NÚMEROS IRRACIONAIS: IRRACIONALIDADE E INCOMENSURABILIDADE

IRRATIONAL NUMBERS: IRRATIONALITY AND INCOMENSURABILITY

***Francisco Ellivelton Barbosa*[1]**
***Damião Macêdo de Sousa*[2]**
***Maria Irilene Alves dos Santos*[3]**

Resumo
Este trabalho tem como objetivo apresentar a irracionalidade e incomensurabilidade dos números irracionais, através de uma abordagem histórica se utilizando de demonstração matemática.. Para dar suporte ao estudo proposto, foi realizada uma revisão bibliográfica acerca de como historicamente se deu a produção dos Números Irracionais e sobre as dificuldades encontradas pelos gregos na construção da idéia de existência dos mesmos. É apresentado algumas das primeiras e principais relações matemáticas que envolvem as figuras geométricas, em que se apresentavam proximidades com os números irracionais. Desde a Grécia antiga o debate sobre a existência dos irracionais vem sendo feito, mas apenas no século XIX, matemáticos como Cantor e Dedekind, elaboraram a continuidade da reta numérica, onde com seus teoremas colocaram os números irracionais juntamente com os racionais na reta numérica. Dando aos irracionais o estatuto de número.

Palavras-chave: Irracional; Incomensuráveis; Proporção.

Abstract
This work aims to present the irrationality and incommensurability of irrational numbers, through a historical approach if using mathematics. To support the study studied, a bibliographic review was carried out on how historically the production of irrational numbers took place and on the difficulties encountered by the Greeks in the construction of their ideas. He presented some of the first and main mathematical relationships involving geometric figures, which are presented with irrational numbers. Since ancient Greece or the debate over the presence of irrational elements, it has been done, but only in the 19th century, mathematicians like Cantor and Dedekind, developed a numerical regression research, where their theorems placed irrational numbers based on rational numbers in America. Giving the irrational or statisticians the number.

Keywords: Irrational; Immeasurable; Proportion.

[1] ellivelton.barbosa@hotmail.com.
[2] damiaomsousa3@gmail.com.
[3] alvesirilene@gmail.com.

Introdução

A matemática está presente na história do homem desde os tempos mais remotos e nesse contexto se insere a ideia de contar. Para tanto, atividades simples como a correspondência entre ovelhas de um rebanho e pedrinhas contidas em pequenos sacos, possibilitaram uma noção intuitiva sobre contagem, que posteriormente propiciaram o desenvolvimento teórico do conceito de número.

Segundo Ifrah (2009), erigida sem dúvida sobre bases empíricas, a invenção dos números deve ter correspondido a preocupações de ordem prática e utilitária. Aqueles que guardavam rebanhos de carneiros ou de cabras, por exemplo, precisavam ter certeza de que, ao voltarem do pasto, todos os animais haviam entrado no curral.

Com a necessidade de se efetuar contagens mais extensas, o processo de contar teve de ser sistematizado. Sendo assim, vários sistemas de numeração foram criados, dentre eles, o sistema sexagesimal criado pelos babilônios de 2000 a.C., até se chegar ao sistema de numeração posicional decimal que utilizamos. Idealiza-se que depois de ter utilizado os números para contar, medir e calcular, o homem passou a investigar e estudar a natureza e propriedades dos números (PEREIRA, 2018). Sob essa perspectiva, surge o conjunto dos números naturais denotado por N .

Posteriormente, a partir da expansão comercial manifesta-se a ideia de número negativo, especialmente, na busca pela resolução de situações-problemas, os comerciantes em suas negociações passaram a utilizar os símbolos + e − para expressar lucros e prejuízos. Desse modo, durante essa época, os matemáticos desenvolveram artifícios nos quais realizavam operações com os sinais positivos e negativos, resultando no conjunto dos números inteiros, denotado por Z , constituindo-se dos números naturais, seus respectivos opostos e pelo zero.

Nesse contexto, os números inteiros não eram suficientes para suprir necessidades básicas referentes a medição de várias quantidades com por exemplo, comprimento, peso e tempo. Foi a partir dessa necessidade que os povos antigos começaram a trabalhar com frações, desse modo surge a definição de número racional, como o quociente p/q , sendo p e q números inteiros e $q \neq 0$, tal conjunto é denotado por Q. O sistema dos números racionais é suficiente para propósitos práticos envolvendo medições, uma vez que ele contém todos os inteiros e todas as frações (EVES, 2011).

