BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

ISSN: 2318-6674 **DOI**: 10.30938/bocehm.v7i21.3310

ELON LAGES LIMA E O SEU PRIMEIRO LIVRO: TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS MÉTRICOS

ELON LAGES LIMA AND HIS FIRST BOOK: TOPOLOGY OF METRIC SPACES

Francisco Osmar Alves da Silva Filho[1]; Antonio José Melo de Queiroz[2]

RESUMO

O Brasil vem conquistando cada vez mais espaço na Matemática mundial. Tal reconhecimento se deu graças à grande quantidade de matemáticos de sucesso que o nosso país tem revelado ao longo das décadas. Entre todos eles, destaca-se Elon Lages Lima (1929-2017), que se consolidou como um dos maiores matemáticos brasileiros. O trabalho a seguir trata-se de um estudo sobre a vida e a carreira de Elon, discutindo também sua atuação como escritor, com foco no livro *Topologia dos Espaços Métricos*, que ao longo do tempo foi transformado no livro *Espaços Métricos* e rendeu ao autor o Prêmio Jabuti, outorgado pela Câmara Brasileira do Livro. O objetivo desta pesquisa é apresentar um levantamento da carreira de Elon Lages Lima e suas principais contribuições para a Matemática, como professor, pesquisador e escritor. Além disso, buscamos compreender o livro *Topologia dos Espaços Métricos*, de sua autoria, por meio de uma breve discussão sobre a metodologia usada pra explanar os assuntos contidos nos capítulos do livro em questão. A pesquisa é do tipo descritiva, por meio de um levantamento bibliográfico e documental. Após a análise do livro, é notável o cuidado do autor em usar uma linguagem mais acessível para explanar os conteúdos, sem abrir mão do rigor necessário para um bom aproveitamento do estudo. Sua metodologia mostra ainda o desejo de despertar o interesse e a curiosidade no leitor, usando táticas para fazê-lo participar das demonstrações e demais operações contidas nos capítulos. Constata-se, com esse estudo, a grande importância de Elon para a Matemática brasileira e que sua atuação na área rendeu enormes avanços para o ensino e a pesquisa em Matemática. Dessa forma, espera-se incentivar o aprofundamento de pesquisas sobre a carreira e as obras de Elon Lages Lima e contribuir para a disseminação dos ensinamentos desse matemático para aqueles interessados no assunto.

Palavras-chave: Matemática no Brasil; Elon Lages Lima; Espaços Métricos.

ABSTRACT

Brazil has been gaining more and more space in world mathematics. This recognition was due to the large number of successful mathematicians that our country has revealed over the decades. Among them all, we have Elon Lages Lima (1929-2017), who consolidated himself as one of the

[1] Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Ceará (UECE). Endereço para correspondência: Rua Manoel Teixeira de Lima, 303, Nova Jerusalém, Quixadá, Ceará, Brasil, CEP: 63906-020. E-mail: francisco.osmar@aluno.uece.br
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1051-2566.
[2] Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI). Professor assistente na Universidade Estadual do Ceará (UECE), Tauá, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Sólon Medeiros, S/N, CECITEC-UECE, Tauá, Ceará, Brasil, CEP: 60000-000. E-mail: antonio.queiroz@uece.br
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-6932-129X.

greatest Brazilian mathematicians. The following research is a study of Elon's life and career, also discussing his work as a writer, focusing on the book Topology of Metric Spaces, which in the following years was transformed into the book Metric Spaces and yielded to the author the Jabuti Prize, awarded by the Brazilian Book Chamber. The objective of this research is to present a survey of Elon Lages Lima's career and his main contributions to Mathematics, as a teacher, researcher and writer. In addition, to understand the book Topology of Metric Spaces, of his authorship, through a brief discussion on the methodology used to explain the subject. The research is descriptive, through a bibliographic and documentary survey. After analyzing the books, we realized the author's caution in using a more accessible language to explain the contents, without giving up the rigor necessary for a good use of the study. His methodology also shows his desire to arouse interest and curiosity in the reader, using tactics to make him participate in the demonstrations and other operations contained in the chapters. We found with this study the great importance of Elon for Brazilian Mathematics and that his work in the area has yielded enormous advances for teaching and research in mathematics. Thus, we hope to encourage the deepening of the career and works of Elon Lages Lima and contribute to the dissemination of the teachings of this mathematician to those interested in the subject.

Keywords: Mathematics in Brazil; Elon Lages Lima; Metric Spaces.

