



ELON LAGES LIMA: ESTUDO SOBRE OS ANOS INICIAIS DE SUA CARREIRA

ELON LAGES LIMA: STUDY ABOUT THE EARLY YEARS OF YOUR CAREER

Antonio José Melo de Queiroz¹

RESUMO

A Matemática brasileira apresenta elevado grau de desenvolvimento e tal fato foi construído por esforço e dedicação de muitos indivíduos, um destes foi Elon Lages Lima. O referido professor escreveu uma quantidade razoável de livros de Matemática em diversas subáreas, além de ter escrito trabalhos de pesquisa com elevada originalidade. Neste trabalho apresentamos um breve panorama da carreira profissional do professor e matemático Elon Lages Lima, além disso, discutimos brevemente alguns artigos científicos e livros publicados por ele. Tratamos de alguns dados biográficos de Elon, desde os primeiros anos escolares, perpassando pela influência do memorável professor Benedito de Moraes, o início da profissão docente e a obtenção do doutorado em Matemática com uma tese que influenciou os rumos da Topologia Algébrica, além do início do percurso de pesquisador no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e em outras instituições. Elon, além de grande matemático, foi um exímio autor de livros de Matemática, sendo assim, discutimos alguns artigos científicos e livros publicados na fase inicial de sua carreira, entre as décadas de 1950 e 1960. Alguns destes textos tratam de assuntos da Topologia Algébrica, primeira área de pesquisa que despertou o interesse de nosso personagem, outros tratam de Topologia Geral e Topologia Diferencial. Destacamos que, para a realização deste trabalho fomos movidos pelos questionamentos: Qual a trajetória profissional de Elon Lages Lima? Quais as suas publicações iniciais? Qual a motivação para escrever textos de Matemática em um período de escasso estímulo institucional? Em consonância com as questões, o objetivo geral da pesquisa foi descrever, brevemente, os anos iniciais do percurso profissional de Elon Lages Lima através de seus artigos científicos e livros publicados. A pesquisa é qualitativa e exploratória, nela buscamos uma maior aproximação e compreensão do objeto de estudo, além disso, é de tipo documental e bibliográfico, pois a maior parte das fontes utilizadas são entrevistas concedidas pelo professor Elon Lages Lima, bem como, a análise de seus livros e artigos publicados no período de interesse. Destacamos como resultados percebidos na pesquisa e descritos neste trabalho: a qualidade dos artigos do professor Elon, visto que, alguns destes textos foram publicados em renomados periódicos internacionais e reconhecidos por seus pares; a relevância dos livros publicados, pois no Brasil ainda predominava a prática da tradução de textos didáticos do exterior, algumas destas publicações são pioneiras, em língua portuguesa, sobre o assunto em questão; a preocupação de Elon em estimular a produção de livros de Matemática por brasileiros. Por fim, destacamos a importância

¹ Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI). Professor assistente na Universidade Estadual do Ceará (UECE), Tauá, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Sólton Medeiros, S/N, CECITEC-UECE, Tauá, Ceará, Brasil, CEP: 60000-000. E-mail: antonio.queiroz@uece.br.

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-6932-129X>.



de estudos sobre a História da Matemática no Brasil como uma forma de compreensão da evolução desta ciência e seu ensino em nosso país.

Palavras-chave: Elon Lages Lima; história da Matemática; Matemática brasileira.

ABSTRACT

Brazilian mathematics has a high degree of development and this fact was built by the effort and dedication of many subjects, one of whom was Elon Lages Lima. The referred professor wrote a reasonable amount of mathematics books in several subareas, in addition to writing research papers with high originality. In this study, we present a brief overview of the professional career of professor and mathematician Elon Lages Lima, in addition, we briefly discuss some scientific works and books published by him. We treat with some biographical data of Elon, from the early school years, going through the influence of the memorable professor Benedito de Moraes, the beginning of his teaching career and obtaining of a doctorate in Mathematics with a thesis that influenced the direction of Algebraic Topology, beyond the beginning of his research career at the Institute of Pure and Applied Mathematics (IMPA) and other institutions. Elon, in addition to being a great mathematician, was an excellent author of Mathematics books, so we discussed some scientific articles and books published in the early stages of his career, between the 1950s and 1960s. Some of these texts deal with subjects from Algebraic Topology, the first area of research that aroused the interest of our character, other texts deal with General Topology and Differential Topology. We emphasize that, for the accomplishment of this work, we were moved by the questions: What is Elon Lages Lima's professional career? What are your initial publications? What is the motivation for writing mathematical texts in a period of scarce institutional stimulus? In line with the questions, the general objective of the research was to briefly describe the early years of Elon Lages Lima's professional career through his scientific articles and published books. The research is qualitative and exploratory, in which we seek a greater approximation and understanding of the object of study, in addition, it is of the documentary and bibliographic type, since most of the sources used are interviews granted by professor Elon Lages Lima, as well as, the analysis of your books and articles published in the period of interest. We highlight as results obtained in the research and described in this work: the quality of Professor Elon's articles, since, some of these texts were published in renowned international journals and recognized by his peers; the relevance of published books, since in Brazil the practice of translating didactic texts from abroad still prevailed, some of these publications are pioneers, in Portuguese, on the subject in question; Elon's concern with stimulating the production of Mathematics books by Brazilians. Finally, we highlight the importance of studies on the History of Mathematics in Brazil as a way of understanding the evolution of this science and its teaching in our country.

