria Euclidiana.

Por sua vez, Monteiro (2008, p. 4) apresenta uma perspectiva diferente, que se refere a uma geometria própria dos origamis, ou seja, uma nova geometria, denominada "Geometria do Origami", pois "a criação dos modelos no origami não depende da inspiração, mas sim de perceber os conceitos e as limitações da geometria euclidiana, propriedades das figuras geométricas, simetrias, ângulos, rectas, comunicação matemática, entre outros". Desse modo, a Geometria do Origami possibilitaria alternativas para as limitações da Geometria Euclidiana, como, por exemplo, a resolução de problemas não demonstrados somente com régua e compasso não graduados.

Freitas e Nogueira (2016, p. 11) consideram que:

> a geometria do Origami desenvolvida a partir da década de 70 fundamenta a técnica que pode ser muito eficaz na resolução de diversos problemas matemáticos. O axioma 6 é o diferencial que permite solucionar questões que outrora não eram possíveis com os instrumentos euclidianos. Este item torna possível a resolução de equações cúbicas como a trissecção do ângulo e o problema deliano.

Os autores enfatizam que o axioma 6 diferencia a Geometria do Origami da Geometria Euclidiana. Então, segundo Monteiro (2008) e Freitas e Nogueira (2016), os origamis possuem uma geometria própria, diferente da Euclidiana. Mas o que significa ser diferente da Geometria Euclidiana? Será que podemos considerar a Geometria do Origami uma nova geometria ou estamos somente trabalhando a Geometria Euclidiana por meio dos origamis, caracterizando-se, assim, uma geometria *com* origami?

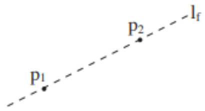
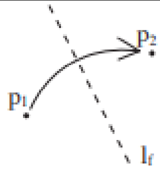
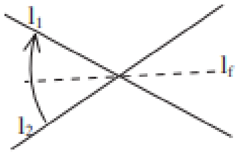
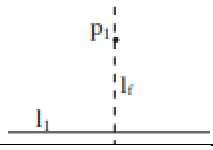
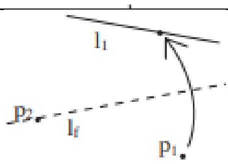
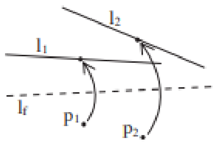
Buscando compreensões a este respeito, trazemos os axiomas de Huzita[4] (Tabela 1), que apresentam seis operações básicas, capazes de descrever qualquer dobra possível em um origami "plano"[5] (RODRIGUES, 2015). Destacaremos a não equivalência do axioma 6 com construções da Geometria Euclidiana.

---

[4] Humiaki Huzita (1924 – 2005), matemático japonês-italiano que deu importantes contribuições para a Geometria do origami e é responsável por formular os primeiros axiomas de Huzita-Hatori (MONTEIRO, 2008).

[5] Plano está entre aspas, pois devemos desconsiderar a espessura do papel.

Tabela 1 – Axiomas de Huzita

1. Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que os contém.	
2. Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2, existe apenas uma dobra capaz de torná-los coincidentes.	
3. Dadas duas retas distintas, l_1 e l_2, existem no máximo duas dobras capazes de colocar uma reta sobre a outra. Se l_1 e l_2 são paralelas ou o ponto de interseção encontra-se fora do papel, então, a dobra é única.	
4. Dados um ponto P_1 e uma reta l_1, existe apenas uma dobra perpendicular a l_1 que passa por P_1.	
5. Dados dois pontos, P_1 e P_2, e uma reta l_1, se a distância entre P_1 e P_2 for maior ou igual à distância de P_2 a l_1, existe pelo menos uma dobra capaz de fazer com que P_1 incida em l_1 de forma a passar pelo ponto P_2. Se a distância de P_1 a P_2 for igual à distância de P_2 a l_1, então, a dobra é única. Caso contrário, existem duas dobras possíveis.	
6. Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2, e duas retas não paralelas, l_1 e l_2 (se paralelas, a distância entre as mesmas não deve ser superior à distância entre os pontos), existe uma dobra que faz, simultaneamente, com que P_1 incida em l_1 e P_2 em l_2.	

