EQUAÇÕES QUADRÁTICAS: UMA NOVA FÓRMULA RESOLUTIVA COM UMA PROPOSTA DIDÁTICA

QUADRATIC EQUATIONS: A NEW RESOLUTIVE FORMULA WITH A DIDACTIC PROPOSAL

Fabius Bonnet [1]
Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA (Departamento de Matemática)
Centro Universitário Inta - UNINTA (Engenharia de Produção)

Resumo
Sabemos que a maioria dos tópicos matemáticos ensinados na escola são esquecidos pelos alunos, mas nem tudo. Por exemplo, todo aluno do ensino médio recorda que estudou equações do 2º grau, pois quando é interrogado lembra dizendo: "Usa aquela fórmula do delta" outros dizem: "Aplica a fórmula de Bhaskara." Na verdade, essa fórmula está arraigada à mente de alunos e ex-alunos porque todo professor ensina tais equações usando a fórmula de Bhaskara, e, além disso, a maioria pensa que é o único método para resolver as equações quadráticas completas. Contrariando esse pensamento, o objetivo deste artigo é apresentar uma *nova fórmula resolutiva* e também uma *proposta didática* adequada à mesma. Esta nasceu há duas décadas e costumo chamá-la de *Proposta histórico-didática*, visto que resulta da história das equações combinada com uma *conjectura didática*. Nesse contexto acadêmico, creio que vale dizer que a conjectura eu a formulei e defendi (1995) numa dissertação de Mestrado em Educação Matemática na UNESP, enquanto a nova fórmula foi uma simples redescoberta (2000) quando eu analisava os vários métodos de resoluções de equações quadráticas e cúbicas usados por Pacioli, Tartaglia e Cardano, matemáticos do século XVI. Por outro lado, a referida proposta didática foi lentamente elaborada, na medida em que eu reconhecia os obstáculos epistemológicos tratados na conjectura. Finalmente, ela consolidou-se em 2003 no trabalho de conclusão de curso (TCC) de um aluno de Graduação em Matemática da Universidade estadual Vale do Acaraú - UVA. Três anos depois ela foi aplicada em sala de aula. É que a proposta foi transformada em monografia de Especialização em Didática da Matemática pelo Centro Universitário Inta - UNINTA, cuja pesquisa consistiu em comparar a aprendizagem dos alunos na resolução de equações quadráticas com duas fórmulas diferentes, mas ensinadas pelo mesmo professor. Os resultados didáticos mostraram que a nova fórmula é mais fácil de ser usada pelo aluno.

Palavras-chave: Ensino; História da Matemática; Equações quadráticas.

[1] fbonnet@uol.com.br

DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.3559

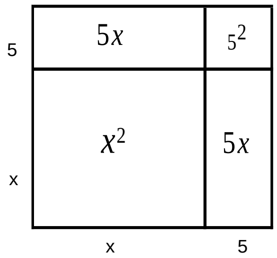
Abstract
We know that most mathematical topics taught at school are overlooked by students, but not everything. For example, every high school student remembers that he studied high school equations, because when he is questioned he remembers saying: "Use that delta formula" others say: "Apply the Bhaskara formula." In fact, this formula is ingrained in the minds of students and alumni because every teacher teaches such equations using the Bhaskara formula, and moreover, most think it is the only method for solving the complete quadratic equations. Contrary to this thinking, the purpose of this article is to present a new resolutive formula and also a suitable didactic proposal. This was born two decades ago and I usually call it the historical-didactic proposal, since it results from the history of equations combined with a didactic conjecture. In this academic context, I believe it is worth saying that the conjecture I formulated and defended (1995) in a Master's dissertation in Mathematics Education at UNESP, while the new formula was a simple rediscovery (2000) when I analyzed the various methods of solving equations quadratic and cubic used by Pacioli, Tartaglia and Cardano, mathematicians of the 16th century. On the other hand, the aforementioned didactic proposal was slowly elaborated, as I recognized the epistemological obstacles dealt with in the conjecture. Finally, it was consolidated in 2003 in the course conclusion work (TCC) of an undergraduate student in Mathematics at the State University Vale do Acaraú - UVA. Three years later it was applied in the classroom. The proposal was transformed into a monograph of Specialization in Didactics of Mathematics by Centro Universitário Inta - UNINTA, whose research consisted of comparing students' learning in solving quadratic equations with two different formulas, but taught by the same teacher. The didactic results showed that the new formula is easier for the student to use

Keywords: Teaching; History of Mathematics; Quadratic equations.

