RESOLUÇÃO GEOMÉTRICA PARA EQUAÇÕES QUADRÁTICAS NA VISÃO DE ABD AL-HAMID IBN TURK (SÉCULO IX): O CASO EM QUE $\Delta < 0$

GEOMETRIC RESOLUTION FOR QUADRATIC EQUATIONS IN ABD AL-HAMID IBN TURK'S VISION (9TH CENTURY): THE CASE WHERE $\Delta < 0$

Jéssica Targino Muniz[1]
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Giselle Costa de Sousa[2]
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes[3]
Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Resumo
O presente trabalho trata da apresentação de um exemplar da álgebra geométrica desenvolvida na civilização islâmica medieval, com foco na resolução geométrica de equações quadráticas por Abd Al-Hamid Ibn Turk, matemático islâmico que viveu no século IX. Inicialmente é feita a contextualização da época em relação à ciência, especificamente a matemática desenvolvida do período, para então abordamos um caso particular do método proposto por Turk para solução desse tipo de equação, ou seja, o tipo $x^2 + 30 = 10x$, sendo que o estudioso a desenvolve geometricamente, a partir da enunciação retórica dos passos para construção de uma figura geométrica que representa a equação anteriormente mencionada. Essa equação, no entanto, possui $\Delta < 0$, e os estudiosos islâmicos daquela época não lidavam com números negativos. Mostraremos como Turk lidou com essa situação usando recursos geométricos. O nome de Abd Al-Hamid Ibn Turk foi encontrado inicialmente no livro de Boyer (1974), relacionado ao nome de Al-Khwarizmi e ao estudo de equações quadráticas. Posteriormente foi buscado um aprofundamento sobre a vida e os trabalhos desenvolvidos por esse árabe em trabalhos acadêmicos da área, tendo em vista que os outros livros pesquisados não tratam sobre ele. Desta varredura obtivemos que o principal trabalho acerca de Turk é de Sayili (1962), intitulado *Logical Necessities in Mixed Equations by 'Abd al Hamid ibn Turk and the Algebra of His Time*, em português, Necessidades Lógicas em Equações Mistas: 'Abd al Hamid ibn Turk e a Álgebra do Seu Tempo. Dessa forma, tal documento consiste em nossa principal referência. Destaca-se que os resultados que serão apresentados neste artigo fazem parte de uma pesquisa para uma dissertação de mestrado profissional que está sendo desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECNM), vinculado à Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Esse projeto visa a integração entre a História da Matemática (HM) e as

[1] jessica.tar@hotmail.com
[2] gisellecsousa@hotmail.com
[3] glucheze@gmail.com

DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.2821

Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) por meio da Investigação Matemática (IM) para o ensino de Álgebra Geométrica no Ensino Superior, notadamente, na licenciatura em matemática.

Palavras-chave: Álgebra Geométrica; Abd Al-Hamid Ibn Turk; Soluções de Equações Quadráticas; História da Matemática.

Abstract

This paper presents the presentation of an example of geometric algebra developed in medieval Islamic civilization, focusing on the geometric resolution of quadratic equations by Abd Al-Hamid Ibn Turk, an Islamic mathematician living in the 9th century. Initially, the contextualization of the epoch in relation to science, the mathematics developed for the period, is made, to then approach a specific case of the method proposed by Turk to solve this type of equation, ie the type $x^2 + 30 = 10x$, what is studied or the which is studied geometrically, from the rhetorical enunciation of the steps to construct a geometric figure representing the equation mentioned above. This equation, however, has Δ < 0, and Islamic climate studies are not allowed. Show how Turk handled this situation using geometric features. Abd Al-Hamid's name Ibn Turk was found in Boyer's book (1974), related to the name of Al-Khwarizmi and the study of quadratic equations. Subsequently, it was sought to deepen the life and work done by this Arab in academic studies of the area, given that other books researched do not deal with him. Highlights, getting what is the main work on Turk is from Sayili (1962), entitled 'Logical Necessities in Mixed Equations' by 'Abd al Hamid ibn Turk and the Algebra of His Time, in portuguese, Necessidades Lógicas em Equações Mistas: Abd-Al Hamid Ibn Turk e a Álgebra de Seu Tempo. Thus, the document is our main reference. It is noteworthy that the results that will be presented in this article are part of a research for a professional master's dissertation that is being developed in the Graduate Program in Teaching of Natural Sciences and Mathematics (PPGECNM), linked to the Federal University of Rio Grande of the North (UFRN). This project aims at the integration between the History of Mathematics (HM) and Digital Information and Communication Technologies (TDIC) through Mathematical Research (IM) for the teaching of Geometric Algebra in Higher Education, notably in the Mathematics Degree.