Segundo Pommer (2012, apud Pereira, 2018), a descoberta de que as frações, isto é, os números racionais não são suficientes para as realizações das atividades humanas foi feita pelos gregos, em meados do século V a.C. A referida descoberta ocorreu mediante a estudos sobre a incomensurabilidade de grandezas, particularmente do problema que consistia em provar que a diagonal e o lado unitário de um quadrado não admitem uma unidade em comum. A partir de problemas como este que surgiu a necessidade de números que ainda não existiam, a saber, os números irracionais, posteriormente denotado por $R - Q$.

O presente trabalho se justifica por ser de ampla importância para a história da matemática, principalmente em relação a origem dos números irracionais e os estudos que levaram até a aceitação dos irracionais como número e posteriormente o surgimento dos números reais.

Diante de tal perspectiva de surgimento e desenvolvimento dos conjuntos numéricos de acordo com as necessidades humanas, este trabalho visa apresentar a irracionalidade e incomensurabilidade dos números irracionais, através de uma abordagem histórica se utilizando de demonstração matemática. Quanto à metodologia, a técnica é bibliográfica, com abordagem qualitativa. A revisão bibliográfica ocorreu acerca de como historicamente se sucedeu a produção dos Números Irracionais e sobre as dificuldades encontradas pelos gregos na construção da idéia de existência dos mesmos.

Referencial Teórico - Números Irracionais.

Evidenciamos que tanto os números irracionais quanto as frações, isto é, os números racionais, surgiram pelas necessidades do cotidiano, seja para a simples contagem de objetos que os números inteiros não davam conta ou a medição de inúmeras quantidades, como o comprimento, peso e tempo.

> Para os pitagóricos, todas as grandezas (comprimento, área, volume,...) podiam ser associadas a um número inteiro ou a uma razão entre dois números inteiros. Na qual, acreditava-se que os números racionais eram suficientes para comparar, por exemplo, segmentos quaisquer de reta. Dados dois segmentos, supunham que existia sempre um segmento que “cabia” um número inteiro de vezes num deles e um número inteiro de vezes no outro. Nesse caso, os segmentos eram comensuráveis. (BONGIOVANNI, 2005, p. 91) .

Dessa forma, dizer que duas grandezas A e B são comensuráveis, significa dizer que admitem uma medida em comum, ou seja, podem ser descritas em função de uma terceira grandeza u, tal que: $A = nu$ e $B = mu$. Assim, dados os segmentos AB e CD, dizer que a razão entre $\frac{AB}{CD}$ é o número racional $\frac{m}{n}$, significa que existe um terceiro segmento EF tal que AB seja m vezes EF e CD seja n vezes EF. Veja a representação abaixo. Observe que

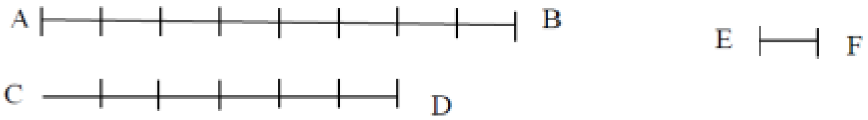

Figura 1
Fonte: Autoria Própria.

Na época do matemático Pitágoras (séc. VI a.C.), acreditava-se que dado quaisquer dois segmentos, AB e CD, seria sempre possível encontrar um terceiro segmento EF contido um número inteiro de vezes em AB e outro número inteiro de vezes em CD, exprimimos tal situação afirmando que EF é um submúltiplo comum de AB e CD.

Desse modo, dois segmentos são ditos comensuráveis justamente por ser possível medi-los ao mesmo tempo, com a mesma unidade EF. No entanto, nem sempre dois segmentos quaisquer são comensuráveis. Isto é, existem segmentos AB e CD sem unidade comum com o segmento EF. Os chamados segmentos incomensuráveis, que segundo Ávila (2006), resultou no surgimento dos números irracionais. Essa descoberta marcou profundamente o desenvolvimento da matemática grega.