Introdução

No âmbito da Educação Superior e pesquisa em Matemática, o Brasil apresentou importantes avanços ao longo das décadas, graças às contribuições de grandes matemáticos brasileiros. Em 1951, foram criadas as duas principais agências federais ligadas a pesquisa científica: o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Em 1952 o CNPq fundou o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), que por sua vez, promoveu em 1957 o 1° Colóquio Brasileiro de Matemática, realizado bianualmente desde então. Durante o 7º Colóquio Brasileiro de Matemática, em 1969, houve a criação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

Além disso, o Brasil faz parte da *International Mathematical Union* (IMU) desde 1954 e graças às contribuições dos matemáticos brasileiros o país vem se desenvolvendo dentro da União. Alguns nomes de destaque na IMU são Jacob Palis, Paulo Cordaro, Marcelo Viana, entre outros. Algumas conquistas brasileiras mais recentes foram a medalha *Fields*, atribuída em 2014, para Artur Ávila, doutor e pesquisador do IMPA, pelo seu trabalho em Sistemas Dinâmicos. Neste mesmo ano o Brasil ganhou o direito de organizar a *International Mathematical Olympiad* (IMO) em 2017 e o *International Congress of Mathematicians* (ICM) em 2018, ambos no Rio de Janeiro.

Entre tantos matemáticos brasileiros importantes temos o professor e pesquisador Elon Lages Lima. Este trabalho é resultado da monografia apresentada ao Curso de

Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Educação, Ciências e Letras do Sertão Central, da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de licenciado em Matemática e tem como tema um breve levantamento sobre a história, carreira profissional, obras e demais contribuições desse importante matemático, além da discussão do livro *Topologia dos Espaços Métricos*, que foi o primeiro livro publicado por Elon.

O tema surgiu a partir do interesse pelo desenvolvimento da Matemática no Brasil e pelo desejo de difundir a importância das contribuições dos matemáticos brasileiros. A problemática da pesquisa se dá em compreender a trajetória profissional de Elon Lages Lima e como é abordado o assunto do primeiro livro publicado por ele. Diante disso, o trabalho busca responder as seguintes perguntas norteadoras: Quais as principais atividades profissionais de Elon Lages Lima ao longo da carreira? Como está constituído o livro *Topologia dos Espaços Métricos*, de sua autoria, e como esse assunto é tratado pelo autor?

O objetivo dessa pesquisa é apresentar um levantamento da carreira de Elon Lages Lima e suas principais contribuições para a Matemática, como professor, pesquisador e escritor. Além disso, buscamos compreender o livro *Topologia dos Espaços Métricos*, de sua autoria, por meio de uma breve discussão sobre a metodologia usada para explanar o assunto.

A pesquisa é do tipo bibliográfica e documental, de caráter exploratório. Foi realizado um levantamento sobre o histórico profissional de Elon Lages Lima, em sites, revistas, entrevistas cedidas por ele e livros. Além disso, o trabalho apresenta a sua carreira como escritor, tomando conhecimento de suas obras publicadas, com foco principal na obra *Topologia dos Espaços Métricos*, que foi escolhida como objeto de estudo desse trabalho devido a sua importância histórica. Esse foi o primeiro livro publicado por Elon, logo após ele concluir a graduação. A discussão do livro levará em consideração diversos aspectos, como: a forma da linguagem utilizada, o rigor na explanação dos conteúdos, a metodologia dos capítulos, as listas de exercícios, dentre outros aspectos.

Início da trajetória profissional de Elon Lages Lima

Elon Lages Lima nasceu em 09 de julho de 1929, na cidade de Maceió-AL. Filho de um comerciante e uma dona de casa, sempre teve uma grande influência de seu pai em relação aos estudos. Apesar de não demonstrar muito interesse, foi bom aluno quando criança, terminando o primário[3] aos 9 anos de idade, como afirma Lima (1998) a seguir:

> Eu tenho um irmão e duas irmãs. Aprendi a ler sozinho; antes de entrar na escola, eu já sabia ler. As minhas primeiras lições foram na escola da dona "Teté", uma vizinha nossa que tinha uma escola particular. Numa sala de aula apenas, ela ensinava os alunos do 1°, 2º, 3° e 4º anos. Depois entrei no Grupo Escolar D. Pedro II e terminei o primário com nove anos. Mas não pude fazer o exame de admissão porque não tinha idade legal (LIMA, 1998, p. 97).

Depois entrou no ginásio[4], no Colégio Batista Alagoano, onde conheceu professores muito bons que lhe serviram de inspiração para avançar nos estudos, com destaque para o seu professor de Matemática, Benedito de Moraes, sobre o qual, anos depois, Elon escreveu o livro *Meu professor de Matemática*. Em relação ao professor Benedito, Lima (2003) afirma: "Ele era realmente uma personalidade; autodidata, acho que não passou do ginásio, mas era um homem inteligentíssimo. O prof. Benedito sempre foi uma espécie de modelo." (LIMA, 2003, p. 91).

