ENSINO DA REGRA DE TRÊS: A PROPOSIÇÃO CINCO DO *LIBER QUADRATORUM* COMO UM CONTEXTO PRÓPRIO DE ESTUDO EM MATEMÁTICA

TEACHING OF THE RULE OF THREE: THE PROPOSITION FIVE OF THE *LIBER* QUADRATORUM AS A PROPER CONTEXT OF STUDY IN MATHEMATICS

Denivaldo Pantoja da Silva[1]
Universidade Federal do Pará
José dos Santos Guimarães Filho[2]
Universidade Federal do Pará

Resumo
Temos na História da Matemática, uma ferramenta metodológica que pode ajudar o professor que ensina matemática na construção do conhecimento matemático escolar, por meio de fontes, contextos, problemas e textos históricos. Destes podemos citar o *Liber Quadratorum*, escrito por Leonardo de Pisa (1180 – 1250) em 1225 no século XIII, de forma particular, a proposição cinco deste livro. Há consenso entre profissionais de educação que novos métodos, estratégias e a inserção de instrumentos que facilitem o ensino da Matemática são necessários para prender a atenção dos alunos em sala de aula. Essa tarefa nos parece desafiadora para o momento atual visto a constante mudança que as tecnologias da informação e comunicação proporcionam a cada instante com velocidade. Pensando em proporcionar ao professor alternativas metodológicas de certo modo inovadoras que sejam objetivamente possíveis de serem executadas, propomos neste artigo, como objetivo, buscar construir uma praxeologia para Regra de Três considerando a proposição cinco e sua demonstração como provedora de um contexto próprio de estudo em Matemática. Para isso, desenvolveremos este trabalho à luz da História da Matemática auxiliada pela noção de praxeologia como referencial teórico-metodológico. Os resultados apontam a proposição cinco do *Liber Quadratorum* e sua demonstração como dispositivo didático eficaz para o estudo da Regra de Três, promove a iniciação ao estudo de álgebra, além de se apresentar como um instrumento essencial para um fazer de modelização matemática possível na educação básica atendendo aos anseios relacionados à interação harmoniosa entre os componentes dos processos didáticos de modo que culminem em aprendizagens duradouras e significativas.

Palavras-chave: Regra de Três; *Liber Quadratorum*; Práxis; Aprendizagem; Ensino.

Abstract
We have in the History of Mathematics, a methodological tool that can help the teacher who teaches mathematics in the construction of school mathematical knowledge, through sources, contexts, problems and historical texts. Of these we can mention the Liber Quadratorum, written

[1] denivaldo@ufpa.br
[2] jsguimarães@ufpa.br

DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.2830

by Leonardo de Pisa (1180 - 1250) in 1225 in the 13th century, in particular, proposition five of this book. There is consensus among education professionals that new methods, strategies and the insertion of instruments that facilitate the teaching of mathematics are necessary to hold students' attention in the classroom. This task seems challenging to us at the present time given the constant change that the information and communication technologies provide at every moment in high speed. Thinking about providing the teacher with some innovative methodological alternatives that are objectively possible to be executed, we propose in this paper to build a praxeology for Rule Three considering proposition five and its demonstration as providing a proper context of study in Mathematics. For this, we will develop this work in the light of the History of Mathematics aided by the notion of praxeology as a theoretical-methodological framework. The results point to proposition five of the Liber Quadratorum and its demonstration as an effective teaching device for the study of the Rule of Three, promotes initiation into the study of algebra, it also presents itself as an essential tool for making mathematical modeling possible in basic education given the yearnings related to the harmonious interaction between the components of the didactic processes in a way that culminates in lasting and meaningful learning.

Keywords: Rule of three; Liber Quadratorum; Praxis; Learning; Teaching.

Introdução

A História da Matemática pode ajudar o professor em termos metodológicos na construção do conhecimento matemático escolar, por meio de fontes, contextos, problemas e textos históricos. Podemos citar o *Liber Quadratorum*, escrito por Leonardo de Pisa (1180 – 1250) em 1225 no século XIII, motivado por um torneio matemático organizado por João de Palermo a pedido do Rei Frederico II em sua corte, pois diferente dos reis anteriores, tenta trazer à Europa a renascença novamente, incentivando a construção intelectual (CASTILLO, 2007). Este livro, de Leonardo de Pisa, apresenta vinte e quatro problemas, dentre os quais, trata da teoria dos números, que em sua maioria apresenta diversas formas de encontrar as ternas pitagóricas, utilizando a álgebra geométrica dos árabes para suas demonstrações, das quais, evidenciaremos neste trabalho a proposição cinco (OLIVEIRA, 2013).

