

ASPECTOS HISTÓRICOS DO RIGOR NA CONCEPÇÃO DE INTEGRAL

HISTORICAL ASPECTS OF RIGOR IN THE CONCEPTION OF INTEGRAL

Artur Rezzieri Gambera¹

IGCE – UNESP – Rio Claro

Resumo

Neste artigo trazemos uma narrativa traçada através de alguns dos momentos do desenvolvimento da teoria de cálculo de áreas: a noção de quadratura de figuras curvas discutida pelos gregos na antiguidade, a conceituação da integral usando infinitesimais e a introdução do símbolo \int feita por Leibniz, a definição rigorosa de Cauchy para funções contínuas em um intervalo finito e a expansão desta definição feita por Riemann, que permitiu uma maior abrangência de funções passíveis de integração. Estes momentos revelam alguns dos caminhos pelos quais o pensamento matemático percorreu ao longo das épocas, bem como os padrões de escrita deste pensamento, o que envolve o aspecto cultural do rigor desta escrita para que fosse considerada satisfatória nos ambientes em que a pesquisa matemática foi desenvolvida através do tempo. Tais momentos também levantam questões epistemológicas sobre o assunto tratado que não necessariamente surgem quando o tema é abordado de um ponto de vista puramente atual, como por exemplo a natureza de números e magnitudes, que virão a ser a essência do que é conceituado hoje como números reais; além de sugerirem diversas abordagens para a prática docente usando história da matemática, podendo ser combinadas com outras metodologias de ensino. O tratamento do tema foi baseado em uma historiografia tradicional, apesar de poder evoluir para uma história das ideias por envolver formas da produção de um conhecimento; e nosso objetivo foi trazer elementos que compuseram a ideia do cálculo de áreas para que componham também o pensamento em construção por parte do estudante de cálculo ou análise, bem como do docente destas disciplinas.

Palavras-chave: análise; cálculo integral; educação; história; quadratura.

Abstract

In this article we bring a narrative through some moments of the development of the theory of calculation of areas: the notion of quadrature of curves discussed by the ancient greeks, the conceptualization of integral using infinitesimals and the introduction of the symbol \int made by Leibniz, the rigorous definition of continuous functions in a finite interval made by Cauchy, and the expansion of this definition made by Riemann which permitted a bigger coverage of integrable functions. These moments reveal some of the paths by which the mathematical thought traveled through the ages, as well as the standards of the its writing, what involves the cultural aspect of the rigor necessary to be considered satisfactory in the ambience where the mathematical research was developed. Such moments also raise epistemological questions about the subject treated which not

¹ rezzierigambera@gmail.com

emerges necessarily when the topic is addressed from a purely nowadays viewpoint, such as the nature of numbers and magnitudes which will be the essence of what is now conceived as the real numbers; furthermore suggesting different approaches for the teaching practice using history of mathematics possibly combined with other methodologies. The treatment of the theme was based on a traditional historiography, being able to evolve to a history of ideas because it involves means of the production of knowledge; and our aim was to bring elements who composed the idea of the calculation of areas which can also compose the thought under construction by the student of calculus or analysis, as well as the professor of these subjects.

Keywords: analysis; integral calculus; education; history; quadrature.

Introdução

A pesquisa em história da matemática relacionada com a educação pode sugerir diversas justificativas, a nossa é buscar entender a própria natureza do pensamento matemático através dos registros que sobreviveram ao tempo e se consolidaram oficialmente na disciplina que lecionamos. Por outro lado, acompanhar o desenvolvimento de um conhecimento no tempo enriquece a compreensão que temos dele, ampliando as possibilidades de concepções didáticas possíveis. Este tipo de pesquisa nos permite perceber as manifestações das primeiras dúvidas a respeito de um objeto intelectual em construção. Familiarizar-nos com essas dúvidas enriquece nossas aulas, seja qual for o nível de educação trabalhado.

História da matemática é também história do pensamento, e é também história da comunicação desse pensamento, o que já sugere a forte relação que esse campo de pesquisa tem com o da educação. Quando falamos em pensamento matemático, também falamos em linguagem matemática e conseqüentemente do rigor que ela exige. O rigor se fará mais ou menos necessário de acordo com a complexidade do pensamento a ser expressado. O exame dessa prática através do que se constitui as fontes do historiador revelam as mudanças que esse rigor sofre com o tempo. Eventualmente, uma linguagem mais rigorosa simplifica e facilita o manuseio de um conceito. Isso nos mostra que os padrões de rigor mais aceitos como norma na comunidade matemática variaram de acordo com o uso que estava sendo feito deles. A exploração de novos paradigmas de rigor pede por novos conceitos, criam novas dúvidas. Costumam aparecer novos objetos que não são bem explicados com esse novo padrão, exigindo mais rigor da linguagem matemática sempre em construção.