Aos 16 anos, chegou a Fortaleza, para estudar na escola de cadetes, porém só ficou um ano devido a um desentendimento com um major, professor de Física. Então decidiu deixar a escola. Como já estava com 18 anos e não queria voltar para Maceió, resolveu ficar em Fortaleza e para isso conseguiu um emprego de professor no Ginásio Farias Brito. Começou dando aulas no curso de admissão e, após dois meses, já estava lecionando Português, Matemática, Ciências, Geografia e História. Logo em seguida, passou a ensinar Matemática às turmas do ginásio e foi assim que decidiu estudar Matemática. Sobre a sua primeira experiência profissional, como professor em Fortaleza, Lima (1998) afirma:

> Há uns episódios interessantes na minha vida como professor em Fortaleza, porque eu era, ao mesmo tempo, professor e aluno. Eu dava aula num colégio estadual e, durante a noite, terminava o científico noutro colégio. [...] Abriu concurso para professor do colégio estadual. O edital do concurso saiu publicado no jornal e, entre as exigências, não puseram que era necessário ter diploma superior. Então eu me inscrevi no concurso. [...] Havia vários candidatos, oito ou dez eu acho. Eu tirei o primeiro lugar (LIMA, 1998, p. 98).

[3] Equivale ao ensino do 2º ao 5º ano do ensino fundamental.
[4] Equivale ao ensino do 6º ao 9º ano do ensino fundamental.

Seu novo cargo o fez buscar cada vez mais conhecimento sobre a Matemática, pois queria estar sempre preparado para o que os alunos perguntassem, tanto que após um ano entrou na Faculdade Católica de Filosofia para cursar Matemática, onde passou dois anos estudando, ao mesmo tempo em que ensinava no colégio estadual. Elon conseguiu uma bolsa de estudos do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) e se transferiu para a Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil, hoje UFRJ, no Rio de Janeiro, onde terminou a graduação com uma bolsa de iniciação científica do CNPq. Lima (1998), explica a seguir como se surpreendeu ao chegar à nova faculdade:

> Quando vim para o Rio de Janeiro fazer o terceiro ano da faculdade, estava morrendo de medo, porque tinha lido um programa da faculdade, um programa vastíssimo com coisas muito difíceis, muito amplas. “Meu Deus do céu, eu vou entrar lá e enfrentar essas feras todas...”. Mas, para a minha surpresa, quando cheguei aqui, vi que meus colegas sabiam ainda menos do que eu (LIMA, 1998, p. 99).

Já no Rio de Janeiro e com a bolsa, passou a estudar no CBPF, onde havia um Departamento de Matemática, formado por Maurício Peixoto, Leopoldo Nachbin, Maria Laura Mouzinho e depois Paulo Ribenboim. No mesmo ano, foi criado o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Então Elon passou a ser bolsista do instituto, fazendo seminários com Leopoldo, como explica seguir:

> Eu tinha uma bolsa de Iniciação Científica, que era a minha fonte de sustento, e estudava na faculdade. Depois que vi que os cursos da faculdade não eram grande coisa, fiquei só estudando sob a direção do Leopoldo no CBPF. No mesmo ano em que eu cheguei, foi criado o IMPA, e passei a ser bolsista do IMPA. E lá fazia seminários com o Leopoldo (LIMA, 1998, p. 100).

Quando concluiu a graduação, ganhou uma bolsa da Fundação Rockfeller para estudar em Chicago e lá fez o Mestrado e o Doutorado. Em algumas universidades dos Estados Unidos era possível entrar direto para o doutorado, mas não na Universidade de Chicago, então teve que passar pelos exames do Mestrado para poder entrar no Doutorado, como relata: “No primeiro ano, fiquei fazendo o Mestrado. Aí, realmente, era só aprendizagem mesmo. Fiz vários exames escritos e orais, terminei o mestrado em pouco menos de um ano e comecei a trabalhar no Doutorado.” (LIMA, 1998, p. 101).

De volta ao Brasil, trabalhou no IMPA de 1959 a 1962, retornando depois aos Estados Unidos por meio de uma bolsa da Fundação Guggenheim. Sobre esse período, Lima (1989) afirma:

> Fui bolsista de Iniciação Científica, para passar depois a pesquisador assistente e finalmente pesquisador titular. Durante quatro anos tentei, junto com Leopoldo Nachbin e Maurício Peixoto, organizar um bom centro. A situação salarial era muito difícil e os pesquisadores do IMPA, em geral, sobreviviam mantendo empregos nas universidades. Chegou um momento em que vi que precisava sair. Consegui uma bolsa Guggenheim e voltei para os Estados Unidos onde permaneci dois anos (LIMA, 1989, p. 4).

Em 1964 voltou ao Brasil, a convite do professor Zeferino Vaz, para organizar a Matemática na Universidade de Brasília (UnB), que estava sob nova direção. Lima (2003) conta que ficou muito entusiasmado com o convite, por ouvir de Zeferino que também fariam parte do grupo de professores nomes de grande destaque, como relata: “Começou a citar todos os nomes famosos que iam para lá. Seria uma experiência fantástica! Respondi: Conte comigo.” (LIMA, 2003, p. 99). Porém, depois de um ano e meio pediu demissão devido à grande opressão que sofriam dos militares, já que no Brasil o cenário era o da Ditadura Militar. Segundo Lima (1989), logo ficou claro que era impossível fazer a universidade como eles queriam, devido à presença constante de um coronel, estabelecendo o que devia ou não devia ser feito.

