

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS: DESCARTES E A HOMOGENEIDADE**GEOMETRIC SOLIDS: DESCARTES AND HOMOGENEITY**

*Liliane Silva Nascimento Coelho*¹

Universidade do Estado do Pará

*Edna Machado da Silva*²

Universidade do Estado do Pará

*Miguel Chaquiam*³

Universidade do Estado do Pará

Resumo

Para embasar uma pesquisa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática sobre ensino de circunSCRIÇÃO de sólidos geométricos, e devido à dificuldade em encontrar trabalhos sobre esse assunto, apresentamos neste trabalho uma investigação histórica sobre os estudos que envolvem a algebrização de sólidos geométricos que tornaram possível as relações de sólidos circunscritos. Exploramos os trabalhos desenvolvidos por Descartes, e seus contemporâneos ao período do Renascimento que se apropriaram da homogeneidade geométrica em sólidos geométricos para desenvolver seus estudos. Assim, tivemos como objetivo investigar de que forma a inserção das relações algébricas e da homogeneidade geométrica permitiram o avanço das pesquisas sobre circunSCRIÇÃO de sólidos geométricos. Para tanto, utilizamos o diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017) e, fizemos o levantamento e seleção de personagens que participaram da evolução de estudos que conciliaram a álgebra e a geometria, para responder a questão: Como René Descartes e seus contemporâneos contribuíram nos estudos sobre sólidos geométricos que na atualidade trazem reflexos em diversas áreas do conhecimento e no contexto didático-pedagógico do ensino de sólidos geométricos. O diagrama metodológico adotado permitiu uma visão sistêmica dos contextos que favoreceram o desenvolvimento desses estudos, tais como aspectos sociocultural, pluridisciplinar e técnico-científico conduzindo a discursão para um contexto didático-pedagógico. Como resposta verificou-se que, o desenvolvimento das pesquisas sobre sólidos geométricos possibilitou aplicações em diversas áreas que necessitem de precisão em 3D. Além disso, o aporte metodológico adotado trouxe diversos olhares sobre o objeto matemático apontando diferentes abordagens em sala de aula adaptáveis à realidade dos estudantes, dando significado às relações algébricas no estudo de sólidos geométricos que possibilitaram construção de conceitos de sólidos circunscritos.

Palavras-chave: História da Matemática; Formação de Professores; Descartes; Homogeneidade Geométrica; Sólidos Geométricos.

¹ lililnscoelho3@gmail.com

² edna.yris.zeus@gmail.com

³ miguelchaquiam@gmail.com

Abstract

To support a Professional Master's research in the Teaching of Mathematics on the teaching of the circumscription of geometric solids, and due to the difficulty in finding works on this subject, we present in this work a historical investigation on the studies involving the algebraization of geometric solids that made possible the circumscribed solid relationships. We explored the works developed by Descartes, and his contemporaries to the Renaissance period that appropriated the geometric homogeneity in geometric solids to develop their studies. Thus, we aimed to investigate how the insertion of algebraic relations and geometric homogeneity allowed the advance of research on circumscription of geometric solids. For that, we used the methodological diagram proposed by Chaquiam (2017) and, we made the survey and selection of characters who participated in the evolution of studies that reconciled algebra and geometry, to answer the question: How René Descartes and his contemporaries contributed to the studies about geometric solids that nowadays bring reflexes in several areas of knowledge and in the didactic-pedagogical context of teaching geometric solids. The methodological diagram adopted allowed a systemic view of the contexts that favored the development of these studies, such as sociocultural, pluridisciplinary and technical-scientific aspects leading the discourse to a didactic-pedagogical context. As an answer, it was found that the development of research on geometric solids allowed applications in several areas that need 3D precision. In addition, the methodological approach adopted brought different perspectives on the mathematical object, pointing out different approaches in the classroom adaptable to the students' reality, giving meaning to algebraic relations in the study of geometric solids that enabled the construction of circumscribed solid concepts.

Keywords: History of Mathematics; Teacher Training; Descartes; Geometric Homogeneity; Geometric Solids.

Introdução

No âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará e do Grupo de Pesquisa em História, Educação e Matemática na Amazônia (GHEMAZ), foi desenvolvida uma pesquisa sobre circunscrição de sólidos geométricos. Para tanto, foi necessária uma investigação histórica de como se originou os estudos do objeto matemático e seus reflexos em sala de aula a fim de contribuir com a formação inicial e continuada de professores de Matemática da Educação Básica.