Fonte: Rodrigues (2015) e Lang (2010).

Lang (2010) explica que todos os números construtíveis com régua e compasso não graduados são passíveis de serem escritos em termos de uma equação quadrática ou de equações de ordem superior, que possam, por sua vez, ser reduzidas a equações quadráticas. O autor também acrescenta que, por meio dos axiomas 1 a 5, somos capazes de resolver qualquer equação quadrática, ou seja, tudo que se realiza por meio da Geometria Euclidiana pode ser feito também com a Geometria do Origami. A vantagem desta última é de alinhar dois pontos e duas retas diferentes, isto é, a operação realizada pelo axioma 6.

Se o axioma 6 é o que diferencia as duas geometrias, o que podemos, então, realizar com a Geometria do Origami que é impossível com a Geometria Euclidiana? Esta pergunta é respondida por Lucero (2019), o qual discute e demonstra a possibilidade de encontrar a solução de equações cúbicas arbitrárias por meio do axioma 6. Pode-se concluir tal fato, pois o axioma é equivalente a dobrar retas tangentes a duas parábolas, e não são parábolas quaisquer, são aquelas que têm como reta diretriz l_1 e l_2 e foco P_1 e P_2, respectivamente. Sendo assim, por meio da geometria regida pelos seis axiomas de Huzita, podemos resolver equações cúbicas, o que é impossível por meio da Geometria Euclidiana.

Segundo Hull (2020), os problemas da duplicação do cubo, da trissecção do ângulo ou da construção de heptágonos regulares envolvem resolver equações do terceiro grau. Logo, o axioma 6 é o que nos permite dizer que temos uma Geometria do Origami que vai além da Geometria Euclidiana. Mas será que isso faz com que a Geometria do Origami seja uma nova geometria?

Isso porque, mesmo considerando a Geometria do Origami uma possibilidade de avançar para além da Euclidiana, ela ainda trata dos mesmos objetos geométricos. Por exemplo, o quadrado continua sendo o quadrado da Geometria Euclidiana, isto é, um polígono com quatro lados iguais e quatro ângulos retos, e, em ambas, considera-se que, por dois pontos, passa uma única reta e se assume o postulado das paralelas, diferentemente das geometrias não euclidianas, em que precisamos negar tal postulado.

Portanto, para podermos avançar em nossa discussão e dizer se o axioma 6 pode fazer com que a Geometria do Origami seja considerada nova, também será necessário analisá-la de acordo com a compreensão de como uma nova geometria é constituída. Trazemos essa compreensão na próxima seção.

Afinal... como se constitui uma nova geometria?

Refletir sobre como se constitui uma nova geometria pode ser uma abertura para adentrarmos momentos históricos anteriores à constituição da Geometria como um campo de conhecimento científico, para, assim, pensarmos no modo como ela teve seu significado organizado pelos primeiros geômetras e em como se deu a sua origem.

Para tornar claras nossas compreensões sobre a constituição de novas geometrias, nossa discussão se dará, inicialmente, com o olhar voltado para a origem da Geometria, conforme entendido por Husserl (2006). Para o autor:

> compreendemos nossa Geometria, avaliável para nós por meio da tradição (nós a aprendemos, e assim nossos professores), como sendo uma aquisição total de realizações espirituais que cresce pelo trabalho contínuo de novos atos espirituais em novas aquisições. Sabemos das formas iniciais transmitidas bem como aquelas das quais surgiu; mas com toda forma a referência a uma anterior

> é repetida. Claramente, então, a Geometria deve ter surgido a partir da primeira aquisição, a partir das primeiras atividades criativas (HUSSERL, 2006, p. 5).

Com isso, compreendemos que o modo pelo qual temos acesso à Geometria pode ser entendido na perspectiva da tradição. É uma tradição, considerando que a aprendemos, nossos professores aprenderam-na, os professores de nossos professores aprenderam-na e, do mesmo modo, nossos alunos também a aprenderão. Assim, conhecimentos de Geometria são ensinados e aprendidos de geração em geração, durante vários séculos. Nessa tradição, conhecimentos novos (digamos, de um dado estágio) são sempre criados a partir de referências anteriores, isto é, de resultados de estágios anteriores que, em algum momento histórico, foram validados, tornando-se objetivos. Do mesmo modo, o "ensinar" sempre é feito se reportando a uma referência anterior.