Elon retornou ao IMPA em 1968, levando junto seus alunos e jovens estudantes. Lá contribuiu enormemente para o crescimento e desenvolvimento do instituto, como pesquisador, escritor e professor, chegando a ser diretor em três períodos (1969-1971, 1978-1979 e 1989-1993) e recebendo o título de pesquisador emérito.

Principais contribuições da carreira profissional de Elon Lages Lima

Elon teve uma forte relação com o IMPA. Depois de sair da Universidade de Brasília, voltou para o instituto em 1968, época em que, segundo ele, Leopoldo Nachbin “era senhor absoluto e o ambiente no instituto não era de todo satisfatório; foi uma fase muito difícil, aquela.” (LIMA, 2003, p. 101). Diante dessa situação, Lima aceitou o convite do vice-reitor da Pontifícia Universidade Católica (PUC) do Rio de Janeiro, para organizar a pós-graduação em Matemática, afastando-se do IMPA. Passou o primeiro semestre de 1969 na PUC, onde também organizou a graduação, mas pediu demissão e voltou ao IMPA, para assumir pela primeira vez a direção, no lugar de Lindolpho de Carvalho Dias, que havia se afastado.

No ano de 1971, como o retorno de Lindolpho, Elon deixou a direção do IMPA, ficando como vice-diretor até 1979, quando teve que assumir novamente como diretor, pois Mauricio Peixoto foi nomeado presidente do CNPq e levou Lindolpho como vice-presidente. Quando Lindolpho voltou, Elon entregou-lhe mais uma vez o cargo.

Mais tarde, em 1989, foi eleito diretor, ficando até 1993. Sobre essa experiência, Lima (2003) relata:

> Quando fui diretor entre 1989 e 1993, peguei o governo Collor; foi uma época difícil. Além de restrições orçamentárias, ainda por cima os recursos eram contingenciados. Não se podia fazer nada (LIMA, 2003, p.118).
> Passei esse período todo com muita vontade de sair, mas decidi ir até o fim. Antes do final do mandato chamei o Jacob e falei: “Não quero tentar a reeleição; você vai ser o próximo” (LIMA, 2003, p.105).

Além do IMPA, fazem parte do currículo profissional de Elon universidades estrangeiras, como Columbia e Rochester, sendo professor visitante; Universidade de Brasília (UnB), como professor e coordenador do Instituto de Matemática. Também presidiu a SBM, com sede localizada no IMPA.

Enquanto atuava no IMPA, Lima também se tornou professor da Fundação Getúlio Vargas (FGV). Além disso, também contribuiu para o Conselho Universitário e Editorial da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), a Academia Brasileira de Ciências (ABC), o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e chegou a ser membro do Conselho Nacional de Educação pelo MEC.

Seu excelente trabalho na docência e na pesquisa lhe rendeu vários prêmios e títulos nacionais e internacionais, dentre eles o Prêmio Edna M. Allen, na Universidade de Chicago; o título de Professor Honoris Causa na Universidade Federal do Ceará (UFC), Pontifícia Universidade Católica do Peru (PUC-Peru), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e Universidade Federal da Bahia (UFBA). Recebeu também o Prêmio Anísio Teixeira do Ministério da Educação (MEC) e o título de Pesquisador Emérito do CNPq.

Elon também adorava escrever. Ele publicou várias de suas notas de aulas, que elaborava para os cursos dados nas instituições onde trabalhava, além de vários textos e artigos em jornais e revistas voltadas para a Matemática, como a Revista Matemática Universitária e a Revista do Professor de Matemática, criada por ele. Isso fica claro em uma entrevista cedida à Revista Matemática Universitária:

> Eu, desde pequeno, gostava de escrever, sempre achei que ia ser um escritor, às vezes até me arrependo de não ter seguido a linha literária. Sempre procurei

> ler bons autores para poder escrever bem. Os autores brasileiros que mais me influenciaram foram Machado de Assis e Graciliano Ramos. Esses dois foram marcantes (LIMA, 1998, p. 107).

Além das publicações nacionais, ele fez o mesmo nos outros países onde estudou e trabalhou. Então passou a se interessar cada vez mais por ensino, ensino em nível de pós-graduação, depois em educação continuada, publicando cada vez mais sobre formação e treinamento de professores, de tal forma que em 1990 criou o Programa de Aprimoramento de Professores do Ensino Médio.