Keywords: Elon Lages Lima; history of Mathematics; Brazilian mathematics.

Introdução

Nos últimos anos, a Matemática brasileira alcançou um elevado grau de produção e qualidade, tal acontecimento pode ser verificado pelo fato de o Brasil pertencer ao grupo cinco da União Matemática Internacional, este é o grupo dos países que mais produzem pesquisa matemática de alta qualidade (IMPA, 2020). No entanto, o país investiu em ensino e pesquisa tardiamente, de modo que, até a década de 1930 tínhamos apenas exemplos isolados de matemáticos autodidatas que desbravaram,



timidamente, algumas fronteiras da área. Alguns destes nomes são: Joaquim Gomes de Sousa, Otto de Alencar e Theodoro Ramos (SILVA, 2013).

O matemático Elon Lages Lima iniciou sua carreira no momento seguinte ao citado anteriormente, pois na década de 1930 foi criada a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (USP) e a Faculdade Nacional de Filosofia (FNFfi) da Universidade do Brasil (UB), em que, Elon conclui a graduação nesta última. Tais instituições foram importantes para a ciência nacional, pois aliavam ensino e pesquisa e propunham o apoio institucional a produção científica.

Elon iniciou a graduação em Matemática no estado do Ceará e a concluiu na FNFfi, com bolsa do Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) para estudos sob orientação de Leopoldo Nachbin no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF). Nosso sujeito já demonstrava profundo interesse em seguir carreira docente, além do elevado talento para a Matemática. Em seguida, cursou mestrado e doutorado nos Estados Unidos e produziu uma relevante tese na área de Topologia Algébrica. Elon Lages, continuamente demonstrou o desejo de ser professor, e o concretizou com uma bela carreira no IMPA, também desejava escrever livros de Matemática em língua portuguesa para estimular os jovens interessados em seguir estudos.

A formação inicial, a pós-graduação e algumas produções bibliográficas do professor Elon foram realizadas ao longo das décadas de 1950 e 1960, assim, resolvemos investigar este período preambular de sua carreira, com foco em uma breve biografia e uma descrição preliminar de seus primeiros escritos científicos e livros. Vale destacar que as principais fontes analisadas foram entrevistas concedidas por Elon, seus artigos e livros, fato que torna a pesquisa de caráter bibliográfico e documental, além disso, o percurso metodológico trilhado para a elaboração deste estudo o qualifica como exploratório, uma vez que descrevemos e nos aproximamos dos fatos e textos iniciais da trajetória profissional de Elon Lages. Esta metodologia foi utilizada para o cumprimento do seguinte objetivo: Descrever os anos iniciais da carreira de Elon Lages Lima através de uma análise preliminar de algumas obras desta época.

Breve biografia

Alagoano de Maceió, Elon Lages Lima nasceu em 1929 e era filho de um pequeno comerciante e uma dona de casa, seus primeiros anos escolares ocorreram em uma pequena escola. Porém, o período marcante de sua infância e adolescência foi o



curso ginásial (atual ensino fundamental II) realizado no Colégio Batista Alagoano, pois nesta fase foi aluno de Benedito de Moraes, memorável professor, lembrado assim por Elon, “Ele era realmente uma personalidade; autodidata, acho que não passou do ginásio, mas era um homem inteligetíssimo. [...]era um grande professor da disciplina.”(LIMA, 2003, p. 91-92).

Lima (2003) também destacou a capacidade que o referido professor tinha para influenciar seus estudantes a prosseguirem no caminho da Matemática, pois além dele próprio, Manfredo do Carmo, Alexandre Magalhães, Roberto Ramalho e Edmilson Pontes, foram alunos de Benedito de Moraes e seguiram carreira científica em Matemática. Em outra entrevista, Elon destaca que foi “Realmente a pessoa que mais me ensinou a Matemática.”(LIMA, 2002, p. 97).