Introdução

Sabemos que a maioria dos tópicos matemáticos ensinados na escola são esquecidos pelos alunos, mas nem tudo. Por exemplo, todo aluno do ensino médio recorda que estudou equações do 2º grau, pois quando é interrogado lembra dizendo: “Usa aquela fórmula do delta” outros dizem: “Aplica a fórmula de Bhaskara.” Essa fórmula está arraigada à mente de alunos e ex-alunos porque todo professor ensina tais equações usando a fórmula de Bhaskara, e, além disso, a maioria pensa que é o único método para resolver as equações quadráticas completas.

Quando era professor de matemática de colégios em Fortaleza por toda a década de 1980 percebi as dificuldades dos alunos de aprenderem a resolver equações quadráticas completas ou incompletas. Desse modo, sempre procurei maneiras de facilitar a aprendizagem da fórmula de Bhaskara, pois sempre dependia da mesma para resolver as equações completas. Em 1983, de minhas frequentes leituras no livro *História da Matemática,* de C. Boyer, eu conheci o método geométrico de completar quadrados, usado pelo matemático árabe aL-Khworismi. Para resolver a equação x² + 10x = 39 ele procedia assim:



$(x + 5)^2 = x^2 + 5x + 5x + 5^2$

$(x + 5)^2 = 39 + 25$

$x + 5 = 8$

$x = 3$

Fiquei encantado com o método, passei a usar nas minhas aulas e divulgar em palestras. Hoje o método e muito conhecido pelos professores, mas 1983 era uma novidade. Mas esse método de aL-Khworizmi era limitado, pois só poderíamos montar quadrados nas equações com raízes positivas. Nas minhas tentativas de melhorar a didática, algebrizei o método, me livrando do desenho do quadrado e da fórmula de Bhascaka, embora continuasse a ensiná-la, pois eu precisava do Delta no estudo do tipo raiz. Mas esse método algébrico só facilitava os cálculos para o aluno num tipo de equação, portanto tive que abandonar. Mas, ao retornar ao assunto, fui levado a redescobrir uma *nova fórmula resolutiva para equações quadráticas.*

Objetivo

Apresentar uma *nova fórmula resolutiva* para equação quadrática bem mais prática do que a de Bhaskara; o seu processo de redescoberta inspirada na história da matemática, e também, uma proposta didática adequada uso da referida fórmula.

O caminho da redescoberta

No ano de 2000, na Universidade Estadual Vale do Acaraú, em Sobral, onde sou professor, eu estava estudando a um trecho da obra *Ars Magna* (1545) de Cardano, sobre a resolução de equações cúbicas. Eu conhecia a fórmula de Cardando-Tartaglia e sua demonstração desde 1984. Naquele estudo eu fui levado a ver que no século XVI os matemáticos italianos usavam três regras verbais para resolver equações quadráticas completas. Tais equações equivalem modernamente, as seguintes equações literais de segundo grau:

DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.3559

$$\mathbf{x^2 + bx = c} \qquad \mathbf{x^2 + c = bx} \qquad \mathbf{x^2 = c + bx}$$

Os coeficientes eram sempre positivos, e isso eu já sabia. Naquele ano, o que me chamou atenção foi que o coeficiente de *x^2 era sempre 1*. Lembrei que no passado eu tinha visto Lagrange resolver equação cúbica, também com o coeficiente de *x^3 igual a 1*. Tinha uma vaga recordação que ele dava até um nome de "coeficiente determinístico". *Então havia algo de especial no coeficiente de x^2 e x^3*: será que eles facilitavam os cálculos para a obtenção de raízes? Eu sabia que as três equações literais, poderiam ser reduzidas a uma única equação, se aceitarmos coeficientes negativos. Assim, teríamos a equação:

$$\mathbf{x^2 + bx + c = 0}$$

Agora a transformando num *trinômio quadrado perfeito* e isolando ***x***, obtemos facilmente a fórmula abaixo:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Depois que as coisas acontecem tudo se mostra bastante óbvio. É que quando eu estudei no Boyer os métodos dos babilônios para equações quadráticas, o historiador disse que eles resolviam, usando regras verbais, equações que modernamente seriam escritos assim: $\mathbf{x^2 + px = q}$; $\mathbf{x^2 + q = px}$ e $\mathbf{x^2 = px + q}$**.** Entretanto, eu nunca tinha me fixado nos coeficientes iguais a 1. Isso é a beleza do "eureca" na criação científica.