A circunscrição de sólidos é apresentada no Ensino Médio como fórmulas algébricas geradas a partir de elementos comuns de mesmas medidas ou de sólidos geométricos encaixados uns nos outros de forma precisa. Assim, decidiu-se investigar como se deu a fusão da álgebra ao estudo de sólidos geométricos desde a antiguidade, no entanto, foi feito um recorte num período de maior contribuição, o Renascimento:

O movimento que criou uma renovação cultural e artística, enfatizando as ligações entre a matemática e a arte. Nessa época, os artistas dominaram a

técnica da perspectiva, projetando em uma tela plana figuras e ambientes em três dimensões [...] a representação do espaço em perspectiva constituiu-se no modo de olhar ou representar as figuras tridimensionais, e, pode auxiliar no entendimento das muitas dificuldades que os alunos encontram na visualização das figuras do ensino de geometria. (RODRIGUES, 2011, p.103)

Considerando a contribuição da história da matemática na prática docente, neste estudo histórico tivemos o objetivo de investigar como a inserção das relações algébricas e da homogeneidade geométrica possibilitaram o avanço dos estudos sobre circunscrição de sólidos geométricos. Para isso, nos aportamos no diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017) para responder a seguinte questão de pesquisa: Como René Descartes e seus contemporâneos contribuíram nos estudos sobre sólidos geométricos que na atualidade trazem reflexos em diversas áreas do conhecimento e no contexto didático-pedagógico do ensino de sólidos geométricos?

Nesse sentido, identificamos personagens que participaram da evolução de estudos colaborativos entre a álgebra e a geometria, dando ênfase as contribuições de René Descartes (1596-1650), tendo em conta percepções da influência e interferência de aspectos socioculturais, técnico-científicos e pluridisciplinares que contextualizaram e fomentaram o desenvolvimento de tais estudos. Ao final, fazemos reflexões sobre a importância desses estudos para a contemporaneidade e para a formação de professores e estudantes de matemática, dando a eles uma dimensão sistêmica do contexto em que objeto matemático circunscrição de sólidos se constituiu, uma vez que:

A história pode auxiliar os futuros professores a perceber que o movimento de abstração e generalização por que passam muitos conceitos e teorias em matemática não se deve, exclusivamente, a razões de ordem lógica, mas à interferência de outros discursos na constituição e no desenvolvimento do discurso matemático. (MIGUEL; BRITO, 1996, p. 4)

A seguir apresentamos o esquema metodológico, baseado na proposta de Chaquiam (2017), que norteou a escrita deste texto, bem como a inserção dos contextos e personagem em destaque, René Descartes. Ao final apresentamos reflexões quanto ao aspecto didático pedagógico.