Após o ginásio, Elon ainda estudou dois anos do curso científico em Maceió e transferiu-se para Fortaleza-CE, ficou um tempo na Escola de Cadetes do Exército e posteriormente iniciou o que seria uma bela página de sua carreira, a atuação na docência. Seu primeiro emprego foi no Ginásio Farias Brito, era professor de várias disciplinas, porém em pouco tempo, assumiu o ensino de Matemática no curso ginásial, Elon recorda a importância de Benedito de Moraes “[...]a coisa mais fácil que eu faria seria dar aula de Matemática, porque eu me lembrava do professor Benedito, das aulas dele, então eu me guiaria por ele.”(LIMA, 2002, p. 99). Lembramos que neste período, Lima ainda não havia concluído o 2º grau (atual ensino médio).

Ao fim do primeiro ano de docência, Elon Lages fez concurso para professor do Colégio Estadual do Ceará, foi aprovado, ministrava aulas durante o dia, enquanto estudava à noite. Em seguida, iniciou curso superior de Matemática na Faculdade Católica de Filosofia do Ceará, instituição privada e que segundo ele “o curso era fraquíssimo.” (LIMA, 2002, p. 100). Ainda sobre este período, o professor lembra que leu, independentemente, obras que serviram de referência, como livros *A survey of modern Algebra* de Birkhoff-MacLane e *A course of pure Mathematics* de G. Hardy, dentre outros.

Em 1952, Elon transferiu-se para o curso de Matemática da FNFi, no Rio de Janeiro, contando com uma bolsa de iniciação científica do CBPF a ser orientada por Leopoldo Nachbin e Maurício Peixoto. No mesmo ano, o IMPA foi criado e Elon Lages tornou-se um de seus primeiros bolsistas e relata as atividades desenvolvidas sob os olhares dos professores citados acima, “Eles escolhiam um livro, que os alunos



deveriam estudar e depois expor em seminário. Eles assistiam, naturalmente, e orientavam, davam opiniões.” (LIMA, 2003, p. 93).

Após concluir a graduação, em 1953, o professor Elon ministrou um curso sobre espaços métricos, em uma cátedra sob a responsabilidade da professora Maria Laura Mouzinho, as notas de aula deram origem à sua primeira publicação, *Topologia dos Espaços Métricos*, à disposição do público em 1954 na coleção *Notas de Matemática*. Camacho (2017) destaca que tal obra atesta a vocação, desde o início da carreira, para a escrita de livros.

Em 1954, o matemático foi para a Universidade de Chicago com o objetivo de realizar o curso de doutorado, Lima (2003) destaca que a intenção inicial era estudar Análise Funcional, área de pesquisa de Leopoldo Nachbin, seu orientador de iniciação científica, porém ao chegar nos Estados Unidos, os professores Paul Halmos, Irving Kaplansky e Irving Segal, que seriam seus possíveis orientadores, haviam perdido o interesse por este campo de investigação. Sendo assim, estudou, independentemente, notas de aula de Topologia, de Edwin Spanier, e desenvolveu interesse nesta área e em Geometria Diferencial, por fim, dada a boa relação com Spanier veio a decisão da escolha de orientador para o doutoramento, “Gostava mais do tipo de Matemática do Chern, mas me dava melhor com o Spanier. Éramos amigos. Por essa amizade, acabei fazendo o doutorado com ele.” (LIMA, 1989, p. 35).

Com a conclusão do curso de doutorado em 1958, veio a defesa de uma tese que tornou-se referência em Topologia Algébrica, Spanier (1989, p. 25) destaca que “É claro que as técnicas introduzidas por Lima em sua tese tiveram um impacto duradouro na Topologia e continuarão a representar um papel importante em desenvolvimentos futuros.” No próximo tópico comentamos este tema em maiores detalhes.

Ao retornar ao Brasil, em 1958, Elon iniciou sua longa jornada como pesquisador do IMPA, foi o primeiro bolsista do instituto a obter doutorado no exterior. Publicou a tese em dois artigos na *Summa Brasiliensis Mathematicae*, em 1959 e 1960, este periódico nacional foi criado na Fundação Getúlio Vargas (FGV) e transferido para a responsabilidade do IMPA. Entre 1958 e 1962, o matemático Elon Lages esteve ligado ao IMPA, porém intercalando com breves períodos na Universidade da Califórnia. (LIMA, 2003).

Elon relata a percepção na dificuldade que teria para realizar pesquisas em Topologia Algébrica, destacando que no Brasil da época não haviam interessados no



assunto. (LIMA, 2001). É importante destacar que havia ao menos uma exceção, o professor Carlos Benjamim Lyra, que realizou o trabalho de doutoramento na Universidade de São Paulo (USP), na área de Topologia Algébrica, com defesa em 1957.