Keywords: Geometric algebra; Abd Al-Hamid Ibn Turk; Quadratic Equation Solutions; History of Mathematics.

Introdução

Esse artigo trata-se de uma investigação abordando a biografia e obra de Abd Al-Hamid Ibn Turk à luz de seu contexto na civilização islâmica medieval (século IX). Destaca-se que essa pesquisa é parte de uma proposta de dissertação de mestrado profissional que está sendo desenvolvida no Programa de Pós – Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECNM), vinculado à Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Tal projeto visa a integração entre a História da Matemática (HM) e as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) por meio da

Investigação Matemática (IM) para o ensino de Álgebra Geométrica no Ensino Superior, notadamente na Licenciatura em Matemática.

A partir de pesquisa histórica bibliográfica obtivemos dados que buscam delinear o trabalho de Turk sobre soluções de equações quadráticas à luz de seu contexto. Como resultado produzimos o ensaio historiográfico que segue que aborda aspectos da matemática islâmica medieval, de Turk e sua obra.

Os islâmicos contribuíram muito para a construção da ciência, a partir da apropriação e aprofundamento dos conhecimentos de outras culturas e ainda produção de novos conhecimentos. Antes da expansão do império islâmico, os povos da Arábia dependiam principalmente da tradição oral (memorização e declamação de longas obras) para preservar sua literatura e história. Com a criação de bibliotecas e escolas em Bagdá, capital do império islâmico, especialmente no período chefiado pelo Califado Abássida, essa realidade foi modificada. Além disso, cientistas, poetas e outras pessoas instruídas vieram visitar e estudar o novo centro científico do império, favorecendo o desenvolvimento de vários campos disciplinares como a astronomia, a medicina, a agricultura, a economia, entre outros. (DOAK, 1963). Realmente, de acordo com Katz (2008, p. 266, tradução nossa), "no final do século IX, muitas das principais obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio, Diofante, Ptolomeu e outros matemáticos foram traduzidos para o árabe e estavam disponíveis para estudo dos estudiosos que se reuniam em Bagdá".

Nesse contexto, um campo de conhecimento da matemática muito estudado pelos islâmicos foi a álgebra, provavelmente pelas amplas possibilidades de aplicação para solução de problemas da civilização islâmica – complicadas regras instituídas pelo islamismo para a repartição de heranças, o crescente comércio, a arquitetura e o artesanato, entre outras situações que necessitavam de generalização da aritmética e impulsionaram o desenvolvimento da álgebra nesse período e região. Vale ressaltar que a álgebra mencionada para esse período se refere à essa generalização dos processos aritméticos e por isso tem forte relação com essa evolução da própria aritmética. Tal fato ocorria a partir de uma fase que entendemos como inicial de sua evolução e que chamamos de álgebra retórica.

Cabe enfatizar também as contribuições gregas para os avanços realizados em álgebra no império islâmico. No que diz respeito à geometria, os estudos de Euclides (360

DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.2821

a. C. – 295 a. C.) de Alexandria, principalmente, influenciaram os matemáticos do império islâmico. Euclides possuía como foco de estudo a geometria, expressando seu raciocínio algébrico de forma geométrica. Os gregos inspiraram ainda de outra forma a álgebra islâmica, a saber, a partir da lógica rigorosa da demonstração, já que a matemática grega possuía como essência a argumentação das ideias apresentadas. Katz (2008, p. 271, tradução nossa, grifo nosso) salienta que:

> As contribuições mais importantes dos matemáticos islâmicos residem na área da álgebra. Eles levaram o material já desenvolvido pelos babilônios, combinado com a clássica herança grega da geometria, que eles passaram a estender, **produzindo uma nova álgebra.** No final do século IX, os principais clássicos matemáticos gregos eram bem conhecidos no mundo islâmico. Estudiosos islâmicos os estudaram e escreveram comentários sobre eles. Uma ideia importante que aprenderam com o estudo dessas obras gregas foi a noção de prova. Eles absorveram a ideia de que não se pode considerar um problema matemático resolvido a menos que se pudesse demonstrar que a solução era válida. Como se demonstra isso, particularmente para um problema de álgebra? A resposta parecia clara. As únicas provas reais eram geométricas. Afinal, foi a geometria encontrada nos textos gregos, não a álgebra. Assim, estudiosos islâmicos geralmente se colocam nas tarefas de justificar as regras algébricas, tanto as antigas babilônicas como as novas que eles próprios descobriram, demonstrando-os através da geometria. (KATZ, 2008, p. 271, tradução nossa, grifo nosso).

É fundamental esclarecer que a álgebra islâmica era diferente da grega, do mesmo modo diferente da babilônica ou da hindu. Essa outra álgebra era uma combinação dessas outras matemáticas, mas não deixava de possuir sua originalidade. Como dito, esse ramo da matemática pode ser descrito como **álgebra geométrica**, visto que possuía elementos da generalização da aritmética, bem como fornecia provas geométricas dos resultados encontrados.

Um dos representantes desse campo de estudos na época delimitada pelos anos 800 a 950 (século IX) é ‘Abd al-Hamid Ibn Turk que significa servo do elogiado (‘Abd al-Hamid), filho de (ibn), turco (Turk). É importante observar que o nome desse personagem possui variações na literatura, tais como: ‘Abd al-Hamid Ibn Turk, Abd al-Hamid ibn Wasi ibn al-Turk Khutalli, Abd al-Hamid ibn Wasi ibn al-Turk al-Jili, Abu’l-Fadl, Abu Muhammad Ibn Turk al-Jili.

Figura 01 – ‘Abd Al-Hamid Ibn Turk

Devido ao significado de seu nome, pode-se concluir que ele era turco ou possuía antepassados turcos, mas que poderia ser nativo de duas regiões árabes regidas pelo islamismo no período medieval: Al-Jili ou Khutalli. De acordo com Katz (2008, p. 274, tradução nossa), “Abd al-H. ibn Wasi ibn Turk al-Jil foi um contemporâneo de Al-Khwarizmi sobre quem muito pouco é conhecido. As fontes até diferem quanto a se ibn Turk era do Irã, Afeganistão ou Síria.” Na figura 02 podem ser observados no mapa, circuladas em vermelho, as regiões prováveis do nascimento de Turk.

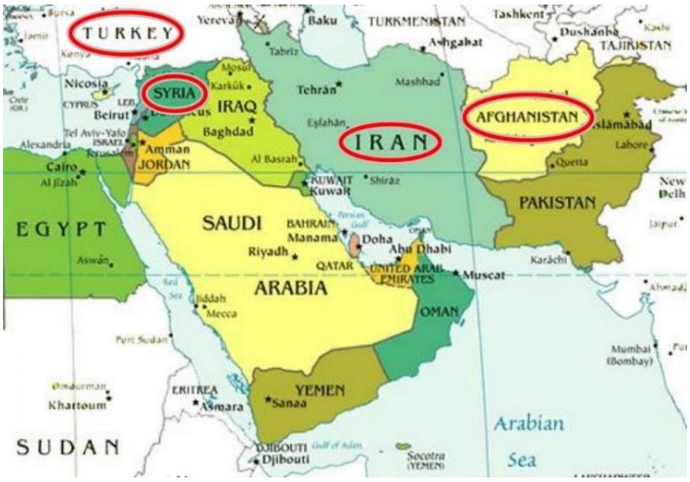

Figura 02 – Regiões prováveis do nascimento de Turk

Sabe-se pouco sobre sua biografia. Referências sobre esse personagem são obtidas, por exemplo, por meio de livros de outros autores, tais como Ibn al-Nadim (935-995), Ibn al-Qifti (1172-1248) e Hajji Khalifa (1608 -1657) (*apud* SAYILI, 1962). Destaca-se que as informações são colocadas em confronto para complementação e por vezes são contraditórias. É indefinido, por exemplo, se Ibn Turk e Al-Khwarizmi (outro matemático islâmico) viveram na mesma época, do final do século XVII até meados do século X (isso porque, inclusive, não se tem a confirmação da data de nascimento de Turk).