Esta proposição é anunciada da seguinte forma: Encontre dois números quaisquer de modo que a soma de seus quadrados forme um quadrado, e que este quadrado possa ser formado pela soma de dois quadrados quaisquer diferentes dos dois primeiros. Observamos, que esta proposição, embora, seja demonstrada por Leonardo de Pisa pela álgebra geométrica, podemos caracterizá-la como um problema de proporcionalidade. Isto posto, nos permite então vislumbrar tal proposição como um contexto próprio de estudo em princípio aritmético.

A Regra de Três como uma prática histórica de problemas que envolvem proporcionalidade se integra nesse contexto de forma adequada. Na escola, em geral, está relacionada às situações que apresentam três valores, onde dois são conhecidos e o terceiro a determinar. Nos manuais escolares apresentam a regra como uma técnica de resolução de problemas de proporcionalidade caracterizada como diretamente ou inversamente proporcional.

Neste sentido, podemos pensar em uma maneira de integrar conteúdos de aritmética e álgebra da Matemática escolar ou até mesmo em uma praxeologia (CHEVALLARD, 1999) por meio da Regra de Três, então propomos a seguinte questão como orientadora deste trabalho: **Como desenvolver uma praxeologia para Regra de Três considerando a proposição cinco de *Liber Quadratorum* como contexto próprio de estudo em Matemática?** Para enfrentá-la, tomamos a proposição cinco demonstrada por Leonardo de Pisa como contexto próprio de estudo em Matemática, partindo da hipótese que o mesmo dispõe de regras e procedimentos matemáticos necessários para o desenvolvimento do estudo da Regra de Três.

Deste modo, para este trabalho objetivamos buscar construir uma praxeologia para Regra de Três considerando a proposição cinco e a demonstração proposta por Leonardo de Pisa como provedora de um contexto próprio de estudo em Matemática, é o que faremos a seguir.

A proposição cinco e sua demonstração: contexto próprio de estudo em Matemática

Como dissemos anteriormente, Fibonacci enuncia a proposição cinco do seguinte modo: Encontre dois números quaisquer de modo que a soma de seus quadrados forme um quadrado, e que este quadrado possa ser formado pela soma de dois quadrados quaisquer diferentes dos dois primeiros.

Para a demonstração, em conformidade com Sigler (1987), Fibonacci toma dois números, os quais, resultam em um quadrado com a soma de seus quadrados: $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{g}$. Da proposição, temos que encontrar outros dois números, os quais, somados resultem no número $\boldsymbol{g}$, o qual, é um número quadrado. Para esse momento usa um triângulo retângulo (Figura 1) como artifício para encontrar esses dois novos números, os quais, são representados pelos catetos desse triangulo retângulo, sendo a hipotenusa o novo quadrado formado.

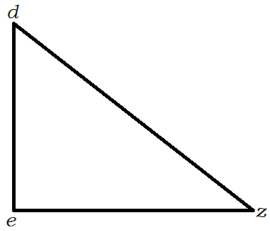

Figura 1 – Representação geométrica proposta por Fibonacci.

Desta forma teremos duas situações, o quadrado pode ser igual ou diferente ao número $\boldsymbol{g}$. Se for igual admitimos que a hipotenusa será igual ao número $\boldsymbol{g}$. Se for diferente, teremos dois desdobramentos, a hipotenusa pode ser menor ou maior que o número quadrado $\boldsymbol{g}$.

Ao observar que a hipotenusa pode ser maior que o número $\boldsymbol{g}$, Fibonacci constrói um triangulo semelhante (Figura 2), dessa forma, determina-se uma constante de proporcionalidade $\boldsymbol{C}$, a partir das seguintes relações:

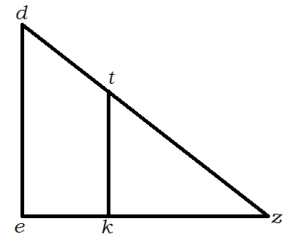

Figura 2 - Representação geométrica proposta por Fibonacci.