Grandezas Incomensuráveis.

Como vimos na seção anterior no período de Pitágoras acreditava-se que os números racionais fossem suficientes para comparar segmentos de reta. Assim, a descoberta de grandezas incomensuráveis, isto é, dos números irracionais, “representou um momento de crise do desenvolvimento da matemática”, (MOSCIBROSKI, 2002, p. 11).

Tamanho foi o escândalo entre os gregos que o pitagórico responsável por essa descoberta, Hípaso de Metaponto, foi perseguido e condenado à morte. Eves (2011), fala acerca do desfecho dessa história:

> Muitas são as versões para o final dessa história, algumas lendas contam que o pitagórico Hípaso foi lançado ao mar, pela sua ímpia de contar o segredo a estranhos, já outra versão da história diz que ele foi expulso da escola

> pitagórica, e que até ergueram um túmulo, como se o mesmo estivesse morto (EVES, 2011).

A descoberta dessas grandezas incomensuráveis, há mais de 2500 anos, teve início pelos gregos ao observar que o comprimento de um quadrado de lado unitário não pode ser expresso por nenhum número racional, isto é, o lado e a diagonal de um quadrado são incomensuráveis. Com efeito se o lado e a diagonal fossem comensuráveis, tomando o lado como unidade, obteríamos para o comprimento da diagonal um número racional $\frac{p}{q}$, com p e $q$números inteiros.

Segundo Ávila (2006), supostamente o primeiro número irracional a ser descoberto foi o √2. Como podemos observar a figura abaixo, aplicando o Teorema de Pitágoras encontramos, que o valor para a diagonal do quadrado será o número irracional √2, foi essa a grande descoberta feita pelos pitagóricos.

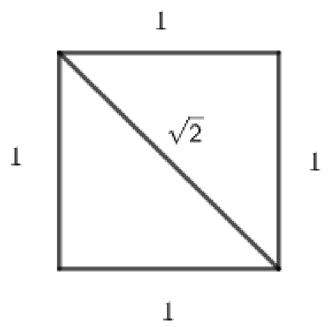

Figura 2
Fonte: Autoria Própria

Mas, como saber se √2 realmente é um número irracional? A demonstração consiste na prova por absurdo, assim, supondo que √2 seja racional, daí, haveria dois inteiros p e q, tais que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, donde segue que $\frac{p}{q}$é uma fração irredutível, ou seja, mdc(p,q)=1. Assim, elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado temos, $2=(\frac{p}{q})^2$, ou seja:

$$p^2=2q^2 \qquad (1)$$

Isto mostra que p^2 é par, donde concluímos que p também é par, pois se p fosse ímpar p^2 também seria ímpar. Como p é par podemos escrevê-lo da seguinte forma p=2r, com r inteiro. Substituindo p na equação (1), obtemos:

$$4r^2=2q^2\text{, ou ainda } q^2=2r^2.$$

Daqui concluímos, como no caso de p, que o número q também deve ser par. O que é um absurdo! pois então p e q são ambos divisíveis por 2 e $\frac{p}{q}$não é uma fração irredutível. O absurdo segue da hipótese de que √2 é um número racional. Daí segue que √2 é um número irracional.

Como vimos anteriormente √2 é um número irracional, mas será que realmente foi os pitagóricos os primeiros a descobrir essas grandezas incomensuráveis? Bongiovanni (2005), afirma que:

> O artigo de K.von Fritz *A descoberta da incomensurabilidade por Hipasus de Metapontum* introduziu uma nova dimensão ao problema. Ele desloca radicalmente a questão da incomensurabilidade para a divisão de um segmento em média e extrema razão. Von Fritz observa que apesar de Proclus atribuir a Pitágoras a descoberta dos incomensuráveis, todos os outros textos se referem a Hípaso de Metaponto nascido por volta de 500 a.C. Segundo ele essa descoberta pode ter sido feita por volta de 450 a.C e está relacionada com as faces pentagonais de um dodecaedro regular e com o pentagrama (emblema dos pitagóricos). (BONGIOVANNI, 2005, p. 92)
> .