Nosso objetivo é dar um vislumbre desse acontecimento no desenvolvimento da teoria de quadratura de curvas. Abordamos a discussão do assunto feita pelos gregos

antigos acerca do cômputo de áreas de figuras e a formalização da integral dada por Leibniz usando a ideia de infinitesimais. Em seguida exploramos o tratamento dado por Cauchy à definição de integral utilizando limites e evitando o uso de infinitesimais. Por fim consideramos o trabalho de Riemann na expansão desse conceito, abarcando um novo tipo de função.

Abordamos os registros de como a ideia foi tratada por diferentes matemáticos, com a descrição dos modelos dos paradigmas em sucessão, sob uma historiografia tradicional; muito embora possa evoluir para uma história das ideias em trabalhos futuros, visto que nosso trabalho envolve a produção de conhecimento e os modos de pensar o cálculo de áreas. Nosso objetivo com isso é trazer elementos que compuseram as ideias em diversas etapas de sua emergência com a intenção de que isso possa fazer parte da composição do pensamento sendo construído.

O cômputo de áreas de figuras e a gênese da ideia de integral

Alguns problemas básicos da análise estão presentes de forma geométrica na matemática grega antiga. Thiele (2003, p.1) apresenta quatro radicais:

1. operações com letras (álgebra) - Viète e Descartes;
2. geometria analítica - Fermat e Descartes;
3. a ideia de função (conceito principal da análise) - Oresme, Bernoulli e Euler;
4. números reais - Bolzano, Dedekind e Cantor.

Estes elementos não são encontrados explicitamente na matemática grega. O que se faz são comparações anacrônicas que auxiliam na elucidação dos fatos documentados (Kragh, 1987, p.89). As fontes históricas são com frequência “traduzidas”, o que se justifica com intenções didáticas.

As palavras síntese e análise são de origem grega e possuem significados opostos. Informalmente, a primeira representava a adição de magnitudes formando um todo enquanto a segunda era a sua partição. Ambas se tornaram parte do vocabulário matemático representando as duas partes essenciais de demonstrações e construções geométricas.

A análise é a decomposição de um dado problema através de etapas lógicas até que se chegue em algo já conhecido como verdadeiro ou uma contradição (mostrando que o problema é insolúvel). A síntese completa a prova invertendo o processo, deduzindo a tese do que foi descoberto verdadeiro na análise.

Havia também uma distinção entre as ideias de número e de magnitude. Os matemáticos gregos concebiam número como o que chamamos atualmente de número natural. No livro VII dos Elementos “número é a quantidade composta de unidades”, em que “unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma”. Ainda que a unidade não fosse considerada como número. Não temos fontes que atestem alguma definição de magnitude que tenha sobrevivido ao tempo. Magnitudes são geralmente caracterizadas com a propriedade de sofrerem incrementos e reduções, o que para Thiele (2003, p.6) permite uma dupla interpretação de seu conceito: um objeto matemático é uma magnitude e este mesmo objeto pode ser medido e o resultado ser uma magnitude.

Para os gregos antigos, números são magnitudes, mas nem toda magnitude é número. A percepção de que algumas propriedades válidas para os números não permanecem válidas para magnitudes contínuas levou ao que é chamado de primeira crise de fundamentos da matemática.

Na matemática grega, a área de uma figura plana era determinada se fosse possível encontrar através de uma construção geométrica (usando régua e compasso) um quadrado cuja área fosse provada ser igual à da figura dada. A área de qualquer polígono era, assim, facilmente encontrada. A noção de quadratura deriva dessa concepção. A quadratura do círculo foi bastante debatida.

Uma das ideias principais na determinação de sua área, é a que ficou conhecida como método da exaustão que, quando se deseja encontrar uma magnitude A , se resume a aproximar uma magnitude B mais fácil de lidar e mostrar que não ocorre nem $A < B$ nem $B < A$. Esta dupla redução ao absurdo nos leva a concluir que $A = B$.

O método da exaustão não é um processo de limite, pois não usa sequências infinitas. Ele sempre termina após um número finito de iterações (até que a diferença entre a área calculada e a que se deseja encontrar seja considerada insignificante, apesar de ser usada na prova por contradição). Esse método é rigoroso, mas não muito prático.