➢ $\frac{\overline{tz}}{\overline{dz}} = \boldsymbol{C}$ ➢ $\frac{\overline{tk}}{\overline{de}} = \boldsymbol{C}$ ➢ $\frac{\overline{kz}}{\overline{ez}} = \boldsymbol{C}$

➢ $\overline{tk}^2 + \overline{kz}^2 = \overline{tz}^2 = \boldsymbol{g}$

Observamos da Figura 2 que $\overline{tk} = \frac{\overline{zt}}{\overline{dz}} * \overline{de} \Rightarrow \overline{tk} = \boldsymbol{C} * \overline{de}$, assim como, $\overline{kz} = \frac{\overline{zt}}{\overline{dz}} * \overline{ez} \Rightarrow \overline{kz} = \boldsymbol{C} * \overline{ez}$, desta forma encontramos dois valores proporcionais, os quais a soma de seus quadrados resultam em $\boldsymbol{g}$.

Dando seguimento na demonstração construída por Fibonacci, temos a hipotenusa menor que $\boldsymbol{g}$, para esta situação, de igual forma, é construído um triangulo semelhante (Figura 3) ao primeiro (Figura 1), assim, teremos as seguintes relações, onde denominamos $\boldsymbol{C}$ constante de proporcionalidade.

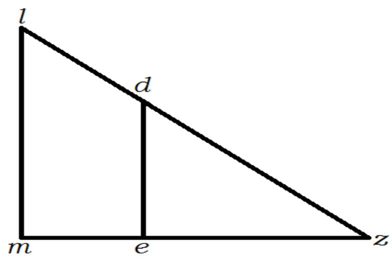

Figura 3 – Representação geométrica proposta por Fibonacci.

DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.2830

$$\triangleright\ \frac{\overline{zl}}{\overline{dz}} = C \quad \triangleright\ \frac{\overline{de}}{\overline{lm}} = C \quad \triangleright\ \frac{\overline{ez}}{\overline{mz}} = C$$

$$\triangleright\ \overline{lm}^2 + \overline{mz}^2 = \overline{lz}^2 = g$$

Dessa forma, temos que $\overline{lm} = \frac{\overline{zl}}{\overline{dz}} * \overline{de} \Rightarrow \overline{lm} = C * \overline{de}$, assim como, $\overline{mz} = \frac{\overline{zl}}{\overline{dz}} * \overline{ez} \Rightarrow \overline{kz} = C * \overline{ez}$, assim como, situação anterior, Fibonacci gera dois valores proporcionais, onde a soma de seus quadrados gera o número quadrado g. Desta forma, podemos afirmar que Fibonacci consegue encontrar dois números quaisquer de modo que a soma de seus quadrados forme um quadrado, e que este quadrado possa ser formado pela soma de dois quadrados quaisquer diferentes dos dois primeiros.

A fim de elucidar a demonstração de Fibonacci, apresentamos um exemplo encontrado em seu livro para essa proposição, o qual apresenta da seguinte forma para:

$$\triangleright\ a = 5 \quad \triangleright\ b = 12 \quad \triangleright\ g = 169$$

Com isso temos que,

$$a^2 + b^2 = g \Rightarrow 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow 25 + 144 = 169 = 13^2$$

E se temos $\overline{dz}^2 > g$ e admitindo,

$$\triangleright\ \overline{de} = 15 \quad \triangleright\ \overline{ez} = 8 \quad \triangleright\ \overline{dz} = 17 \quad \triangleright\ \overline{tz} = 13$$

Temos que,

$$tk = \frac{zt \times de}{dz} \qquad kz = \frac{zt \times ez}{dz}$$

$$tk = \frac{13 \times 15}{17} = \frac{195}{17} = 11\frac{8}{17} \qquad kz = \frac{13 \times 8}{17} = \frac{104}{17} = 6\frac{2}{17}$$

E dessa forma temos que,

$$\overline{tk}^2 + \overline{kz}^2 = \overline{tz}^2 \Rightarrow \left(\frac{195}{17}\right)^2 + \left(\frac{104}{17}\right)^2 = 13^2 \Rightarrow \frac{38025}{289} + \frac{10816}{289} = 13^2$$

$$\Rightarrow \frac{48841}{289} = 169 = 13^2 = .g.$$

E se temos $\overline{dz}^2 < g$ e admitindo que,

$$\triangleright\ de = 4 \quad \triangleright\ ez = 3 \quad \triangleright\ dz = 5 \quad \triangleright\ lz = 13$$

Temos que,

DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.2830

$$\boxed{lm = \frac{zl \times de}{dz}} \qquad \boxed{mz = \frac{zl \times ez}{dz}}$$

$$lm = \frac{13 \times 4}{5} = \frac{52}{5} = 10\frac{2}{5} \qquad kz = \frac{13 \times 3}{5} = \frac{39}{5} = 7\frac{4}{5}$$