Nesse exercício de, a partir de um significado, retornar a significados anteriores que lhe deram origem, sempre haverá uma referência prévia, de modo que se chega às primeiras ideias, dos primeiros geômetras, os quais abriram possibilidades para a Geometria constituir-se como um campo de conhecimento. Portanto, é na historicidade, ainda que implícita, que se dá a compreensão de sua constituição (HUSSERL, 2006), de maneira que, "colocar em evidência a Geometria[,] é [realizar] um descobrimento de sua tradição histórica" (BICUDO, M., 2016, p. 43).

Na compreensão da Geometria como sendo dada na historicidade:

> é da essência dos resultados de cada estágio, não apenas que aquele seu significado ôntico ideal de fato venha mais tarde (que os primeiros resultados) mas que desde que o significado seja fundamentado sobre significado, o significado anterior dá algo da sua validade ao posterior, ele se torna parte deste último, numa certa extensão. Assim, nenhum bloco construído dentro da estrutura mental é auto-suficiente; e nenhum, então, pode ser imediatamente reativado (por si próprio) (HUSSERL, 2006, p. 14).

Isto é, os significados de um dado estágio do conhecimento trazem implícita parte das compreensões relativas àquele significado que lhe deu origem ou que lhe deu validade. Logo, ainda que um significado seja aceito como válido a priori, não é autossuficiente, uma vez que não pode ser reativado, sendo compreendido imediatamente.

Husserl (2006) explicita sua compreensão acerca da reativação de significado, considerando a forma escrita da expressão linguística. Para o autor, a escrita documentada tem um papel importante na reativação de sentido, visto que propicia que comunicações sem endereço pessoal sejam possíveis, despertando significados familiares. Esse despertar se dá de forma passiva e emerge como uma memória mais ou menos clara. No entanto, "o que é passivamente despertado pode ser transformado de volta, por assim dizer, numa atividade correspondente: esta é a capacidade para reativação que pertence originariamente a qualquer ser humano como um ser falante" (HUSSERL, 2006, p. 12), isto é, a estrutura geométrica colocada em palavras, ao mesmo tempo que tem seu significado original transformado pela escrita, permite ao leitor reativar sua evidência. Compreendida desse modo, a linguagem escrita possibilita expressar, simultaneamente, o que é intencionado, o que é falado e o que, por meio da tradição, mantém-se na historicidade (BICUDO, M., 2016).

De acordo com Husserl (2006), a reativação se dá, por exemplo, quando ouvimos ou lemos uma sentença. A princípio, ela se torna imediatamente nossa opinião, mostrando-se para nós como válida, como o nosso significado. No entanto, se há a intenção de articular as palavras ouvidas ou lidas, extraindo as sentenças e "separando do que foi recebido vaga e passivamente como uma unidade, os elementos de significado [...] [é trazida,] assim, a validade total à realização ativa num novo modo à base de validades individuais" (HUSSERL, 2006, p. 12), isto é, o que era passivo passa a ser uma atividade ativa, em que a reativação de significado se dá. Nessa atividade, mostra-se a diferença entre tornar uma expressão evidente por reativar seu significado e compreendê-la de forma passiva.

Cabe ressaltar que o autor refere-se à origem da Geometria como sendo um modo de pensar que se deu antes da constituição dela como um campo científico. Mas, se compreendermos sua origem nessa perspectiva, considerando sua historicidade, em que, desde os primeiros geômetras, resultados válidos dão origem a novos significados, mas que só podem ser reativados se voltarmos o olhar para as suas referências, não estaríamos considerando que todo o campo de conhecimentos da Geometria é único? Nesse caso, tudo o que conhecemos como Geometria são, na verdade, estágios mais evoluídos da mesma Geometria Euclidiana? Então, não é possível existir novas geometrias? Mas e quanto às outras geometrias, as chamadas não euclidianas?