Ele sempre se preocupou com que os alunos brasileiros tivessem obras matemáticas escritas em sua língua, o português, pois, para ele, ter livros de Matemática escritos por autores brasileiros pode servir de inspiração para que os estudantes do Brasil sigam com os seus estudos, alimentados pela esperança de que um dia possam também se tornar profissionais importantes na sua área de conhecimento, como explica a seguir:

> A língua que a gente fala é o português. Sempre achei que mesmo o estudante que fala perfeitamente outro idioma se sente mais confortável lendo um livro de Matemática na própria língua. Se você é um jovem estudante brasileiro e lê um livro em português, escrito por um autor brasileiro ou um autor estrangeiro que viva no Brasil, você sente que tem chance de continuar sua carreira. Mas se todos os livros que você lê são em línguas estrangeiras, pode chegar a pensar que a Matemática é coisa de países altamente desenvolvidos e que como brasileiro não tem chance (LIMA, 1989, p. 43).

Foi então que começou a lançar diversas coleções, como “Matemática Universitária” e “Projeto Euclides”, sendo essa última mais bem sucedida e tendo seus livros traduzidos para vários outros idiomas.

De todas as suas obras, duas em especial renderam a ele o Prêmio Jabuti de Ciências Exatas da Câmara Brasileira do Livro: *Espaços Métricos*, do *Projeto Euclides*, em 1978 e *Álgebra Linear*, da coleção *Matemática Universitária*, em 1996.

Nesse trabalho é feita uma apresentação do livro *Topologia dos Espaços Métricos*. Será levada em consideração a metodologia utilizada na explanação dos conteúdos, o conjunto de assuntos abordados, as formas de aplicação nos exercícios, o nível da linguagem usada, entre outros aspectos importantes.

O livro *Topologia dos Espaços Métricos*

Em 1954, o professor Elon Lages Lima ministrou um curso de um semestre, na Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil, sobre espaços métricos. Esta foi a situação propícia para a elaboração de seu primeiro livro, *Topologia dos Espaços Métricos*. A partir das notas de aula do curso, o texto foi publicado na coleção Notas de Matemática, sob a coordenação de Leopoldo Nachbin, no ano de 1954. Ele afirma que o livro “Teve grande aceitação, tanto que o prof. Nachbin tirou várias edições.” (LIMA, 2003, p. 95).

Lima (2003) conta que, posteriormente, reescreveu, completamente, o livro citado acima para servir de notas de aula para um curso de espaços métricos que deu em um Colóquio Brasileiro de Matemática. Algum tempo depois, fez nova reformulação ao conteúdo e adicionou exercícios. Este novo texto, foi publicado em 1977 na coleção Projeto Euclides e foi um dos ganhadores do Prêmio Jabuti em 1978.

A discussão será feita sobre a primeira versão do livro, de 1954, que é composta por onze capítulos mais uma seção inicial que trata das preliminares e uma seção final, onde são apresentadas referências bibliográficas sobre Topologia e espaços métricos com breves comentários do autor.

As preliminares apresentam os conteúdos pré-requisitos para o melhor entendimento do assunto a ser abordado, como conceitos básicos da linguagem de conjuntos e funções e ideias de união, interseção e complementar de conjuntos e suas propriedades. Também apresentam temas básicos sobre funções, como domínio, imagem, contra-imagem, bijeção e outros conceitos introdutórios importantes.

No primeiro capítulo conhecemos as definições de Espaços Topológicos e os casos particulares, chamados Espaços Métricos. Segundo Lima (1954), “chama-se espaço métrico a todo conjunto M, não vazio, munido de uma função d, dita a métrica de M, que a todo par a, b de elementos de M associa o número real $d(a, b)$, chamado distância do ponto a ao ponto b de modo que satisfaça algumas propriedades.” (LIMA, 1954, p. 2). O capítulo ainda dispõe de uma série de exemplos e contraexemplos e algumas observações sobre métrica. Também é apresentado o espaço métrico discreto e o espaço pseudo-métrico. Sua conclusão ocorre com a apresentação de 7 exercícios que propõem o aprofudamento de conceitos ou a demonstração de que algumas funções são métricas.

O capítulo dois aborda uma visão mais aprofundada de função contínua em espaços métricos. São dados exemplos que comparam a definição com a definição clássica de função contínua real de n variáveis reais e com a definição de função contínua complexa de variável complexa. Em seguida são apresentados vários exemplos em que os espaços de domínio e/ou contradomínio são os espaços euclidanos e as funções são: a constante, identidade, projeções e funções de n variáveis, também é mostrado que a própria métrica é uma função contínua. Os exercícios visam aprofundar o conteúdo e as definições, uma vez que, a maioria indaga sobre as propriedades de uma função contínua em espaços métricos diversos.

O capítulo seguinte inicia com a definição de esfera e explica como seriam as esferas na reta ($\mathbb{R}$), no plano ($\mathbb{R}^2$) e no espaço ($\mathbb{R}^3$). Também define superfície esférica e esfera fechada. É citada a importância das esferas para os espaços métricos e são feitas demonstrações de algumas de suas propriedades. Os termos atuais, na literatura corrente, são: bolas abertas no lugar de esferas, bolas fechadas substituem esferas fechadas e superfícies esféricas foram substituidas por esferas.