E desta forma temos que,

$$\overline{\boldsymbol{lm}}^{\mathbf{2}} + \overline{\boldsymbol{mz}}^{\mathbf{2}} = \overline{\boldsymbol{lz}}^{2} \Rightarrow \left(\frac{\mathbf{52}}{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{\mathbf{39}}{\mathbf{5}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{13}^{2} \Rightarrow \frac{\mathbf{2704}}{\mathbf{25}} + \frac{\mathbf{1521}}{\mathbf{25}} = \mathbf{13}^{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{4225}}{\mathbf{25}} = \mathbf{169} = \mathbf{13}^{2} = .\boldsymbol{g}.$$

Logo,

- Para $\boldsymbol{dz}^2 = \boldsymbol{g}$, temos $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{g} = \overline{\boldsymbol{de}}^2 + \overline{\boldsymbol{ez}}^2$;
- Para $\overline{\boldsymbol{dz}}^2 > \boldsymbol{g}$, temos $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{g} = \overline{\boldsymbol{tk}}^2 + \overline{\boldsymbol{kz}}^2$;
- Para $\overline{\boldsymbol{dz}}^2 < \boldsymbol{g}$, temos $\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{g} = \overline{\boldsymbol{lm}}^2 + \overline{\boldsymbol{mz}}^2$.

Desta maneira, Fibonacci demonstra como podem ser encontrados infinitos valores para esta proposição, bem como, foi possível perceber que basta encontrar uma constante de proporcionalidade e multiplicá-la por qualquer valor para encontrar valores que obedeçam à relação expressa nesta proposição. Portanto, este conjunto de procedimentos, relações e regras podem encaminhar uma proposta de ensino da Regra de Três, é o que faremos a seguir.

Desenvolvimento da Regra de Três

Seguindo nosso objetivo vamos considerar a proposição cinco ajustada nos moldes dos problemas protótipos – problemas ditos/reconhecidos como de regra de três – estudados na escola: Se conhecidos dois números quadrados cuja soma resulta em um quadrado, quais outros dois números quaisquer diferentes dos primeiros que também formam o mesmo quadrado?

É fato que a solução desse problema não se resume ao que vamos apresentar, pode ser obtida utilizando o discurso aritmético analítico como fez Leonardo de Pisa (Fibonacci). Essa resolução que ele realizou pode ser trabalhada pelo professor em sala de aula sem dificuldades de ordem operatória, mas exigiria do aluno certa competência de análise, que se adquire nas experiências em estudos aritméticos. Para superar essa dificuldade, propomos uma solução alternativa que recorre a esquema gráfico auxiliar na disposição dos dados das grandezas e “toques” algébricos.

Neste caso, evocamos a Regra de Três, uma prática de modelização matemática (SILVA, 2011) como método de resolução de problemas de proporcionalidade; a proposição cinco e sua demonstração jogará o papel de dispositivo didático – um contexto próprio de estudo em Matemática – para iniciação ao estudo da regra e suas aplicações em diferentes tipos de problemas de modo prático, rápido e seguro.

O enunciado do problema nos permite escolher dois números: o primeiro 5 e o segundo 12. A soma de seus quadrados é 169, isto é, $5^2 + 12^2 = 169$. Esse resultado corresponde a 13^2 como era de se esperar! Tomando o exemplo em que encontra-se um número quadrado maior, como já foi descrito anteriormente, temos: $8^2 + 15^2 = 289$, para este caso temos como raiz o 17, que para nosso exemplo tomaremos o 8, para determinar o primeiro valor desconhecido e posteriormente o 15, para encontrar o segundo valor desconhecido.

Em seguida, recorrendo a um esquema gráfico (SILVA, 2017) para a disposição dos dados do problema inicial escrevendo os valores das grandezas de mesma espécie na mesma coluna como segue:

$$\downarrow \begin{array}{c} \mathbf{17} \\ \mathbf{13} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \mathbf{8} \\ \mathbf{x} \end{array} \downarrow$$

Daí, segue-se a construção da proporção que após breve analise sobre a proporcionalidade estabelecida entre as grandezas, atribuindo-se $\boldsymbol{x}$ para o número desconhecido, determina-se o valor dos termos **x** e **y** aplicando o método de cálculo denominado produto cruzado como segue:

$$\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{13}} = \frac{\mathbf{8}}{\boldsymbol{x}} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{104}}{\mathbf{17}}$$

Do mesmo modo, chegaremos ao outro número desconhecido **y**:

$$\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{13}} = \frac{\mathbf{15}}{\boldsymbol{y}} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{195}}{\mathbf{17}}$$

Portanto, os números procurados são $\frac{\mathbf{104}}{\mathbf{17}}$ e $\frac{\mathbf{195}}{\mathbf{17}}$.