Assim como muitos de seus contemporâneos a influência da religião e de estudos de outras civilizações esteve presente no trabalho de Turk. De fato, em trechos de sua obra, ele demonstra seguir a religião muçulmana, incorporar aspectos da matemática grega (demonstrações a partir do raciocínio geométrico), além de trazer o pensamento algébrico com a visão geométrica. Isso revela que sua produção se enquadra na idade de ouro islâmica, isto é, do período medieval.

Resultados e discussões

Sobre os trabalhos científicos de Ibn Turk, sabe-se que o mesmo escreveu um livro sobre álgebra, *Kitâb Al Jabr Wa'l Muqâbala*, do qual apenas um capítulo, intitulado *Necessidades Lógicas em Equações Mistas* sobreviveu até os dias atuais. Destaca-se que o autor escreveu outros livros, entretanto esses se perderam. De acordo com Sayili (1962), o capítulo *Necessidades Lógicas em Equações Mistas* trata de resolução de equações quadráticas com ênfase no raciocínio geométrico. Nele, Turk representava, por exemplo, casos particulares de equações polinomiais de 2º grau utilizando a geometria. O interesse pelo tema se justifica pelo espírito de época, em que outros estudiosos trabalhavam com álgebra também nessa perspectiva, tais como Al-Khwarizmi (~780-~850), Al-Mahani (820-880), Thabit ibn Qurra (836-901) e Abu-Kamil Shuja (850-930).

Enfatiza-se que a álgebra geométrica de Turk se assemelha muito com a desenvolvida por Al-Khwarizmi no livro *al-Kitab al-mukhtasar fi Hisab al-jabr w'al-muqabala* (Livro Condensado sobre O Cálculo da Restauração e do Balanceamento). Porém o trabalho de Turk conta com mais detalhes acerca dos conteúdos expostos por ele, quando comparado com Al-Khwarizmi (BOYER, 1974). Para Katz (2008), o termo, condensado, presente no título do livro de Al-Khwarizmi sugere que haviam outros textos mais detalhados dos procedimentos algébricos da época.

Algumas características gerais do trabalho de Turk serão citadas a seguir. Saiyli (1962) afirma que "o texto atual de 'Abd Al-Hamid Ibn Turk, que tem cerca de mil e quatrocentas palavras e é provavelmente um capítulo da Álgebra de Abd Al-Hamid. Pode consistir em apenas uma parte de um capítulo, mas, nesse caso, forma uma seção bem definida, completa em si mesma com seu início e fim". Como posto, o trabalho versa sobre a resolução de equações quadráticas a partir de uma visão geométrica, sendo que o mesmo não apresenta problemas práticos (tais como questões de herança ou astronomia). As equações resolvidas por Turk são desenvolvidas a partir de uma abordagem da matemática com exemplos não aplicados no cotidiano da época. Isso ocorre provavelmente porque Turk escreveu outro livro apenas sobre transações comerciais, que se voltaria para questões aplicadas.

O texto de Turk, no documento aqui analisado, começa com um excerto religioso, declarando que "Em nome de Alá, misericordioso e compassivo. Benção e paz estejam sobre Maomé, o mestre dos profetas e sobre todos os seus descendentes". (TURK *apud* SAYILI, 1962). Essa passagem inicial do texto revela a influência religiosa nos escritos matemáticos da época.