Relativamente às geometrias não euclidianas, para Feitosa e Locci (2001, p. 71), o trabalho matemático se desenvolve como um modelo dedutivo que é validado por meio da demonstração, mas "esta característica não nega o fato de o matemático usar a intuição e a observação em sua atividade, porém, a forma última de seu trabalho é dedutiva e abstrata". Contudo, não é possível realizar a demonstração de todas as sentenças, é preciso que haja um ponto de partida. Por isso, Euclides parte de cinco postulados e foi a tentativa dos geômetras de demonstrar um deles, o postulado das paralelas, como mencionado, que levou aos poucos "a uma nova concepção da matemática [no caso, da geometria,] em que todos os elementos de uma teoria deveriam ser cuidadosamente explicitados" (BONGIOVANNI; JAHN, 2010, p. 39).

Bongiovanni e Jahn (2010) afirmam que, no século XIX, diversos matemáticos passaram a realizar estudos rigorosos sobre a Geometria Euclidiana. A esse respeito, os autores lembram, por exemplo, que Legendre (1752-1833) tratou a Geometria de uma forma mais axiomática, indo contra uma geometria intuitiva, enquanto Lacroix (1765 – 1843) escreveu um livro tentando realizar o equilíbrio entre o rigor e a aceitação de verdades evidentes. No entanto, ressaltam que a descoberta das chamadas Geometrias não euclidianas ocorreu em 1829, quando Lobatchevsky (1792 – 1856) negou o postulado das paralelas, afirmando que, por um ponto fora de uma reta, passam pelo menos duas retas paralelas.

Kaleff e Nascimento (2004, p. 14), por sua vez, apontam que, para que uma geometria seja chamada de não euclidiana, "é preciso que em seu conjunto de axiomas, pelo menos um dos axiomas da Geometria Euclidiana não seja verdadeiro". Entretanto, outras definições para geometrias não euclidianas podem ser encontradas, como, por exemplo, a definição de Robold (1992). Para o autor, geometrias não euclidianas são aquelas que possuem "um sistema geométrico construído sem a ajuda da hipótese euclidiana das paralelas e contendo uma suposição sobre paralelas incompatível com a de Euclides" (ROBOLD, 1992, p. 45), isto é, uma geometria é não euclidiana se ela contradiz o quinto postulado e não qualquer um dos cinco.

Nesse sentido, se olharmos para geometrias como a Hiperbólica e a Esférica, em ambas, o postulado substituído é o das paralelas. Já a Geometria do Taxista também é não euclidiana, apesar de não contradizer o axioma das paralelas. Mas e quanto à Geometria Dinâmica e à Geometria do Origami, pode-se considerar que são novas geometrias?

Considerações Finais

A discussão realizada neste texto apresenta algumas compreensões dentre um horizonte de possibilidades que se abriu ao longo de vários séculos, em que pesquisadores vêm se debruçando em estudos para compreender a constituição da Geometria como um campo da ciência. Para expor nossas considerações, retornaremos aos questionamentos lançados ao longo do texto ao tentarmos compreender se as Geometrias Dinâmica e do Origami são dadas como novas dentro do campo da Geometria.

Compreendemos que a Geometria Dinâmica possibilita tornar explícita a relação do sujeito com o movimento, por meio de um *software* (DETONI; PINHEIRO, 2016). Assim, se olharmos para a sua relação com a Geometria Euclidiana, compreendemos que essa característica permite avançar para além das possibilidades desta última, isto é, possibilita produzir "novos conhecimentos".

Se olharmos pelo ponto de vista das geometrias não euclidianas e analisarmos o que pesquisadores (KALEFF; NASCIMENTO, 2004; ROBOLD, 1992) definem como necessário para que uma geometria seja classificada como nova, considerando como novas as não euclidianas, a Geometria Dinâmica não é uma nova geometria, pois, apesar de explicitar possibilidades que são implícitas na Euclidiana, ela não é organizada por um sistema geométrico com axiomas e definições. Além disso, também não nega axiomas da Geometria Euclidiana, uma vez que um *software* de Geometria Dinâmica como, por exemplo, o GeoGebra, tem suas funcionalidades limitadas pela intencionalidade do programador que, muitas vezes, refere-se a tais axiomas e definições. Logo, nem toda geometria com conhecimentos que avançam para além das possibilidades da Geometria Euclidiana é uma nova geometria.