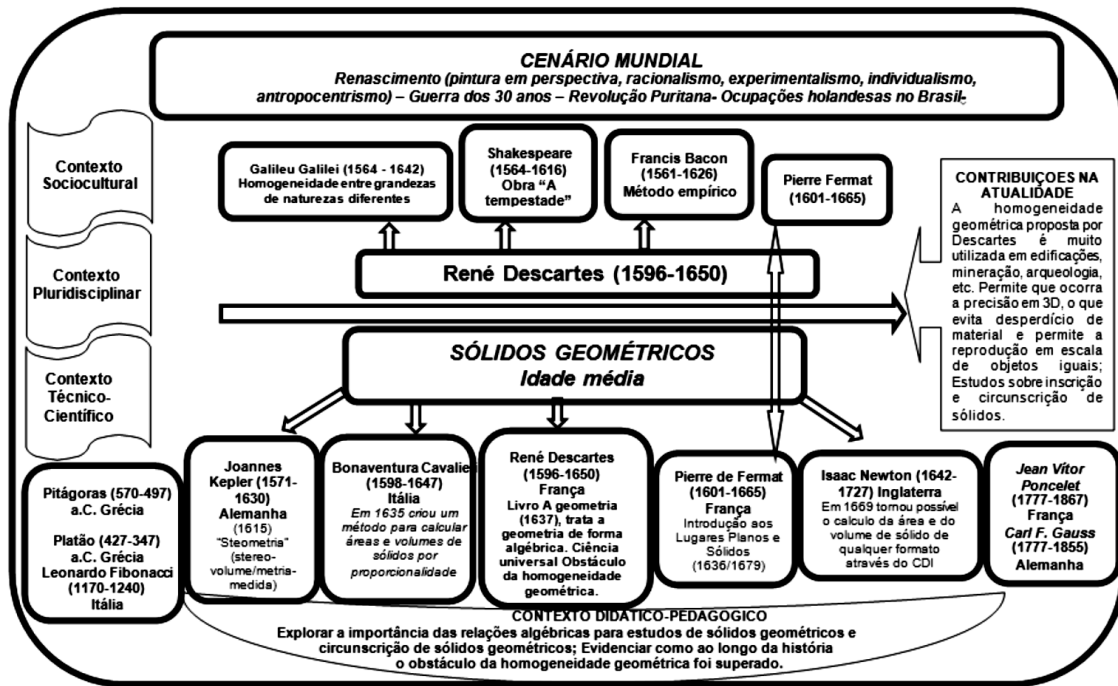


Figura 1- Diagrama Metodológico - Sólidos Geométricos.

O esquema metodológico representa uma discursão do cenário mundial, contexto sociocultural, pluridisciplinar e técnico-científico do período histórico em que René Descartes viveu, conduzindo a discussão para um contexto didático-pedagógico e trazendo olhares da relevância do objeto matemático “sólidos geométricos” para a atualidade.

Sobre o estudo de sólidos geométricos é possível verificar em Boyer (1996) desde a antiguidade personagens que o desenvolveram, em particular Pitágoras (570-497 a. c.) e Platão (427-347a.c.), que associavam o estudo da Geometria espacial ao estudo da metafísica e da religião, devido as formas abstratas que os sólidos apresentam. Em 1220, o italiano Leonardo Fibonacci (1170-1240), escreveu a “Practica Geometriae”, uma coleção que, dentre outros tópicos de matemática, fazia uma abordagem tridimensional do teorema de Pitágoras. Na idade moderna, o estudo sobre sólidos geométricos teve destaque por Jean Vitor Poncelet (1777-1867) e Carl F. Gauss (1777-1855), com a geometria projetiva e analítica.

Assim, podemos constatar que o objeto sólidos geométricos percorreu por toda a História da Matemática e muitos personagens passaram pela construção dos conceitos relacionados, porém fizemos um recorte a partir dos trabalhos que tornaram possível fazer estudos sobre manipulações algébricas em sólidos geométricos desenvolvidos pelos personagens: Joannes Kepler (1571-1630), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), René

Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665) e Isaac Newton (1642-1727), dando destaque ao personagem René Descartes.

Cenário Mundial

Partindo do cenário mundial, o período contemporâneo de Descartes foi marcado pela cultura renascentista, que surgiu na Itália do século XIV, se consolidou no século XV e se estendeu até o século XVII por toda a Europa e no qual ocorreu o resgate ao estudo de toda ciência adormecida até aquele momento, segundo Vieira (2017, p. 50) “Do Renascimento até o século XIX houve um resgate da Geometria Euclidiana, juntamente com o nascimento do Cálculo Diferencial e Integral com Newton e Leibniz, e da Geometria Analítica com Descartes”.

No período em recorte, as pinturas em perspectiva inspiraram ou foram inspiradas na matemática em 3D, a exemplo disso podemos citar que no Brasil aconteciam as ocupações holandesas e que um representante holandês desse tipo de arte foi Frans Post (1612-1680).



Figura 2 - Fortaleza de São Sebastião (1613)

As obras de Frans Post consistiam em mútua penetração da cor, da luz e da forma. As suaves graduações de luz revelam a precisão da perspectiva, característica marcante das obras dessa época que trouxeram reflexos para o Brasil.

O renascimento também possui algumas características sobre as quais descrevemos a seguir e citamos alguns personagens contemporâneos a Descartes, da matemática e de outras ciências que influenciaram ou não em seus trabalhos.

- a) Racionalismo – Para os renascentistas o conhecimento era aliado à razão, e tudo podia ser explicado de forma racional.
- b) Experimentalismo – O renascimento também foi marcado pela ciência experimental. O filósofo Francis Bacon (1561-1626) foi um experimentalista contemporâneo a Descartes, idealizador do método empírico, que consiste em obter conclusões científicas por meio de experiências.
- c) Individualismo – O homem renascentista buscava afirmar sua própria personalidade através do conhecimento sobre si próprio, valorizando seus talentos e interesses individuais em detrimento do coletivo.
- d) Antropocentrismo – A cultura renascentista contemporânea a Descartes também colocava o homem como a suprema criação de Deus e como centro do universo.