Posterior a esse trecho, inicia-se a resolução de equações polinomiais de segundo grau, que são divididas em 4 casos, e em linguagem simbólica correspondem a:

$$x^2 = bx \text{ (Caso 1)}$$

$$x^2 + bx = c \text{ (Caso 2)}$$

$$x^2 + c = bx \text{ (Caso 3)*}$$

$$\mathrm{bx} + \mathrm{c} = \mathrm{x}^2 \text{ (Caso 4)}$$

Destaca-se que o caso representativo de equação quadrática $\mathrm{x}^2 + \mathrm{c} = \mathrm{bx}$ (Caso 3) é segmentado ainda em 3 outros, conforme segue:

Caso de solução dupla (Caso 3a)

Caso em que $\mathrm{x} = \frac{\mathrm{b}}{2}$ (Caso 3b)

Caso sem solução (Caso 3c)

A razão para dividir em casos é que os matemáticos islâmicos não lidavam com números negativos, então os coeficientes a, b e c eram sempre positivos, assim como as raízes das equações. No seu texto, Turk traz um exemplo para cada caso citado por ele, resolvendo-os geometricamente, a partir da enunciação retórica e da exposição das figuras construídas. Segundo Boyer (1974, p. 170):

> Os capítulos preservados sobre 'Necessidades Lógicas' dão exatamente o mesmo tipo de demonstração geométrica que a Álgebra de Al-Khwarizmi e num caso o mesmo exemplo ilustrativo $x^2 + 21=10x$. Num ponto a exposição

> de Abd Al-Hamid é mais completa que a de Al-Khwarizmi, pois, ele fornece figuras geométricas para provar que se o discriminante é negativo uma equação quadrática não tem solução.

No presente artigo, como citado anteriormente, será dado enfoque ao caso sem solução (3c), em que Turk demonstra a impossibilidade de resolução de equações do caso $x^2 + c = bx$ quando $c > \left(\frac{b}{2}\right)^2$. Essa condição faz com que Δ seja menor que 0, e portanto, as raízes sejam imaginárias. Como já posto, os matemáticos islâmicos dessa época não aceitavam a existência de números negativos, pois para eles, esses números não possuíam significado. Dessa forma, esses estudiosos não resolviam equações em que Δ é negativo. De acordo com Turk *apud* Sayili (1962, p. 46) o processo de análise dessa situação pode assim ser resumido:

> Há a necessidade lógica de impossibilidade neste tipo de equação quando a quantidade numérica que está com (no mesmo lado da igualdade como) a quantidade quadrada é maior que a metade do número das raízes multiplicada por seu igual. Assim, quando dizemos que uma quantidade quadrada e trinta dirhams são iguais a dez raízes, representamos a quantidade quadrada por uma figura quadrilateral do plano equilateral. Deixe esta ser a superfície AD. Acrescentamos a ela a figura retangular HB, e a definimos igual a trinta. A superfície HD é assim igual a dez raízes e cada uma das linhas HC e ZD tem o valor dez. Nós dividimos a linha ZD em duas partes iguais no ponto Q. Consideremos primeiro o caso em que o ponto Q está localizado na linha ZB [...]. Nós desenhamos a linha QT em ângulos retos para ZD e com o mesmo comprimento de cada uma das linhas ZQ e QD, ou seja, igual a cinco, e completamos o KQ quadrilateral, que é portanto igual a vinte e cinco. A linha TQ é igual à linha DQ. Portanto, a linha TL é igual à linha LA. Como a linha LQ é igual à linha AC e a linha KT é igual à linha TQ, o KL quadrilátero é maior que o quadrilátero LB; e nós adicionamos o QG quadrilateral a ambos os quadriláteros. Os quadriláteros KL e HQ juntos são, portanto, maiores que os quadriláteros HQ e QA juntos. Agora, os quadriláteros HQ e QA juntos eram iguais a trinta, e os quadriláteros KL e HQ juntos eram iguais a vinte e cinco. Vinte e cinco torna-se, portanto, superior a trinta. Mas isso é absurdo e impossível. A necessidade lógica de impossibilidade neste tipo de equação tem assim aparecido. Da mesma forma, deixe o ponto Q cair dentro da seção BD. Nós desenhamos a linha QT em ângulos retos para ZD e com o mesmo comprimento de cada uma das linhas ZQ e QD, e completamos o KQ quadrilateral, que assim tem o valor vinte e cinco. Condições como as aqui satisfeitas indicam que o QL quadrilateral é maior que o QE quadrilateral. Consideramos o KB quadrilateral como adicionado a ambos os quadriláteros. Os quadriláteros KB e BT juntos são assim maiores que os quadriláteros KB e KA tomados juntos, agora, os quadriláteros KB e KA juntos tinham o valor trinta e os quadriláteros KB e BT juntos vinte e cinco. Vinte e cinco, portanto, torna-se maior que trinta. Mas isso é absurdo e impossível.