Logo após, conhecemos a definição de conjunto aberto, que segundo Lima (1954) "é um conjunto A de um espaço métrico M, tal que $A \subset M$, onde para todo $x \in A$ existe uma esfera $S(x)$ tal que $S(x) \subset A$." (LIMA, 1954, p. 13). Como nos outros assuntos, são dados exemplos de conjuntos abertos e demonstrados teoremas e propriedades. Um dos teoremas mostra a importância dos conjuntos abertos para os espaços métricos. Temos ainda o conceito de espaço topológico e a confirmação de que todo espaço métrico é um espaço topológico. Neste capítulo, um diferencial, é a apresentação dos exercícios em conjunto com os conceitos.

O capítulo quatro introduz a noção de conjunto fechado. Temos que "um conjunto F em um espaço métrico M diz-se fechado se é complementar de um conjunto aberto." (LIMA, 1954, p. 24). Segue com um dos teoremas mais importantes desta parte do texto, a apresentação de função contínua a partir de conjuntos fechados, ou seja, uma função é contínua se, e somente se, a imagem inversa de conjuntos fechados são fechados no domínio. Também são mostrados conjuntos, simultaneamente, abertos e fechados. Algumas observações são colocadas pelo autor, entre elas, destacamos que "Definindo-se um conjunto fechado como o complementar de um aberto, há uma tendência de se considerar estas duas noções como contrárias. Isto, porém, não é verdadeiro." (LIMA, 1954, p. 25-26). São discutidos exemplos que reforçam a ideia acima.

Também são apresentados exemplos com forte apelo geométrico, de como as aplicações contínuas determinam que, imagens inversas de fechados são fechados, com foco nas curvas planas e superfícies no espaço tridimensional. Ao fim da seção, são sugeridos alguns exercícios para o aprofundamento de conceitos ou apresentação de novas ideias como, caracterização de conjuntos fechados usando a definição de fronteira, aplicação da definição de conjunto fechado para o estudo de conjunto conexo e outros.

O quinto capítulo é introduzido com a importante observação de que "A noção de limite está intimamente ligada à de função contínua. Historicamente, o primeiro tipo de limite a ser considerado foi o limite de sucessões." (LIMA, 1954, p. 29). Este capítulo trata das sucessões ou sequências de pontos em um espaço métrico.

O autor define sucessões, em espaços métricos, como funções com domínio no conjunto dos naturais e imagem subconjunto do espaço métrico. Além disso, complementa: "O elemento de M que a sucessão faz corresponder ao número n é representado por x_n e chamado de termo. Indicaremos uma sucessão pelo símbolo (x_n) e o conjunto desses elementos x_n da sucessão pela notação $\{x_n\}$." (LIMA, 1954, p. 29). Depois são mostradas as subsucessões ou subsequências de (x_n), representadas por (x_{n_k}) e o limite de uma sucessão.

O único teorema do capítulo afirma e demonstra a unicidade do limite e seguem-se algumas observações sobre a convergência e divergência de sucessões, por exemplo, sucessões com uma infinidade de termos iguais a um termo fixo, ou são convergentes para aquele termo, ou são divergentes. Ao fim da seção, foram incluídos vários exercícios que associam a noção de convergência com outras ideias, como valores de aderência, ou tratam de espaços específicos, como o das funções contínuas definidas em um intervalo fechado.

As sucessões, vistas no capítulo anterior, tornam-se muito úteis no estudo da topologia dos espaços métricos, assunto abordado no capítulo seis. Primeiramente se introduz o conceito de sistema fundamental de vizinhanças, seguido de demonstrações e corolários que apresentam a condição suficiente para que uma função seja contínua, paralela à noção de limite. Também é dado o conceito de fecho de um conjunto X num espaço métrico, como a interseção de todos os conjuntos fechados de M que contém X, sendo representando pelo símbolo $\bar{X}$. (LIMA, 1954, p. 39). Vemos ainda as definições de ponto de acumulação, derivado, ponto isolado e ponto limite. O capítulo encerra com a noção de distância de um ponto a um conjunto em um espaço métrico e resultados relacionados, como o importante teorema de Urysohn. Além disso, segue-se uma série de exercícios que aplicam ou expandem os conceitos já discutidos anteriormente.

Chegando ao capítulo sete, conhecemos os subespaços. Esse conceito é introduzido partindo-se da noção de um subconjunto T de um espaço métrico M e são demonstradas relações de interseção com T em M. Lima (1954) também dá as chamadas noções relativas que mostram que um subconjunto $X \subset M$ pode ser uma esfera, um aberto ou um fechado num subespaço T de M sem ser nada disso em M e que o fecho, o interior e a fronteira de um conjunto X dependem do espaço onde se considera X imerso. Depois das relativas, são mostradas as propriedades absolutas e dados exemplos sobre ambas. O capítulo ainda enuncia teoremas que relacionam a noção de subespaço com funções contínuas e conclui com o conceito de vizinhança e suas propriedades. Os exercícios do capítulo tratam sobre demonstrações de determinadas sentenças e suas recíprocas, além de outras aplicações e propriedades dos subespaços.