Lima (2001) comenta que resolveu mudar de área de interesse para pesquisas futuras, partindo para a Topologia Diferencial, que estava engatinhando com os trabalhos de John Milnor, Rene Thom e Lev Pontryagin. Além disso, destaca, “passei a me dedicar à Topologia Diferencial, principalmente por influência do Smale, que esteve no Brasil entre 1961 e 1962.” (LIMA, 2002, p. 102). Nessa época, o professor Elon publicou dois livros de grande longevidade e sucesso, *Introdução às Variedades Diferenciáveis* e *Introdução à Topologia Diferencial*, ambos ligados à sua nova área de pesquisa. O primeiro, foi resultado de um curso pioneiro ministrado na Universidade do Rio Grande do Sul e o segundo, nasceu a partir das notas de aulas para um curso ministrado no 3º Colóquio Brasileiro de Matemática (CBM), realizado em Fortaleza-CE, em 1961.

Os dois anos seguintes, 1963 e 1964, foram os mais produtivos, do ponto de vista da pesquisa científica, para o professor. Nesse período, esteve nos Estados Unidos, com o auxílio de uma bolsa da Fundação Guggenheim, permaneceu um ano no Institute for Advanced Study (IAS) e um ano na Universidade de Columbia. (LIMA, 1989). Elon relembra essa fase, “Nessa época, fiz uns trabalhos sobre campos comutativos de vetores, assunto completamente diferente, não tinha nada haver com minha tese, e comecei a me interessar por questões de Topologia Diferencial.”(LIMA, 2002, p. 102).

Em 1964, Elon Lages demonstrou um importante resultado nesta área, conhecido como teorema do posto, o trabalho foi reconhecido por John Milnor, especialista neste campo de pesquisa e propositor do problema, indicando que deveria ser publicado no respeitado periódico *Annals of Mathematics*. (LIMA, 1989).

Ainda em 1964, Lima retornou ao Brasil, assumiu o posto de professor e diretor adjunto do Instituto de Matemática da Universidade de Brasília, havia recebido convite de Zeferino Vaz, que reestruturava a universidade. Tal estadia na capital federal não durou mais que um ano e meio, por problemas com os militares que controlavam a instituição, Elon e vários professores demitiram-se. Posteriormente, esteve um período na Universidade do Ceará, época da implantação do curso de mestrado. Trabalhou em universidades americanas. E finalmente, a partir de 1968, fixou-se no Brasil, exercendo



suas atividades no IMPA, intercaladas com breves períodos de afastamento, por exemplo, para a criação da pós-graduação em Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. (LIMA, 2003).

Elon Lages foi um dos principais personagens no desenvolvimento do IMPA, além de pesquisador e professor do instituto, foi diretor e vice diretor em vários mandatos, também foi presidente da Sociedade Brasileira de Matemática, instituição gerada com apoio do IMPA. E desenvolveu diversas outras atividades de gestão e consultoria em órgãos públicos e privados como a FGV, Ministério da Educação, CNPq, Academia Brasileira de Ciências e outros. Na faceta de escritor, deu uma colaboração sem precedentes, escreveu mais de 40 livros, que trataremos a seguir de alguns destes textos, criou as coleções de livros Projeto Euclides e Matemática Universitária, também idealizou e muito contribuiu para a Revista do Professor de Matemática. Todas estas atividades destacam o espírito docente e o interesse em criação e difusão de uma bibliografia matemática nacional. E, assim, na próxima seção, apresentamos uma breve discussão sobre os primeiros trabalhos de pesquisa do professor Elon.

Artigos científicos e um pouco do contexto

O primeiro artigo publicado, citado no Currículo Lattes do professor Elon, foi intitulado *Grupos de Isotopia*, publicado em 1957 no periódico português Gazeta de Matemática. Lima (1957) destaca que os grupos de isotopia provêm da operação de composição de homeomorfismo e tais objetos são negligenciados pelos topólogos por não satisfazerem alguns axiomas abstratos da área. Ainda discorre que estes grupos são invariantes algébricos e que no texto encontrará o grupo da esfera tridimensional e alguns isomorfismos com R^n , S^n e B^{n+1} . É um texto na área de Topologia Algébrica, lembramos que nessa época, Elon cursava doutorado e elaborava a tese neste campo de pesquisa.

O trabalho apresenta-se em um formato didático e intuitivo, o autor define conceitos e objetos, utiliza uma linguagem geométrica, exhibe vários exemplos e demonstra resultados formais, concluindo com teoremas sobre grupos de isotopia de variedades. Outro ponto a ser destacado é o agradecimento que Elon faz ao colega Morris Hirsh, matemático estadunidense e seu contemporâneo de doutorado, mostrando



a boa relação que o professor tinha com matemáticos que tornaram-se referência em seus campos de pesquisa.