O exemplo dado por Turk para esse caso, 3c, é, em linguagem simbólica $x^2 + 30 = 10x$. Realizando a construção feita por Turk (*apud* Sayili), temos inicialmente o quadrado ABDC, que possui área de x^2.

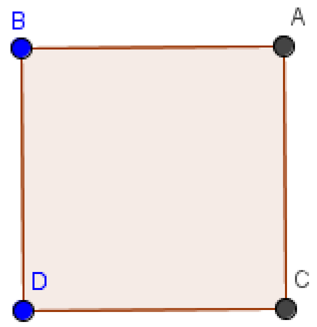

Figura 03 – Quadrado de lado x.

Anexo ao quadrado ABDC será construído o retângulo BZHA, que possui área igual à 30.

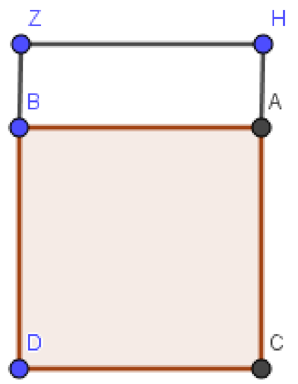

Figura 04 – Construção do retângulo BZHA.

Com a construção do retângulo BZHA, uma outra figura geométrica é formada. Trata-se da união entre o quadrado ABCD e do retângulo BZHA, que formam o retângulo ZHCD. Calculando a área desse retângulo, obtém-se que é igual à x^2 (área do quadrado ABCD) adicionado de 30 (área do retângulo BZHA). A equação quadrática que estamos resolvendo é $x^2 + 30 = 10x$, e portanto, a área de ZHCD é igual à 10 raízes $(10x)$. Como o segmento DC mede x, chegamos à conclusão de que os segmentos HC e DZ medem 10 unidades de comprimento.

O próximo passo da construção indicada por Turk é a localização do ponto médio do segmento DZ (ponto Q), que mede 10 unidades de comprimento. Dessa forma, ZQ mede 5 unidades de comprimento, assim como QD.

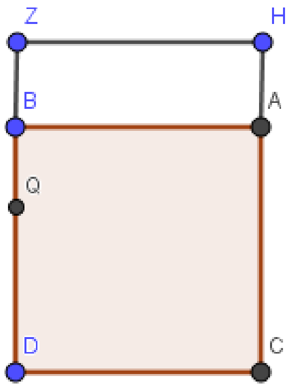

Figura 05 – Localização do ponto Q.

Nesse momento Turk divide a situação em dois cenários possíveis, sendo que em ambos se conclui que essa equação possui uma impossibilidade lógica, conforme segue:

- SITUAÇÃO 01: Caso em que o ponto Q está localizado no segmento ZB.

- SITUAÇÃO 02: Caso em que o ponto Q está localizado no segmento BD.

Seguindo a construção proposta por Turk (na situação 2), será desenhado o segmento QT, perpendicular ao segmento ZD, e mesmo comprimento dos segmentos ZQ e QD.

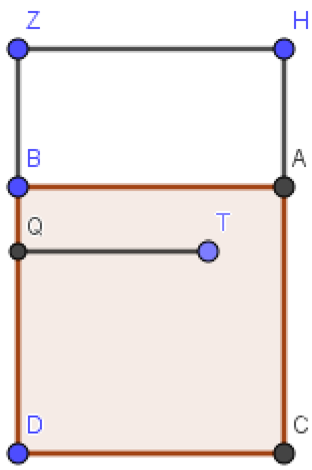

Figura 06 – Elaboração do segmento QT.