Nesse período de transições, Descartes testemunhou a guerra dos 30 anos (1618-1648) que envolveu toda a Europa numa luta religiosa e política. Enquanto cidades eram destruídas e populações inteiras se empobreciam, ele e outros contemporâneos como dramaturgo Shakespeare (1564-1616) e os matemáticos Galileu Galilei (1564 - 1642) e Pierre Fermat (1601-1665), produziam intensamente em uma sociedade cada vez mais racionalista.

Terceiro filho de Joachim Descartes, deputado no parlamento francês, Descartes nasceu em Touraine, em La Haye, em 31 de março de 1596. De uma família nobre, porém de saúde frágil durante a infância, o que fez seu pai retardar sua instrução, mesmo assim desde a juventude demonstrava grande curiosidade pela ciência.

Em 10 de novembro de 1619, acampou com o exército de Maximiliano em Ulm. A noite, em meio a uma crise mística, teve a revelação de um método admirável, ao vislumbrar como a física podia ser reduzida à geometria, e todas as ciências mostravam-se unidas, como por uma corrente. Descartes passou os nove anos seguintes aplicando tal método à álgebra. Essa tendência em querer homogeneizar as ciências de forma universal

também era um ideal de seu contemporâneo Galileu Galilei, trata-se da homogeneidade geométrica. René descartes morreu em 1650 de pneumonia, em Estocolmo, depois de 10 dias enfermo, enquanto trabalhava como professor a pedido da rainha.

Sobre o objeto matemático central desta pesquisa, sólidos geométricos, apresentamos a contribuição de cinco personagens, incluindo Descartes e um pouco mais sobre a contribuição desse personagem a respeito da algebrização da geometria.

Johannes Kepler (1571-1630)

Johannes Kepler, alemão, nasceu em 27 de dezembro de 1571, herdou o status de nobre de seu avô Sebald Kepler, porém quando Johannes Kepler nasceu a fortuna da família estava em declínio. Foi uma criança de incrível capacidade matemática e impressionava os viajantes na pousada de seu avô. Sua contribuição se deu em 1615 na publicação “Stereometria Doliorum Vinariorum”, sobre a mensuração do volume de recipientes com formas tais quais às de barris de vinho.

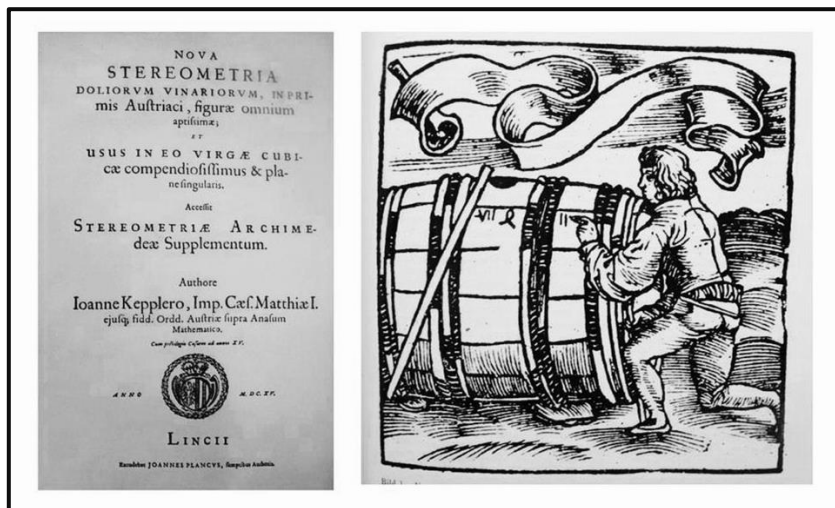


Figura 3 - Obra Stereometria Doliorvm Vinariorum

Conforme Garbi (2007), para calcular o volume de um toro cujo raio da seção circular é r e cujo raio do orifício é R , Kepler supôs o toro cortado em um grande número de fatias e as imaginou empilhadas de modo que, alternadamente, o lado mais espesso de cada fatia ficasse ora a direita, ora a esquerda a fim de aproximar a forma de um cilindro.

Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão em 1598, foi um sacerdote matemático italiano, discípulo de Galileu, é considerado um dos precursores do cálculo integral.