Em 1958, o professor Elon concluiu o curso de doutorado na Universidade de Chicago, sua tese foi muito elogiada e originou a publicação de dois artigos na *Summa Brasiliensis Mathematicae*, em 1959 e 1960, no quarto e último volume deste periódico. A *Summa* foi criada na FGV em 1945 e publicou fascículos de periodicidade variada até 1960, sendo publicados trabalhos relevantes, como a tese de Elon Lages e de Félix Browder e textos de membros do grupo Bourbaki.

O trabalho doutoral de nosso professor consistiu de algumas etapas: a primeira era estender resultados de dualidade, obtidos por Edwin Spanier e John Henry Constatine Whitehead, para espaços mais gerais que CW-complexos; a segunda etapa era garantir a validade de resultados que existiam na teoria de homotopia para teoria da categoria S que fora criada pelos matemáticos citados acima (SPANIER, 1989). Dieudonné (1989) destaca que Lima introduziu a noção de espectro, não tomando somente uma sequência de suspensões, mas definindo espaços mais gerais e aplicações associadas, assim resolveu o primeiro problema.

Para a outra questão, Lima usou a ideia de espectro para mostrar que a teoria de obstrução poderia ser usada nesta categoria, que existiam decomposições do tipo de Postnikov e que os teoremas de homotopia eram válidos nesta nova categoria (SPANIER, 1989). Edwin Spanier ainda destaca que utilizou a noção de espectro, introduzida por Elon, assim como outros matemáticos, por exemplo, George Whitehead e conclui “É claro que as técnicas introduzidas por Lima em sua tese tiveram um impacto duradouro na Topologia e continuarão a representar um papel importante em desenvolvimentos futuros.” (SPANIER, 1989, p. 25).

Percebemos pelos escritos de matemáticos influentes na comunidade científica, como Edwin Spanier e Jean Dieudonné que a tese, apesar de ser o primeiro trabalho de pesquisa do professor Elon, foi de grande relevância para o desenvolvimento da Topologia Algébrica. Lima ainda publicou um pequeno resumo deste trabalho na Revista de la Unión Matemática Argentina, no número 20, em 1962, por ocasião de sua participação em um evento na Argentina. A partir de 1959, nosso personagem percebeu a dificuldade de realizar pesquisas com este nível de abstração no Brasil e resolveu migrar para a Topologia Diferencial, influenciado por Stephen Smale e John Milnor.



Lima (1989) destaca a contribuição dos matemáticos citados acima para a mudança de área de pesquisa ao lembrar que em 1962 decidiu solicitar uma bolsa de estudos da Fundação Guggenheim para pesquisar no IAS, em Princeton, por saber que teria proximidade com ambos. Assim, permaneceu até 1963 no IAS e mais um ano na Universidade de Columbia, onde Smale trabalhava. Nesse período, esteve envolvido em pesquisas para a solução de um problema proposto por John Milnor sobre campos de vetores comutativos em variedades. E, principalmente, trabalhou para demonstrar um resultado conhecido por Teorema do Posto.

Elon (2003) enfatiza que estes dois anos foram de intenso trabalho de pesquisa e que mantinha contato constante com Stephen Smale para discussões de temas de investigação. A seguir, apresentamos brevemente alguns artigos publicados pelo professor durante esta fase.

Em 1963, Lima publicou o artigo *Commuting vector fields on 2-manifolds*, no número 3, volume 69 do periódico *Bulletin of the American Mathematical Society*. Este texto relata, brevemente, a demonstração de que campos de vetores comutativos em variedades bidimensionais tem singularidade em comum. Este tipo de pesquisa foi sugerida por John Milnor. (LIMA, 1963). Uma observação importante é que, o texto traz apenas um esboço do teorema principal, conjecturamos que era um trabalho em fase de elaboração. Vale destacar que a única referência bibliográfica é um trabalho análogo, para a esfera bidimensional, do próprio Elon, que estava submetido para publicação em outro periódico.

O artigo *Commuting vector fields on S^2* foi publicado no número 1, volume 15, do periódico *Proceedings of the American Mathematical Society*, em fevereiro de 1964. Neste artigo, Lima demonstrou a existência de singularidade comum em campos de vetores comutativos na esfera bidimensional e dá indicativos que o resultado se estende facilmente para outras superfícies, além de mencionar estar hábil para provar sua validade em qualquer variedade bidimensional, inclusive cita o texto que foi discutido no parágrafo anterior (LIMA, 1964a), fato que reforça nossa conjectura de que o teorema geral ainda estava em construção quando da publicação daquele trabalho em 1963.