A oitava sessão apresenta os espaços completos, que "são espaços métricos M que satisfazem ao critério de Cauchy, isto é: (x_n) é convergente em M se, e somente se, $\lim\limits_{m,n} d(x_m, x_n) = 0$." (LIMA, 1954, p. 58). Segundo Lima (1954), o resultado mais notável obtido é que todo espaço métrico não completo pode ser "completado".

É definida a sucessão fundamental ou sucessão de Cauchy e diz-se que um espaço métrico M é completo quando satisfaz a condição de que toda sucessão fundamental de M é convergente. Os teoremas apresentados mostram, por exemplo, que toda sucessão convergente é fundamental e todo subespaço fechado de um espaço completo é completo, assim como a sua recíproca. São dados exemplos e contraexemplos de espaços completos. O autor também apresenta as definições de isometria e define como se caracteriza o completamento de um espaço métrico, mostrando por meio de um teorema que todo espaço métrico possui um completamento. Nesse capítulo, os exercícios também aparecem ao longo do texto, abordando diretamente os conceitos que acabaram de ser explanados e preparando o leitor para as definições que virão em seguida.

Nota-se que a cada capítulo surgem demonstrações ou exemplos que utilizam proposições dos capítulos anteriores em suas verificações e por isso o autor solicita que seja lida novamente a proposição já vista, para ajudar na compreensão.

Os espaços separáveis são estudados na sessão nove, onde se diz que "um espaço métrico M é separável quando existe um subconjunto enumerável denso em M." (LIMA, 1954, p. 75). São dados exemplos de espaços separáveis como o conjunto $\mathbb{R}$, pois os racionais constituem um subconjunto enumerável denso. Outros exemplos trazem diversas propriedades, como a de que todo espaço métrico enumerável é separável, todo espaço compacto é separável, um espaço totalmente limitado é separável, entre outras. O autor ainda demonstra que as seguintes afirmações são equivalentes: Um espaço métrico M é separável; Um espaço métrico M tem base enumerável; Um espaço métrico M satisfaz à propriedade de Lindelof. No fim, são apresentadas mais propriedades e afirmações equivalentes de espaços separáveis. A lista de exercícios solicita, por exemplo, a demonstração de que alguns espaços métricos e/ou seus completamentos são separáveis ou não, recorrendo também a conceitos vistos nos capítulos anteriores aplicados aos exercícios desse capítulo.

A sessão dez começa enunciando o teorema de Bolzano-Weierstrass e trata dos espaços métricos que satisfazem a essa propriedade. A partir daí, entra no conceito de espaços compactos, que são os que satisfazem a propriedade de Borel-Lebesgue. São dados exemplos e suas características e demonstradas afirmações equivalentes, teoremas e corolários sobre os espaços compactos e limitados. Lima (1954) também define espaço localmente compacto: "Um espaço métrico M diz-se localmente compacto se $x \in M$ é interior a uma parte compacta $K \subset M$, isto é: todo ponto $x \in M$ é centro de uma esfera fechada compacta." (LIMA, 1954, p. 91).

Como nos demais capítulos, são dados exemplos de espaços compactos e não compactos. Vemos, por meio dos teoremas apresentados e seus corolários, que todo espaço compacto é completo e totalmente limitado, que todo espaço compacto é completo, todo espaço compacto é limitado, entre outros resultados importantes. Por fim mostram-se as relações de funções contínuas com espaços compactos e é demonstrado o teorema da continuidade uniforme. O autor sempre usa nos capítulos o método de definir os novos conceitos que surgem e, logo após, disponibiliza uma série de exemplos de espaços métricos ou conjuntos que atendam ou não ao novo conceito dado, tática que facilita no entendimento por parte do leitor e expande a maneira de enxergar conjuntos e espaços já conhecidos. Os exercícios do capítulo cobram, por exemplo, demonstrações de que certos espaços são compactos ou limitados, além de apresentar conceitos complementares ao capítulo e solicitar sua demonstração ou exemplos. Também solicita a análise de certas afirmações sobre sequências de espaços métricos, a fim de mostrar que são equivalentes.

O último capítulo aborda os espaços métricos vistos de outro ponto, tratando dos espaços homeomorfos. O autor define homeomorfismo da seguinte forma: "Sejam M e N

espaços métricos. Um homeomorfismo de M sobre N é uma aplicação biunívoca f de M sobre N tal que f e sua inversa f^{-1} são contínuas." (LIMA, 1954, p. 100). São enunciados teoremas explorando o conceito de homeomorfismo e explicado que sua existência entre certos espaços A e B implica que esses espaços gozam das mesmas propriedades topológicas absolutas, não importando que eles tenham as mesmas propriedades relativas. Vemos também exemplos de homeomorfismos e espaços que não são homeomorfos, além da definição de espaço métrico conexo e suas aplicações. O capítulo ainda traz o conceito de arcos e espaços métricos conexos por arcos. No final vemos várias outras aplicações de homeomorfismo, inclusive na esfera, no retângulo e no quadrado.