Em 20 de setembro de 1615 ele se juntou à ordem religiosa dos Jesuítas em Milão. Em 1616 foi transferido para Pisa, onde estudou filosofia, teologia e onde conheceu Benedito Castelli, que o introduziu no estudo de geometria. Durante os quatro anos em que esteve em Pisa, Cavalieri tornou-se um matemático famoso e um dos discípulos de Galileu.

Em 1635 publicou a obra “Nova Geometria dos Indivisíveis Contínuos”, onde estabeleceu o princípio geométrico que recebeu seu nome, princípio de Cavalieri: “Dados dois sólidos geométricos A e B de mesma altura e áreas das bases, que, por sua vez, estão contidas no mesmo plano α . Os sólidos A e B têm o mesmo volume se qualquer plano β , paralelo a α , determinar duas secções transversais com áreas iguais.

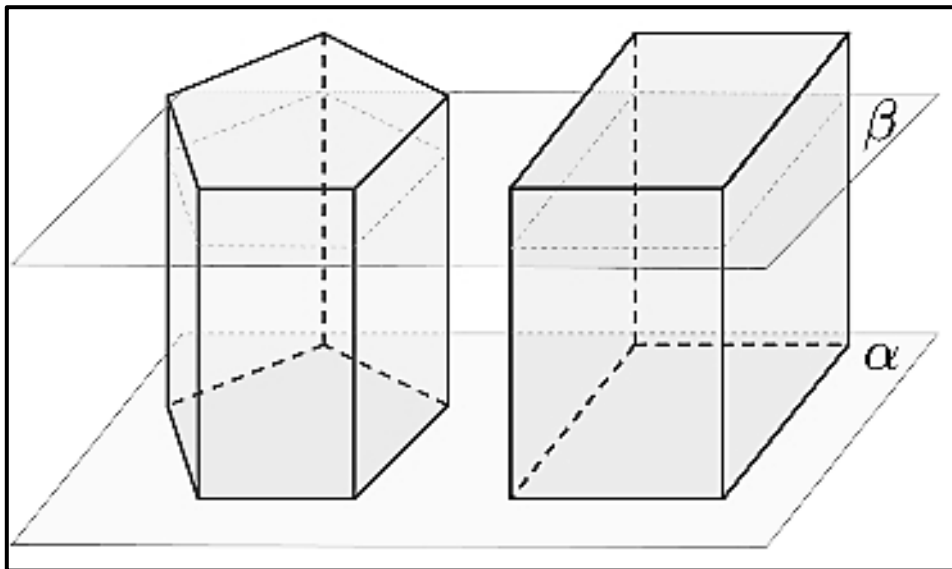


Figura 4 - Princípio de Cavalieri

A teoria de Cavalieri permitiu-lhe determinar rapidamente áreas e volumes de figuras geométricas. Desenvolveu a ideia de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas: uma região, por exemplo, pode ser pensada como sendo formada por segmentos "indivisíveis", e que um sólido pode ser considerado como composto de regiões que têm volumes indivisíveis.

René Descartes (1596-1650)

Em síntese Descartes expôs a construção geométrica das raízes de equações cúbicas ou de quarto grau, referentes a problemas sólidos, utilizando a intersecção entre uma parábola e um círculo, escreveu essas equações na forma (Ramos, 2013).

$$z^4 = \pm apz^2 \pm a^2qz \pm a^3e$$

$$z^3 = \pm apz \pm a^2q$$

Observando que esta última resulta da anterior atribuindo o valor zero ao parâmetro r . Após atribuir a unidade ao parâmetro a , Descartes reescreveu as equações anteriores nas formas $z^3 = \pm apz \pm a^2q$ e $z^4 = \pm apz^2 \pm a^2qz \pm a^3$, sendo p, r e q quantidades positivas. Após a construção um procedimento geométrico chega na equação geral do tipo