O referido teorema foi apresentado em detalhes no artigo *Common singularities of commuting vector fields on 2-manifolds* publicado no periódico *Commentarii Mathematici Helvetici*, volume 39, referente aos anos 1964 e 1965. Elon Lages (1964b)



inicia o texto comentando que provará em detalhes o resultado anunciado em 1963 e prossegue apresentando o problema de forma didática. O trabalho contém 4 secções e um apêndice, o autor inicia comentando uma série de definições básicas para a compreensão do resultado final, o que nos permite destacar o apego que Elon tinha com ensino de Matemática, mesmo em suas publicações científicas. Em seguida são demonstrados alguns lemas técnicos para a preparação da leitura do teorema principal, que é apresentado no último tópico.

Algumas observações sobre estes textos são necessárias. Primeiro, a rede de relações e trocas de informações durante a realização de tais pesquisas, Elon Lages refere-se em algumas situações a Robert Ellis, H. Edwards, Stephen Smale e Maurício Peixoto. Assim, percebemos a possibilidade de discussões realizadas sobre estes temas de pesquisas, correções nas versões preliminares da investigação e outras contribuições vindas das relações com matemáticos interessados no assunto.

A segunda observação refere-se à forma como Lima encarava um problema matemático, “Eu costumo abordar pelos lados mais fáceis primeiro. Um problema em dimensão mais baixa, primeiro na esfera S^2 , depois numa superfície de gênero qualquer de dimensão 2.”(LIMA, 2002, p. 103). Observamos claramente essa posição ao discutir os textos citados acima, o autor resolveu a questão para a esfera S^2 e outras superfícies de mesma dimensão, partindo para a solução em uma variedade qualquer de dimensão dois. Por fim, destacamos que os dois textos com soluções preliminares foram publicados enquanto o autor estava no IAS, em Princeton, porém a publicação do último texto citado ocorreu quando ele já estava na Universidade de Columbia, em Nova Iorque.

Ainda durante essa temporada em solo americano, Elon Lages resolveu um importante problema em Topologia Diferencial, publicado sob o título *Commuting vector fields on S^3* , em janeiro de 1965, no número 1 do volume 81 do periódico *Annals of Mathematics*. O problema resolvido foi proposto a Lima pelo matemático Stephen Smale e também fazia parte de uma lista de questões matemáticas propostas por John Milnor em 1963. Conforme discorre Lima (1965) a indagação era: A esfera tridimensional admite dois campos de vetores comutativos e linearmente independentes em todos os pontos?

Elon Lages demonstrou que a resposta é negativa e este resultado ficou conhecido como teorema do posto, pois John Milnor havia definido que o posto de uma



variedade é o número máximo de campos de vetores linearmente independentes e comutativos, assim Lima provou que o posto de S^3 é um. Em verdade, o resultado é mais geral, ele demonstrou que o posto de qualquer variedade tridimensional, com grupo fundamental finito, é um.

Lima (1989) relembra que Milnor gostou da resolução do problema e sugeriu que a publicasse no prestigiado periódico *Annals of Mathematics*. Além disso, destacamos que o matemático Harold Rosenberg, atualmente pesquisador do IMPA, trabalhava na mesma questão e na mesma sala que Elon ocupava na Universidade de Columbia, também o matemático russo Sergei Novikov, medalhista fields em 1970, trabalhava nesta área de pesquisa.

Assim, observamos que Elon Lages resolveu uma interessante questão matemática proposta por dois matemáticos influentes no cenário internacional e que instigou a curiosidade e o esforço de outros pesquisadores da área, fatos que comprovam a importância do problema para a Topologia Diferencial.

Alguns livros de Topologia

Simultaneamente com a intensa atividade de pesquisa realizada na década de 1960, Elon Lages escreveu alguns livros que foram importantes para a comunidade matemática brasileira da época e que ainda apresentam grande vitalidade na utilização por programas de pós-graduação em Matemática. O professor escreveu, ao longo da carreira, mais de 40 livros. Destacaremos três dessas obras, *Topologia dos Espaços Métricos*, publicada em 1954 pela coleção Notas de Matemática, *Introdução às Variedades Diferenciáveis*, publicada em 1960 pelo Instituto de Matemática da Universidade do Rio Grande do Sul (atual Universidade Federal do Rio Grande do Sul) e *Introdução à Topologia Diferencial*, publicada em 1961 pelo IMPA, como texto de um curso no 3º CBM.

O livro *Topologia dos Espaços Métricos* foi escrito após a conclusão da graduação em Matemática na UB, por ocasião da oportunidade em ministrar um curso de Topologia Geral na mesma universidade, Lima (1954) destaca que o livro é referente à primeira parte do curso que foi destinado a alunos do 3º ano de Matemática e as aulas ocorreram no âmbito da cátedra de Geometria, cuja professora responsável era Maria Laura Mousinho.