Sendo a descoberta das grandezas incomensuráveis feito pelos pitagóricos ou não, temos que, por algum tempo √2 foi o único número irracional conhecido. Mais tarde Teodoro de Cirene, por volta de 425 a.C., mostrou que √3, √5, √6, √7, √8, √9, √10, √11, √12, √13, √14, √15 e √17 também são irracionais. Hoje além desses números irracionais conhecemos muitos outros e apresentamos ainda algumas constantes bem conhecidas como: π, *e, ln 2, ln 3* entre outros.

A teoria das Proporções de Eudoxo

Embora os irracionais representassem estranheza aos matemáticos, foi com os gregos que obteve-se uma forma de lidar com eles. Sua funcionalidade deve-se ao fato de que qualquer número irracional aproxima-se de um número racional. Quanto mais aproximarem-se, mais complexo revela-se o racional, havendo sempre um erro. Porém, ao tornar o erro menor, há chance de abordar os números irracionais, através de propriedades semelhantes às dos números racionais que podem servir de proximidade (STEWART, 2014).

> Para nós hoje é fácil perceber que a crise dos incomensuráveis seria resolvida com a introdução, na Matemática, dos números fracionários e dos números irracionais. Mas os gregos tomaram outro caminho, inventando um modo de falar em igualdade de razões mesmo no caso de grandezas incomensuráveis. Com isso criaram toda uma teoria das proporções que só dependia dos números naturais. O criador dessa teoria,

> exposta no Livro V dos Elementos de Euclides, foi Eudoxo (408-355 a.C. aproximadamente). (ÁVILA, 2006, p. 25).

Antes de apresentarmos as contribuições de Eudoxo, nessa área, discorremos um pouco sobre sua história. Eudoxo (408 a.C - 355 a.C) foi um matemático e astrônomo, que de Cnidos foi à Tarento, que é atualmente na Itália, para estudar com Arquitas, sendo que este foi discípulo de Pitágoras. Por ter uma família em que predominava a formação em medicina, formou-se também na área e a exerceu por determinado tempo. Também estudou filosofia na Academia de Platão. Depois de Arquimedes, Eudoxo é considerado o maior matemático da antiguidade.

De acordo com alguns estudos, Eudoxo foi pioneiro na resolução completa do problema que se refere a grandezas incomensuráveis, em que desenvolveu uma teoria compreendendo as proporções, passível de corresponder às grandezas comensuráveis e incomensuráveis, chegando a uma forma de definição da igualdade de duas razões , usando somente os números positivos (BOMGIOVANI et al., 2018).

A teoria desenvolvida por Eudoxo por volta de 370 a.C, pretendia ser um modo de representar qualquer grandeza, sendo racional ou irracional, através da razão entre dois comprimentos. Logo, a razão cinco terços é representada por dois segmentos, um de comprimento cinco e outro de comprimento três (uma razão 5:3), de maneira análoga, √2 pode ser representado pelo par constituído pela diagonal de um quadrado unitário e seu lado (√2:1). Notamos que ambos os segmentos podem ser construídos geometricamente (STEWART, 2014).

Ainda para o autor supracitado, o ponto primordial é a definição de quando duas dessas razões são iguais:

> Quando é que a:b = c:d? Sem contar com um sistema numérico adequado, os gregos não podiam fazer isso dividindo um comprimento pelo outro e comparando a ÷ b com c ÷ d. Em vez disso, Eudoxo descobriu um método rebuscado, porém preciso, de comparação que podia ser executado dentro das convenções da geometria grega. A ideia é tentar comparar a e c formando múltiplos inteiros ma e nc (STEWART, 2014, p.24).

Ainda para Stewart (2014), a indagação de como isso pode ser feito, é respondida, pois junta-se m cópias de a, unindo uma extremidade à outra e realizando o mesmo com as cópias de c. Utilizando-se os mesmos dois múltiplos de m e n para realizar comparação mb e nd. Caso as razões a:b e c:d não fossem iguais, segundo Eudoxo, obtemos que m e n apresentam muita diferença, à ponto que $ma>nc$, porém, $mb<nd$. Assim, é possível estabelecer igualdade de razões desse modo.