$$z^4 = pz^2 - qz + r$$

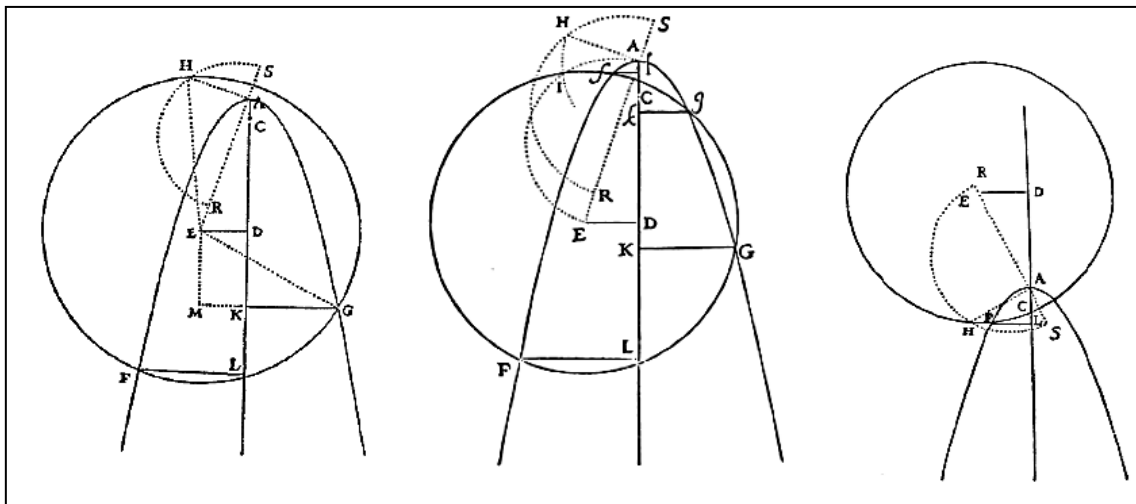


Figura 5 - Geometria de Descartes

Tal método de interpretação das fórmulas abriu caminho ao conceito de função, à criação do cálculo infinitesimal, e também ao conceito de limite, cuja evolução pertence ao período seguinte ao cartesiano. É possível consultar a demonstração completa em Ramos (2013).

Pierre Fermat (1601-1665)

Pierre de Fermat nasceu no dia 17 de agosto de 1601 em Beaumont-de-Lomages, França, e morreu no dia 12 de janeiro de 1665 em Castres, França. Contemporâneo de

Descartes, foi advogado e oficial do governo em Toulouse pela maior parte de sua vida. A matemática era o seu passatempo.

Em 1636, Fermat propôs um sistema de geometria analítica semelhante ao de Descartes. Fermat não publicou quase nada durante a sua vida, anunciando as suas descobertas em cartas aos amigos. Às vezes ele anotava resultados nas margens dos seus livros. O trabalho dele foi largamente esquecido até que foi redescoberto em meados do século 19.

Inventou a Geometria Analítica em 1636 e descreveu as suas ideias num trabalho não publicado intitulado Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos, que circulou apenas na forma de manuscrito, postumamente publicado em 1679, onde também trata de problemas de sólidos geométricos por meio de equações, porém de forma mais didática e sistemática do que Descartes.

Isaac Newton (1643-1727)

Isaac Newton nasceu em Londres, no ano de 1643, e viveu até o ano de 1727. Cientista, químico, físico, mecânico e matemático, trabalhou junto com Leibniz na elaboração do cálculo infinitesimal. Durante sua trajetória, ele descobriu várias leis da física, entre elas, a lei da gravidade.

Newton tinha um temperamento tranquilo e era uma pessoa bastante modesta. Ele se dedicava muito ao seu trabalho e muitas vezes deixava até de se alimentar e também de dormir por causa disso. Além de todas as descobertas que ele fez, acredita-se que ocorreram muitas outras que não foram anotadas.

Diante de todas as suas descobertas, que, sem sombra de dúvida, contribuíram e também ampliaram os horizontes da ciência, este cientista brilhante acreditava que ainda havia muito a se descobrir. E, em 1727, morreu após uma vida de grandes descobertas e realizações.

Em 1669 desenvolve o cálculo diferencial e integral, o que tornou possível calcular a área e o volume de qualquer figura geométrica, independentemente de sua forma. Antes disso os cálculos se limitavam a descoberta de fórmulas diferentes para cada tipo de figura.

Aplicações na atualidade e no contexto didático pedagógico

Sólidos geométricos: Descartes e a homogeneidade

Liliane Silva Nascimento Coelho, Edna Machado da Silva e Miguel Chaquiam

É possível verificar que na evolução do estudo sobre sólidos geométricos os avanços que se deram diante da superação do obstáculo da homogeneidade geométrica conquistada por Descartes, possibilitou diversas aplicações nas mais diferentes áreas.

O estudo desenvolvido por Descartes e seus contemporâneos sobre a relação algébrica em sólidos geométricos permitiu que ocorresse a precisão em 3D, o que evita desperdício de material e permite a reprodução em escala de objetos iguais.