O livro presta-se a uma boa introdução à Topologia, apresenta conceitos básicos sobre espaços métricos e funções contínuas entre estes objetos, também traz conteúdos de sequências de pontos em espaços métricos e sua relação com a topologia, além de apresentar espaços com características específicas e clássicas para o estudo na área, como espaços compactos, separáveis e completos.

É interessante ressaltar que Elon Lages estendeu este livro com a inclusão de novos assuntos e o utilizou como notas de aula para um curso ministrado em 1975 no 10º CBM. Seguindo, em 1977 a obra foi novamente publicada com o acréscimo de diversas listas de exercícios, na coleção Projeto Euclides (IMPA), sob o novo título de *Espaços Métricos*. Este livro ganhou o Prêmio Jabuti da Câmara Brasileira do Livro em 1978.

O texto *Introdução às Variedades Diferenciáveis*, publicado em 1960 no Rio Grande do Sul, também é um texto introdutório ao assunto e resultado de um curso ministrado em 1959 na universidade daquele estado. Lima (2002) destaca que foi o primeiro curso, sobre o assunto, ministrado naquela instituição e que marcava o seu ingresso na área de pesquisa da Topologia Diferencial. Lembramos que, nessa época, Elon já era doutor, pesquisador do IMPA e havia elaborado uma tese em Topologia Algébrica que alcançou um grande sucesso.

O texto apresenta um estilo leve e geométrico, além de utilizar uma linguagem clara e intuitiva. É composto de três conteúdos, uma revisão do cálculo diferencial em espaços euclidianos, um estudo sobre superfícies nestes espaços e uma introdução aos conteúdos de variedades diferenciáveis. Ênfase merece ser dada a apresentação dos teoremas da função inversa e implícita, aos diversos exemplos de superfícies diferenciáveis e, mesmo sendo um texto introdutório, a apresentação do teorema de Whitney. (LIMA, 1960).

Camacho (2009) lembra que, ao decidir vir do Peru para cursar doutorado em Matemática no Brasil, tinha duas opções, ir para o IMPA, ou ir para Brasília, onde Elon Lages estava trabalhando. Ele resalta que não teve dúvidas, resolveu pela capital do país, pois mesmo sem conhecer Elon, havia lido seu livro de variedades diferenciáveis e estava encantado com o estilo do autor.

O livro *Introdução à Topologia Diferencial* foi publicado em 1961 pelo IMPA, escrito com o objetivo inicial de ser texto de um curso ministrado no 3º CBM, realizado no Ceará. Lima (1961) apresenta, de forma leve e intuitiva, no prefácio, as diversas



subáreas da Topologia, com destaque para a Topologia Diferencial. O texto divide-se em quatro capítulos: o primeiro, introdutório, discute fatos básicos sobre variedades diferenciáveis. O segundo trata da homotopia em variedades, define a importante idéia de grau de uma aplicação e classifica as aplicações através da homotopia. O capítulo seguinte aborda campos vetoriais e suas singularidades, além de trazer o útil conceito de característica de uma variedade. Por fim, o quarto capítulo demonstra o teorema da curvatura integral.

Essa obra destaca-se por sua longevidade, após a primeira publicação em 1961, ainda foi republicada em 1968 e mais recentemente, em 2001, passou a fazer parte da coleção *Monografias* do IMPA e, em 2016, da coleção *Publicações Matemáticas*, também do IMPA. Além disso, destaca-se que o texto é referência bibliográfica indicada em cursos de Topologia Diferencial de várias instituições no país, por exemplo, IMPA, Universidade Estadual de Campinas e Universidade Federal de São Carlos, também é obra de referência de cursos de graduação da USP.

Considerações finais

Ao longo do texto percebemos o trabalho, de elevada qualidade, realizado pelo professor Elon Lages já no início da carreira de pesquisador, entre as décadas de 1950 e 1960. Observamos que, embora sua tese tenha sido publicada em periódico brasileiro sem grande expressão internacional, ela representou renovação para uma subárea da Topologia Algébrica, introduziu conceitos e os aplicou, além de estimular novas aplicações por outros matemáticos. Assim, em seu primeiro trabalho científico, Lima entrou para a História, literalmente, pois seu nome figura em livros de História da Topologia.

Após o trabalho exitoso na tese, Elon passou a ter interesse em Topologia Diferencial e, entre os anos 1963 e 1964, elaborou uma série de trabalhos que relacionavam as noções de campos de vetores em variedades e suas singularidades com o conceito de comutatividade, além de ter demonstrado o importante teorema do posto. Este último problema era do interesse de matemáticos como Stephen Smale, ganhador da medalha fields em 1966 e John Milnor, ganhador da medalha fields em 1962 e um dos principais formuladores dos estudos atualizados em Topologia Diferencial. Desta forma, percebemos que esses problemas solucionados por Lima tinham grande



relevância para a área de pesquisa, uma vez que, despertavam a curiosidade de matemáticos reconhecidos na comunidade.