Com relação à Geometria do Origami, poderíamos relacionar seus axiomas aos postulados de Euclides para investigar se se trata de uma geometria não euclidiana. Porém, para tanto, seria necessário fazer um estudo das sentenças e de suas equivalências em cada uma delas, uma vez que, como afirmam Kallef e Nascimento (2004), uma geometria não euclidiana deve, ao menos, contradizer um dos postulados formulados por Euclides. Mesmo assim, considerando que a Geometria do Origami possibilita resolver equações cúbicas arbitrárias por meio do axioma 6, o qual não possui equivalência com qualquer axioma ou postulado da Geometria Euclidiana, podemos afirmar que novas possibilidades, além das abordadas pela Geometria de Euclides, abrem-se para o trabalho com os origamis, com conhecimentos que avançam em relação à Geometria Euclidiana.

Por sua vez, se olharmos para a Geometria Dinâmica e para a Geometria do Origami do ponto de vista da origem da Geometria (HUSSERL, 2006) e de como seu pensamento vem sendo organizado desde os primeiros geômetras, em que cada estágio de conhecimento foi se constituindo a partir de resultados validados anteriormente, compreendemos que ela se constitui como um modo de pensar a Matemática, assim como a Álgebra, por exemplo. E, nesse modo, há uma única Geometria, pois todo o campo de conhecimentos dessa área, por meio do qual a ensinamos e a aprendemos, tem origem no mesmo pensar, dos primeiros geômetras, que tornaram possível que ela se constituísse como um campo de conhecimento científico.

Diante do exposto, compreendemos as Geometrias Dinâmica e do Origami como possibilidades para a reativação de significados da Geometria Euclidiana. Essa compreensão se dá porque, na Geometria Dinâmica, o sujeito retoma conhecimentos à medida que “intencionalmente atualiza em/com movimento o que lhe é dado como potencialmente dinâmico” (PINHEIRO; BICUDO; DETONI, 2019, p. 266) na tela do computador, e, na Geometria do Origami, lança-se o movimento de dobrar um pedaço de papel, com a finalidade de elaborar construções geométricas. Logo, ambas abrem possibilidades para o pensar geométrico, independente do tipo de instrumento utilizado (régua e compasso ou papel), oportunizando a construção de conhecimentos de Geometria.

Referências

ÁVILA, G. Euclides, Geometria e Fundamentos. **Revista Professor de Matemática (RPM)**, São Paulo, v. 1, n. 45, p. 01-09, 2001. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/45/1.htm>. Acesso em: 21 fev. 2021.

BICUDO, I. Introdução. In: EUCLIDES. **Os Elementos/Euclides**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009. p. 15-94.

BICUDO, M. A. V. O Pré-Predicativo na construção do conhecimento geométrico. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Orgs.). **Educação Matemática - pesquisa em movimento**. 1ed. São Paulo: Cortez Editora, 2004. p. 77-91. Disponível em: <http://www.mariabicudo.com.br/resources/CAPITULOS_DE_LIVROS/O%20pr%C3%A9-predicativo%20na%20constru%C3%A7%C3%A3o%20do%20conhecimento.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2021.

BICUDO, M. A. V. Sobre História e Historicidade em Edmund Husserl. **Cadernos da EMARF, Fenomenologia e Direito**, Rio de Janeiro, v. 9, n. 1, p. 21-48, 2016. Disponível em: <http://www.mariabicudo.com.br/resources/ARTIGOS/Sobre%20historia%20e%20historicidade%20em%20Edmund%20Husserl.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2021.

BONGIOVANI, V.; JAHN, A. P. De Euclides às geometrias não euclidianas. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, São Paulo, v. 1, n. 22, p. 37-51, 2010.