Pôde-se analisar que em distintas situações nas quais se precisa obter informação com homogeneidade geométrica [...] para obter uma igual precisão em todo o modelo em 3D. A possibilidade da definição de um método que permita o levantamento da informação com um mesmo nível ou homogeneidade de precisão, empregando-se um equipamento de baixo custo, permitindo-se a aplicação deste método em qualquer local do mundo e por qualquer profissional minimamente treinado. O mesmo método ainda pode ser aplicado em edificações e também em outras atividades, como: arqueologia, mineração, construção de túneis, entre outras. (GARDIOL, 2000, p. 3)

Além das diversas aplicações verificadas em pesquisas como a acima citada, no que tange ao contexto didático-pedagógico, a partir desse estudo foi possível explorar a importância das relações algébricas para estudos de sólidos geométricos e, conseqüentemente, para entender como se tornou possível a circunscrição de sólidos geométricos. A metodologia adotada reforçou a relevância de se explorar em sala de aula as diversas influências que tornaram possível o desenvolvimento de objetos matemáticos.

Considerando que o texto a ser elaborado a partir do diagrama metodológico tem dentre seus objetivos vincular à história da humanidade a história da matemática e aos conteúdos matemáticos, destacar os personagens/matemáticos com suas respectivas contribuições para o tema, gerar um contexto didático-pedagógico para uso em sala de aula, propor um único caminho se constituiria em desprezar todas as diversidades e peculiaridades que permeiam a sala de aula, dentre elas, as culturais, sociais, econômicas, tecnológicas e cognitivas. (CHAQUIAM, 2017, p. 35)

Assim, o percurso histórico que adotamos aqui aponta para o professor diversas possibilidades de abordagem em sala de aula, que possam ser adequadas às peculiaridades individuais e coletivas de seus alunos, aproximando sua realidade a aplicabilidade do conhecimento matemático pois são “sujeitos que constroem sua história com base em diferentes interesses e inserções na sociedade e que possuem modos próprios de pensar, agir, vestir-se e expressar seus anseios, medos e desejos” (BRASIL, 2017, p. 537). É válido mostrar aos estudantes que sua própria história pode ser escrita com a ajuda da matemática.

Considerações Finais

Ao iniciarmos nosso estudo sobre circunscrição de sólidos, foram raras as pesquisas sobre esse objeto matemático e seu ensino, no entanto existe um vasto número de pesquisas sobre sólidos geométricos, o que nos motivou a fazer esta investigação histórica sobre o processo que possibilitou seus estudos e aplicações atualmente.

Em nossa investigação verificamos que o conceito de circunscrição de sólidos deu-se a partir da evolução da geometria espacial e sua relação com a álgebra e destacamos René Descartes como personagem que explorou generosamente, junto de seus contemporâneos a ferramenta da homogeneidade geométrica, isto é, usando a álgebra para explicar a geometria.

O que talvez esses personagens não imaginassem é que seus estudos teriam grande valor e aplicabilidade muitos séculos após suas descobertas. O caráter universal e atemporal da matemática se mostrou evidente nesta pesquisa. Por isso, o aporte metodológico que adotamos, ao considerar os mais diversos contextos e peculiaridades da época dos personagens, nos levou a indicar a professores de matemática possibilidades de apresentar no contexto didático-pedagógico o estudo de sólidos geométricos, remetendo-os a sua aplicabilidade em seu contexto social, cultural e cognitivo.

Referências

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF, 2017

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaio temático: História e matemática em sala de aula**. Belém/SBEM-PA, 2017.

GARBI, Gilberto G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

GARDIOL, Mário Rubem. **Homogeneidade geométrica entre levantamentos fotogramétricos externos e internos em edificações**. 170 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.

MIGUEL, A. BRITO, A. J. **A História da Matemática na formação do professor de matemática**. Cadernos CEDES – História e Educação Matemática. Campinas (SP): Papirus, n.40,1996.



RAMOS, Maria Dalila Correia. **Da Álgebra Geométrica Grega à Geometria Analítica de Descartes**. 140 f. Dissertação Mestrado em Matemática para Professores) Faculdade de Ciências da Universidade do Porto em Matemática, Porto, 2013.

RODRIGUES, Georges Cherry. **Introdução ao estudo de geometria espacial pelos caminhos da arte e por meio de recursos computacionais**. 143 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2011.

VIEIRA, Wellington Zarur Viana. **Argumentação e prova: uma experiência em geometria espacial no ensino médio**. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.