Embora tenha sido uma teoria considerada brilhante a solução que Eudoxo criou para incomensurabilidade, era considerado inconveniente o fato de ser simplesmente geométrica, o que contribuiu para que por dois milênios o rigor matemático estivesse fortemente baseado praticamente de modo único na Geometria (DOMINGUES, 2015).

No ano de 1872, a apresentação moderna dos Número Racionais Mostrada por Dedekind coincidiu com algumas fórmulas propostas por Eudoxo. Bongiovanni(2005) aborda que Dedekind se indagou acerca da imensidade geométrica que diferenciava esta dos números racionais e assim foi procurar alguma resposta nas teorias das proporções de Eudoxo.

Ao decorrer de seu aprofundamento acerca das teoria de proporções de Eudoxo, Dedekind observou o seguinte:

> 1) Existe mais pontos na linha reta do que números racionais;
> 2) Então, o conjunto dos números racionais não é adequado para aplicarmos aritmeticamente a continuidade da reta;
> 3) Logo, é absolutamente necessário criar novos números para que o domínio numérico seja tão completo quanto a reta, isto é, para que possua a mesma continuidade da reta. (MIGUEL, 2009, p. 233, apud JESUS, 2017)

Após as observações expostas acima, Dedekind publicou em seu livro Continuidade e Números Racionais a resolução do problema dos números irracionais, se utilizando de estratégias que ele as denominou de cortes, agora conhecidos como cortes de Dedekind.

Dedekind em seus estudos chegou à conclusão que o cerne da continuidade de um segmento de reta estava na distinção dos números racionais em duas classes. "Por essa observação trivial, o segredo da continuidade será revelado", frase escrita pelo próprio Dedekind (BONGIOVANNI, 2005).

Bongiovanni (2005), relata de maneira grosseira a idéia que Dedekind queria passar:

> Cortando uma reta em duas partes podemos separar os números racionais em duas classes A e B onde todo número da primeira classe A é menor que todo número da segunda classe B. Dessa forma, cada corte produz um e um só número real. Se A tem um maior elemento ou se B tem um menor elemento, o corte define um número real racional; mas se A não tem um maior elemento e B não tem um menor elemento, então o corte define um número real irracional. Portanto, por meio dos cortes de Dedekind, amplia-se o conjunto Q introduzindo os números irracionais (BONGIOVANNI, 2005).

Com a definição dada por Dedekind, foi possível a criação dos números reais, onde se eliminou as brechas deixadas e ainda estabeleceu uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos integrantes de uma reta.

Desde que surgiu a ideia de irracionalidade na Grécia antiga até a definição atual que temos, dada por Dedekind, pode-se observar é que um longo tempo se passou. O fato da criação da idéia e definição da irracionalidade terem demorado tanto tempo, pode se dar à conjuntura da dificuldade de entendimento com relação a estes na sociedade antiga.

Metodologia

Esta pesquisa é de abordagem qualitativa, pois esta possibilita "estudar os fenômenos que envolvem os seres humanos e suas intrincadas relações sociais, estabelecidas em diversos ambientes" (GODOY, 1995, p. 21), além do que, segundo Lukde e André (1986), apresentam algumas características dessa abordagem, tais como: ter como fonte o ambiente natural, este sendo o principal para coleta de dados, e o pesquisador como principal instrumento, com dados de predominância descritiva, com foco nos processos e nos significados e análise do dados baseado na indução.

Constituindo-se também como pesquisa bibliográfica não é simplesmente uma revisão de literatura, porém é caracterizada por Lima e Mioto (2007, p. 38) "pesquisa bibliográfica implica em um conjunto ordenado de procedimentos de busca por soluções, atento ao objeto de estudo, e que, por isso, não pode ser aleatório". Para Markoni e Lakatos (2007), o objetivo da pesquisa bibliográfica é tornar possível ao pesquisador o contato com tudo o que foi escrito, pronunciado ou filmado sobre o assunto em questão.

Esta pesquisa foi solicitada como requisito parcial para a aprovação na disciplina de História da Matemática no curso de Licenciatura em Matemática, com temas sorteados para equipes em torno três pessoas. Inicialmente foram pesquisadas obras que pudessem referenciar este trabalho, tratando de temas semelhantes, tais como Ávila (2006), Ifrah (2009), Eves (2011), Pommer (2012) e Pereira (2018) dentre outros.