A complexidade dos últimos capítulos do livro implica numa metodologia mais rigorosa por parte do autor, que aprofunda os assuntos com diversas demonstrações, mais extensas, de proposições e teoremas, além de se preocupar em expor representações geométricas em alguns casos, para melhorar a visualização do conceito dado. Esse rigor reflete também nas listas de exercícios. No caso do último capítulo, a lista é composta por exercícios que tratam, por exemplo, de mostrar que alguns espaços são homeomorfos ou não, estabelecer homeomorfismos entre conjuntos etc.

Considerações finais

Diante da discussão feita sobre a trajetória profissional de Elon Lages Lima e sobre o livro *Topologia dos Espaços Métricos*, pudemos atingir o objetivo deste trabalho, apresentando a carreira de Elon e seus principais marcos profissionais, assim como as principais características do seu primeiro livro.

Elon construiu uma carreira de sucesso, deixando importantes contribuições em todas as instituições onde trabalhou, tornando-se assim um dos mais influentes matemáticos brasileiros, conquistando seu merecido reconhecimento e acumulando vários prêmios ao longo da carreira. Além disso, o prestígio de Elon na Matemática tornou-se ainda maior graças às suas conquistas como escritor. Seus trabalhos, livros e demais publicações são tidos, até hoje, como importantes fontes bibliográficas para o ensino, pesquisa e a formação de professores.

O livro *Topologia dos Espaços Métricos* resultou, anos depois, no livro *Espaços Métricos*, que se tornou uma importante fonte bibliográfica e ainda hoje é muito utilizado na graduação, contribuindo para a formação de matemáticos. Além disso, o livro também possui sua importância histórica, por se tratar do primeiro livro publicado por Elon Lages

Lima. Podemos perceber que, apesar da complexidade dos assuntos, o autor consegue explaná-los com muita competência, mesmo sendo um jovem recém graduado e no início da vida docente. A metodologia utilizada mostra que o autor tem a preocupação de buscar diferentes maneiras que facilitem no entendimento do assunto, como representações geométricas, o uso de uma linguagem mais acessível e a grande quantidade de exemplos e exercícios em cada capítulo. Outra característica que se destaca é a maneira como ele incentiva o leitor a se aprofundar no assunto, por várias vezes deixando certas demonstrações a cargo do leitor e em outros casos, citando propriedades de capítulos anteriores, solicitando o retorno a tal capítulo para verificação.

Com isto, esperamos não só ter despertado o interesse na carreira e nas obras de Elon Lages Lima, mas também nas de outros matemáticos brasileiros, reconhecendo a importância de suas contribuições para a Matemática no Brasil e no mundo.

Referências

BIÊNIO DA MATEMÁTICA BRASIL 2017-2018, 2018, Rio de Janeiro. **Matemática Brasileira 2018**. Rio de Janeiro: IMPA; SBM, 2018. Disponível em <https://www.sbm.org.br/noticias/impa-e-sbm-lancam-documento-sobre-a-matematica-no-brasil>. Acesso em: 23 mar. 2020.

IMPA. **IMPA - Breve história**. Rio de janeiro, 2018. Disponível em: <https://impa.br/sobre/historia/>. Acesso em: 20 fev. 2020.

LIMA, E. L. Elon Lages Lima comenta sua vocação de Matemático e Divulgador da Matemática. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 9/10, p. 33-50, 27 nov. 1989. Entrevistadores: J. F. Voloch e L. Martignon. Disponível em: <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n09_n10_Entrevista01.pdf>. Acesso em: 25 fev. 2020.

LIMA, E. L. Elon Lages Lima. *In*: PALIS, J.; CAMACHO, C.; LIMA, E. L. (orgs.) **IMPA 50 anos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2003. p. 91-119.

LIMA, E. L. Entrevista: Elon Lages Lima. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 33, p. 97-120, 13 mai. 1998. Entrevistador: C. M. Silva. Disponível em: <https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n33_Entrevista.pdf >. Acesso em: 26 fev. 2020.

LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

LIMA, E. L. **IMPA - Vídeos**. Entrevistas com Eméritos II: César Camacho entrevista Elon Lages Lima. Entrevistador: César Camacho. Rio de janeiro, 2010. Disponível em: <https://impa.br/videos/>. Acesso em: 19 fev. 2020.

LIMA, E. L. **Topologia dos Espaços Métricos**. Notas de Matemática, Rio de Janeiro, n. 10, abr. 1954.

Recebido em: 27 / 05 / 2020
Aprovado em: 18 / 07 / 2020