DETONI, A. R. **Investigações acerca do espaço como modo da existência e da Geometria que ocorre no pré-reflexivo**. 2000. 275 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2000.

DETONI, A. R.; PINHEIRO, J. M. L. Compreensões Filosóficas para Uma Alternativa do Pensamento Geométrico. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 11, s. n., p. 232-243, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11nespp232>. Acesso em: 19 fev. 2021.

DETONI, A. R. Apontamentos da importância de um ambiente dinâmico para práticas geométricas. **Educação matemática sem Fronteiras**, Chapecó, v. 1, n. 1, p. 77-95, 2019. Disponível em: <https://periodicos.uffs.edu.br/index.php/EMSF/article/view/10620>. Acesso em: 15 fev. 2021.

EUCLIDES. **Os Elementos/Euclides**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009. 600 p.

FEITOSA, H. de A.; LOCCI, V. O fazer matemático. **Mimesis**, Bauru, v. 22, n. 3, p. 63-81, 2001. Disponível em: <https://wwwp.fc.unesp.br/~hsilvestrini/O%20fazer%20matematico.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2021.

FREITAS, A. C.; NOGUEIRA, J. R. Origami: o uso como instrumento alternativo no ensino da geometria. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/8320_4107_ID.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2021.

HULL, T. C. **Origametry**: Mathematical Methods in Paper Folding. New York: Cambridge University Press, 2020. 332 p.

HUSSERL, E. A origem da geometria. Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo. SE&PQ – Sociedade de estudos e pesquisa qualitativos, São Paulo, 2006, p. 1 – 34.

KALEFF, A. M.; NASCIMENTO, R. S. Atividades introdutórias às geometrias não-euclidianas: o exemplo da geometria do táxi. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, v. 1, n. 44, p. 13-42, 2004. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000011892.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2021.

LANG, R. J. **Origami and Geometric Constructions**, 2010. Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/aa2d/e2db35a0dcaa6ab929c95ef9e0168f14659c.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2019.

LUCERO, J. C. Existence of a Solution for Beloch's Fold. **Mathematics Magazine**, Beloit, v. 92, n. 1, p. 24-31, 2019. Disponível em: <https://cic.unb.br/~lucero/papers/existBelochMM_AM.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2021.

MONTEIRO, L. C. N. **Orígamí**: história de um geometría axíomátíca. 2008. 111 f. Tese (Mestrado em Matemática para o Ensino) – Departamento de Matemática, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008. Disponivel em: <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/1309>. Acesso em: 23 fev. 2021.

MARTINS, J.; BOEMER, M. R.; FERRAZ, C. A. A Fenomenologia como Alternativa Metodológica para Pesquisa – Algumas Considerações. **Cadernos de Estudos e Pesquisa Qualitativos -** Caderno 1, São Paulo, v. 1, n. 1, p. 33-47, 1990. Disponível em <https://www.sepq.org.br/cadernos>. Acesso em: 5 abr. 2020.

PINHEIRO, J. M. L.; BICUDO, M. A. V.; DETONI, A. R. Um Olhar Fenomenológico à Geometria Dinâmica. **Educ. Mat. Pesq**, São Paulo, v. 21, n. 2, p. 264-287, 2019. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/41408>. Acesso em: 10 out. 2019.

RANCAN, G. **Origami e Tecnologia**: investigando possibilidades para ensinar Geometria no ensino fundamental. 2011. 80 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Faculdade de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <https://repositorio.pucrs.br/dspace/handle/10923/3101>. Acesso em: 23 fev. 2021.

RÊGO, R. G. do.; RÊGO, R. M.; GAUDÊNCIO, S. J. A. **Geometria do Origami**: atividades de ensino através de dobraduras. João Pessoa, PA: UFPB, 2003. 148 p.

ROBOLD, A. I. Geometria não euclidiana. In: EVES, H. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**: geometria. São Paulo: Atual, 1992. p. 1-72.

RODRIGUES, B. M. B. **O estudo das cônicas através do Origami**. 2015. 132 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/25833/25833_1.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2021.

Recebido em: 15 / 01 / 2021
Aprovado em: 13 / 04 / 2021