Como podemos notar, essa resolução de certa forma breve, mobiliza objetos e procedimentos da álgebra elementar, fundamentais para a aprendizagem e manipulação de outros objetos matemáticos que podem ser tratados pelo professor nos diferentes níveis de

DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.2830

ensino sem dificuldades de ordem operacional, do modo como a praxeologia da Regra de Três vive na escola, em geral, como método para resolver problemas de proporcionalidade.

A proposição cinco e sua demonstração, constitui-se de fato por nosso entendimento, um contexto próprio de estudo de objetos matemáticos, neste caso, o processo de ensino e aprendizagem da Regra de Três e suas aplicações, permite ao professor desenvolver a modelização matemática de problemas de proporcionalidade apresentada na proposição cinco se estendendo a outros tipos de problemas aritméticos.

Portanto, a potencialidade didática a partir da proposição cinco do *Liber Quadratorum* como o estudo da Regra de Três, em certa medida foi discutida em acordo com os limites deste artigo. Mais ainda, nos possibilita, vislumbrar em trabalhos futuros, a construção de organizações praxeológicas de complexidade crescente a partir das que os manuais escolares apresentam.

Considerações finais

Percebemos que ao resgatar o *Liber Quadratorum* para fins didáticos, apontou a possibilidade de desenvolver novas alternativas metodológicas em termos de praxeologia, para o ensino da Matemática. Temos potencialidades didáticas nesta obra do século XIII além das já evidenciadas por Guimarães Filho (2018), em relação a conteúdos das séries escolares e que transcendem a obra, tais como: explorar as ternas pitagóricas, elaborar atividades envolvendo quadrados e potências, explorar a evolução da linguagem algébrica entre outros envolvendo a História da Matemática. Além de promover a iniciação ao estudo de Álgebra geométrica, além, se apresenta como um instrumento essencial para um fazer de modelização matemática possível na educação básica (SILVA, 2011).

Portanto, uma resposta à questão inicial que apresentamos - **Como desenvolver uma praxeologia para Regra de Três considerando a proposição cinco de *Liber Quadratorum* como contexto próprio de estudo em Matemática? –** foi parcialmente construída neste texto. Nossa preocupação esteve centrada em fortalecer a ideia que é possível desenvolver na escola básica o estudo da Regra de Três (SILVA, 2011) por meio de um contexto próprio de estudo que pode ser uma obra, um texto, fatos, até mesmo por (re)/construção de praxeologias recorrendo à História da Matemática como neste trabalho, utilizamos para ilustrar nossa compreensão, o *Liber Quadratorum*.

Enfim, esperamos que nosso trabalho possa contribuir para uma reflexão sobre a necessidade de construção e reconstrução de praxeologias matemáticas, e inspire trabalhos futuros para aprofundamento deste estudo inicial, no sentido de construir compreensões sobre outros objetos matemáticos de ensino que possam ajudar o professor no fazer matemático escolar. Nesse sentido deixaremos um questionamento: É possível construir uma praxeologia da Regra de Três na forma algebrizada?

Referências

CASTILLO, Ricardo Moreno. **Fibonacci:** El Primer Matemático Medieval. 2ª ed. Coleção – La matemática en sus personajes. España: Nivola, 2007.

CHEVALLARD, Yves. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico**. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

GUIMARÃES FILHO, José dos Santos. **Um estudo do Liber Quadratorum (1225) de Leonardo Fibonacci (1180 – 1250) e suas Potencialidades para o Ensino de Matemática.** (Dissertação de Mestrado). Belém-PA, 2018.

OLIVEIRA, José Jackson de. **Sequências de Fibonacci:** possibilidades de aplicações no ensino básico. UFBA. Salvador, BA, 2013.

SIGLER, Laurence Edward. **The Book of Squares.** An annotated translation into modern english. Academic Press, USA: 1987.

SILVA, Denivaldo Pantoja da. **Regra de três:** prática escolar de modelagem matemática. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas), Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém-PA, 2011.

SILVA, Denivaldo Pantoja da. **A invariável prática da regra de três na escola**. Tese. (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas), Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém-PA, 2017.