Uso didático da nova fórmula

Agora sabemos que para obter as raízes de equações do tipo $\mathbf{x^2 + bx + c = 0}$**,** isto é**,** com o coeficiente **x^2 igual a 1**, podemos usar a fórmula abaixo:

$$\boldsymbol{x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c}}$$

Devemos ressaltar para o aluno que essa *fórmula* é aplicável a todas as equações quadráticas com o coeficiente **x^2 igual a 1.** Por exemplo, podemos usá-la nessas equações: $x^2 + 4x – 1 = 0$; $x^2 - 4x = 0$; $x^2 - 9 = 0$. Mas, para obter as raízes das equações quadráticas do tipo $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, onde $\boldsymbol{a \neq 1}$, devemos inicialmente *dividir todos os* *coeficientes* da equação pelo próprio ***a***. Desse modo, obteremos uma equação que terá as mesmas raízes, e poderemos usar aquela fórmula.

Exemplos:

$2x^2 + 6x – 8 = 0$, dividindo-a por 2 teremos: $x^2 + 3x – 4 = 0$.

$3x^2 + 3x + 7 = 0$, dividindo-a por 3 teremos: $x^2 + x + 7/3 = 0$.

$5x^2 + 3x = 0$, dividindo-a por 5 teremos: $x^2 + \frac{3}{5}x = 0$.

Os tipos de raízes

Pelo mesmo motivo do delta usado modernamente na fórmula de Bhaskara, podemos analisar o sinal da expressão contida no radical da nova fórmula **$(b/2)^2 - c$.**

Assim teremos:

- Se **$(b/2)^2$ > c** então temos duas raízes reais e diferentes
- Se **$(b/2)^2$ = c** então temos duas raízes reais e iguais
- Se **$(b/2)^2$ < c** então temos duas raízes imaginárias e diferentes

Essa fácil expressão permite sabermos rapidamente se uma equação quadrática tem raízes reais. Por exemplo, sempre o c for negativo temos raízes reais. O que fazemos é calcular o quadrado de **b/2** e comparar esse resultado com o ***c***.

Comparando as fórmulas

Essa nova fórmula só seria boa didaticamente se facilitar os cálculos para os alunos. Desse modo vamos comparar o número de operações que são feitas entre ela e a de Bhaskara para uma mesma equação. Assim vamos obter as raízes de $x^2 - 6x + 5 = 0$.

1º MÉTODO; usando a fórmula de Bhaskara.

a= 1 b = -6 c = 5 $\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4.1.5 = 36 – 20 =$ $\Delta = 16$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2.1}$$

$$x = \frac{6 \pm 4}{2}$$

X’ = 5 e x”= 1

DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.3559

2º MÉTODO; usando a nova fórmula.

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{3^2 - 5}$$

$$x = 3 \pm 2$$

x' = 5 e x" = 1

Como vemos são feitos bem menos cálculos com essa segunda fórmula, o que confirma a opção dos alunos que já usaram. Quando os coeficientes envolvem frações é que os cálculos são um pouco mais longos, mas nada que os alunos esbarrem tanto. Também, quando temos $\mathbf{a \neq 1}$ e iria envolver frações podemos evitá-la por uma técnica de multiplicar pela próprio a toda a equação e obter a seguinte equação na variável **y**.

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ então teremos $\mathbf{y^2 + by + ac = 0}$

No final dividimos os valores de ***y'*** e ***y"*** por ***a*** obtemos **x'** e **x".**

Referências

BOYER, C. *História da Matemática*. São Paulo, Edgard Blucher, 1996.

BONNET, F. *História da Matemática* **X** *Ensina da Matemática*. Itatiba, Ypsilon,1994.

__________ *Matemática*: *O mdc de uma vida. Sobral*, Sobral Editora, 2019.

CARDANO, H. *The reles of álgebra(Ars Magna*). NY, Dover, 1993.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, Ed. Da Unicamp, 2004.

SMITH, D.E. *A source book in mathematics*, NY, Dover, 1959.