Considerações Finais

O surgimento dos racionais se deu a partir da necessidade de se encontrar a diagonal de um quadrado de lado 1, onde essa diagonal mede $\sqrt{2}$. Essa descoberta foi atribuída à Hipasus de Metapontum, o que, a história nos conta, acabou resultando em sua morte.

Na época de tal descoberta, foi um grande escândalo nos alicerces da matemática, pois até então, só existiam raízes de números quadrados e no caso do nosso irracional $\sqrt{2}$ não existe um número que ao quadrado resulte em 2. Por causa de tal fato os pitagóricos vivenciaram a crise dos incomensuráveis, já que notaram a não existência de uma medida comum entre o lado e a diagonal de um quadrado de lado 1. Já na fase dos platônicos essas medidas já foram aceitas, visto a existência dessas medidas.

Por outro lado, foi um grego chamado Eudoxo que ao se utilizar do método de exaustão e a teoria das proporções conseguiu comparar tais medidas incomensuráveis. Para Rezende(2013), esse foi o marco que pode impulsionar o desenvolvimento dos irracionais, pois a partir daí, os gregos podiam provar a existência de segmentos incomensuráveis, como a diagonal de um quadrado de lado 1, além de poderem representá-los, e através da teoria de Eudoxo poderiam compará-los, podendo aceitá-los com objeto geométrico.

Dessa maneira os números irracionais se desenvolveram, onde no século XIX, matemáticos dessa época, entre eles Cantor e Dedekind, elaboraram a continuidade da reta numérica, onde com seus teoremas colocaram os números irracionais juntamente com os racionais na reta numérica. Os matemáticos, ainda foram mais longe, possibilitando em sua teorias a realização de operações matemáticas, aceitando e configurando os números irracionais como número.

Referências

ÁVILA, G. S. S. **Análise Matemática para Licenciatura.** São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BOMGIOVANI, Cesar Augusto Oliveira et al. **Teoria das Proporções de Eudoxo e os Incomensuráveis.** 2018. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/mod/resource/view.php?id=2447541>. Acesso em: 12 fev. 2019.

BONGIOVANNI, Vincenzo. As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido «a teoria das proporções e o método de exaustão». **União. Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, v. 2, p. 91-110, 2005.

DESCONHECIDO. **Eudoxo de Cnidos.** Disponível em: <http://biografias.netsaber.com.br/biografia-3377/biografia-de-eudoxo-de-cnidos>. Acesso em: 10 fev. 2019.

DOMINGUES, H. H. O Baricentro da Mente.. **Eudoxo e os incomensuráveis.** 2015**.** Disponível em : < https://www.obaricentrodamente.com/2015/11/eudoxo-e-os-incomensuraveis.html> Acesso em: 08 fev de 2019.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática/Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. **Campinas, SP: Editora da Unicamp**, 2004.

GODOY, Arilda Schmidt. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **Revista de Administração de empresas**, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

IFRAH, G. **Os números: história de uma grande invenção**. São Paulo: Globo, 2009; JESUS, Bárbara Cristina Dâmaso de. **NÚMEROS IRRACIONAIS**: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DOS ENSINOS FUNDAMENTAL II E MÉDIO. 2017. 51 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de São João Del-rei, São João Del-rei, 2017.

LIMA, Telma Cristiane Sasso de ; MIOTO, Regina Célia Tamaso. Procedimentos metodológicos na construção do conhecimento científico: a pesquisa bibliográfica. **Revista Katálysis**, v. 10, 2007.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli EDA. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. Em Aberto, v. 5, n. 31, 2011.

MARCONI, Marina de Andrade et al. Técnicas de pesquisa. 2002.

MOSCIBROSKI, Thais Meurer. **A amplitude do conjunto dos números irracionais.** 2002. 64 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2002.

PEREIRA, R. L. V. **Introdução aos Números Transcendentes e aos Números de Liouville**. Monografia (Licenciatura em Matemática). IFCE, Canindé/CE, 2018.

REZENDE, Veridiana. **Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino.** Tese de doutorado. PCM, Universidade Estadual de Maringá, 2013.

STEWART, Ian. **Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos.** Zahar, 2014.