Aqui, será criada uma nova figura geométrica, a saber, o quadrado ZQTK, que possui área igual a 25 unidades de área.

DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.2821

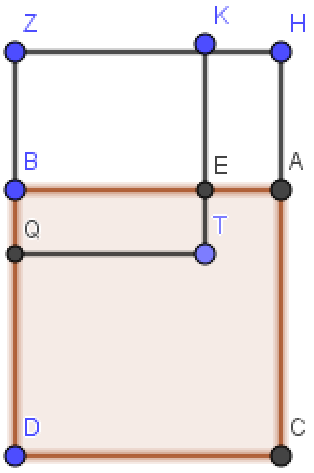

Figura 07 – Completamento do quadrado ZQTK.

A partir dessa construção, nota-se que o quadrado ZQTK possui área maior que o retângulo ZBAH, visto que BQTE é maior que KHAE. Além disso, o retângulo ZBEK é comum a ambas as figuras, ou seja, o retângulo ZBAH é formado pela figura ZBEK somado com a figura KHAE, e a soma da área dessas figuras é igual à 30. Quanto ao quadrado KZQT, esse é formado por ZBEK e BQTE, e possui área igual à 25. Mas isso é absurdo e impossível, pois 25 é menor que 30.

Considerações finais

Nesse trabalho foram abordados alguns aspectos científicos da civilização islâmica medieval, tais como a importância da Casa da Sabedoria para preservação de conhecimentos antigos e produção de pesquisa científica naquela época e desenvolvimento da álgebra. Em seguida, à luz desse contexto foi apresentada uma breve biografia do estudioso Abd Al-Hamid Ibn Turk (século IX) e conteúdo de um trabalho escrito por ele (Necessidades Lógicas em Equações Mistas*)*, que trata da álgebra geométrica aplicada às soluções de equações quadráticas.

Sintetizando o método de resolução de equações quadráticas feito pelo matemático islâmico Turk, notamos que são apresentados seis casos, cujo terceiro é subdividido em outros três casos e ainda que dois deles são tratados a partir de duas situações (caso 3a e caso 3c). Todas as suas designações são em linguagem retórica (que traduzimos para a linguagem simbólica), acompanhadas por exemplos de equações e indicações para construções geométricas feitas pelo autor com vistas a resolver essas equações geometricamente. Como ilustração do método proposto por Turk, nessa

DOI: 10.30938/bocehm.v7i20.2821

pesquisa, realizamos passo-a-passo da construção indicada por ele para lidar com equações em que $\Delta < 0$, especificamente na equação $x^2 + 30 = 10x$, em que a figura geométrica para esse caso recaí em um absurdo.

É possível observar que a forma pela qual Turk lidou com equações polinomiais de segundo grau estabelece um vínculo entre a álgebra e a geometria, dois ramos da matemática geralmente estudados isoladamente, mas cuja ligação condiz com espírito de época da matemática islâmica medieval. Nota-se, pois que, assim como seus contemporâneos, Turk evita em algumas situações os números negativos, mas ainda assim desenvolve um estudo que prima pelo rigor e detalhe que o permitiu, por exemplo, aprofundar trabalhos de outros como Al-Khwarizmi (BOYER, 1974). Destaca-se, nesse sentido, que essa pesquisa propiciou a realização de atividades para a licenciatura em matemática, integrando os campos anteriormente mencionados, ampliando a compreensão das ideias em estudo e minimizando a fragmentação de conteúdos (LORENZATO, 2010).

Referências

BERGGREN, J. L. **Episodes in the mathematics of medieval Islam.** 1986.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

KATZ, Victor J.; PARSHALL, Karen H. **Taming the unknown:** history of algebra from antiquity to the early twentieth century. 2014.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática.** 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2010. Coleção Formação de Professores.

SAYILI, A**. Logical Necessities in Mixed Equations by ‘Abd al Hamid ibn Turk and the Algebra of His Time.** Ankara, 1962. Disponível em: <http://www.muslimheritage.com/article/logical-necessities-mixed-equations-abd-al-ham%C3%AEdibn-turk-and-algebra-his-time/> Acesso em 29 mai. 2019.