Além da pesquisa científica, observamos que ainda no início da carreira, Elon Lages publicou alguns livros, a maioria deles eram resultados de notas de aulas de cursos ministrados, reforçando a percepção de seu talento e interesse primordial pela docência. Alguns destes cursos foram pioneiros nas instituições em que ocorreram e da mesma forma, algumas de suas obras foram pioneiras, como textos em língua portuguesa, escrito por brasileiro, ressaltando um de seus compromissos, a colaboração para a produção de bibliografia matemática em língua portuguesa.

De acordo com os parágrafos anteriores, alguns resultados percebidos foram, o comprometimento do professor nas atividades de ensino, a valorização da produção de livros de Matemática em língua portuguesa e a elevada qualidade científica de seus textos publicados no período de interesse.

Portanto, acreditamos que os objetivos da pesquisa foram atingidos. Uma vez que, traçamos uma breve biografia do professor Elon, permitindo uma maior aproximação com sua história e contexto. Além disso, discutimos brevemente seus principais trabalhos de pesquisa em Topologia e as circunstâncias de sua elaboração. Também apresentamos, de forma sucinta, algumas obras matemáticas pioneiras nas áreas em que foram escritas.

Referências

CAMACHO, C. Cerimônia de abertura. *In: CONFERÊNCIA EM HOMENAGEM A ELON LAGES LIMA – 80 ANOS*, 2009, Rio de Janeiro. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=chEHE4Su5Ss&t=387s>>. Acesso em: 23 mar. 2020.

CAMACHO, C. Homenagem a Elon Lages Lima. *In: HOMENAGEM A ELON LAGES LIMA - PAPMEM*, 2017, Rio de Janeiro. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=6F3AkO1-jU8&t=1820s>>. Acesso em: 25 mar. 2020.

DIEUDONNE, J. **A History of Algebraic and Differential Topology, 1900-1960**. Boston; Basel: Birkhäuser, 1989.

IMPA. **Brasil é promovido à elite da matemática mundial**. Disponível em: <<https://impa.br/noticias/brasil-e-promovido-a-elite-da-matematica-mundial/>>. Acesso em: 15 jun. 2020.



LIMA, E. L. **Topologia dos Espaços Métricos**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1954.

LIMA, E. L. Grupos de Isotopia. **Gazeta de Matemática**, Lisboa, n. 66/67, p. 9-17, mar/jun., 1957.

LIMA, E. L. **Introdução às Variedades Diferenciáveis**. Porto Alegre: Editora Meridional, 1960.

LIMA, E. L. **Introdução à Topologia Diferencial**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1961.

LIMA, E. L. Commuting Vector Fields on 2-Manifolds. **Bulletin of the American Mathematical Society**, RhodeIsland, v. 39, n. 3, p. 366-368, 1963.

LIMA, E. L. Commuting Vector Fields on S^2 . **Proceedings of the American Mathematical Society**, RhodeIsland, v. 15, n. 1, p. 138-141, fev. 1964a.

LIMA, E. L. Common Singularities of Commuting Vector Fields on 2-manifolds. **Commentarii Mathematici Helvetici**, Zurique, v.39, p. 97-110, 1964b.

LIMA, E. L. Commuting Vector Fields on S^3 . **Annals of Mathematics**, Princeton, v. 81, n. 1, p. 70-81, jan. 1965.

LIMA, E. L. Elon Lages Lima Comenta sua Vocação de Matemático e Divulgador da Matemática. [Entrevista cedida a] José Felipe Voloch e Laura Martignon. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 9/10, p. 33-50, dez. 1989.

LIMA, E. L. Diálogo em janeiro com Elon Lages Lima. [Entrevista cedida a] Francisco José Craveiro de Carvalho. **Gazeta de Matemática**, Lisboa, n. 140, p. 5-16, jan. 2001.

LIMA, E. L. Entrevista: Elon Lages Lima. [Entrevista cedida a] Circe Mary Silva da Silva. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 33, p. 97-120, dez. 2002.

LIMA, E. L. Elon Lages Lima. In: PALIS, J.; CAMACHO, C.; LIMA, E. L. (orgs.) **IMPA 50 anos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2003. p. 91-119.

SILVA, C. P. **Início e Consolidação da Pesquisa em Matemática no Brasil**. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2013.

SPANIER, E. H. Spanier comenta a influência da tese de Lima na Topologia Algébrica. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 9/10, p. 20-25, dez. 1989.

Recebido em: 20/05/2020
Aprovado em: 28/06/2020