Com este método, Arquimedes (século 3 a.C.) mostrou que a área P sob um segmento de parábola é igual a $\frac{4}{3}T$, em que T é a área do triângulo ABC inscrito no segmento de parábola representado na figura 1 a seguir:

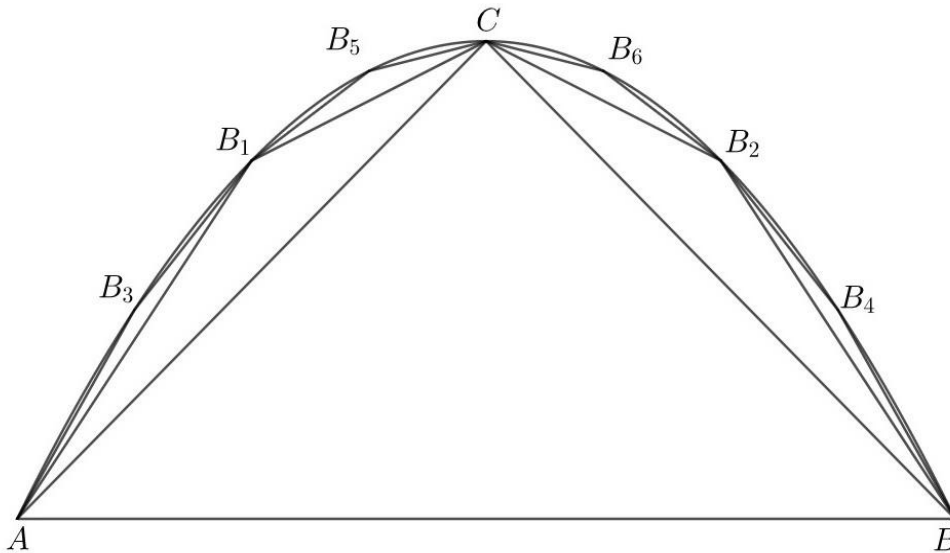


Figura 1 - Relação entre a área de um segmento de parábola e o triângulo ABC nela inscrito

A cada iteração um novo triângulo é desenhado sobre os lados do triângulo anterior. Arquimedes mostrou que os triângulos traçados na n -ésima iteração possuem área igual a $\frac{T}{4^{n-1}}$, portanto a área total dessa construção é igual a

$$T \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right).$$

Em seguida mostrou que não ocorre nem $P > \frac{4}{3}T$ nem $P < \frac{4}{3}T$.

Arquimedes não desenvolveu um algoritmo para calcular áreas de figuras. Ele buscava uma nova abordagem geométrica para todo problema, até mesmo para os análogos. Dessa forma não é dito que ele tivesse formulado algum conceito de integração, no entanto chegou perto disso. O rigor arquimediano reinou como o modelo metódico para qualquer procedimento de quadratura por bastante tempo depois de sua morte.

Gradualmente os métodos geométricos foram substituídos pelos aritméticos por serem algorítmicos e mais gerais. O cálculo veio à luz quando foi descoberto que diferenciação e integração eram operações inversas uma da outra, e estas realizadas de maneira algorítmica. A linguagem simbólica para isso já estava estabelecida.

Guicciardini (2003, p.73) aponta três aspectos do cálculo de Newton e de Leibniz:

1. a redução de problemas;
2. o cômputo de áreas através da inversão do processo do cálculo de tangentes;
3. a criação de um algoritmo.

Ambas as teorias se baseiam numa ideia geométrica (ou cinemática) de contínuo intuitiva, e seus procedimentos de limite se apoiam fortemente nisso. Além disso, a ideia

de “função” ainda não existia, logo eles trabalhavam por meio de quantidades e entidades geométricas específicas para designar suas taxas de variação.

O algoritmo criado por Leibniz (ainda usado, mas de forma revisada e num contexto conceitual diferente) considera duas construções geométricas que cumpriram um papel relevante nas técnicas infinitesimais do século XVII: o triângulo característico e a área subentendida a uma curva como a soma de faixas infinitesimais.

Seja C uma curva num sistema cartesiano. Leibniz concebeu uma subdivisão do eixo x em infinitos intervalos infinitesimais com extremos x_1, x_2, \dots e definiu $dx = x_{n+1} - x_n$. Na curva, em relação aos pontos correspondentes s_1, s_2, \dots definiu $ds = s_{n+1} - s_n$ e no eixo y definiu $dy = y_{n+1} - y_n$. O triângulo característico tem lados dx, dy e ds . A tangente à curva forma um ângulo $\gamma = dy/dx$ com o eixo x , e a área sob a curva é igual à soma das infinitas faixas ydx . Para designar esta soma Leibniz usou a notação $\int dx$, em que \int é um “s” longo que representa “a soma de” (GUICCIARDINI, *Ibid.*, p.89).

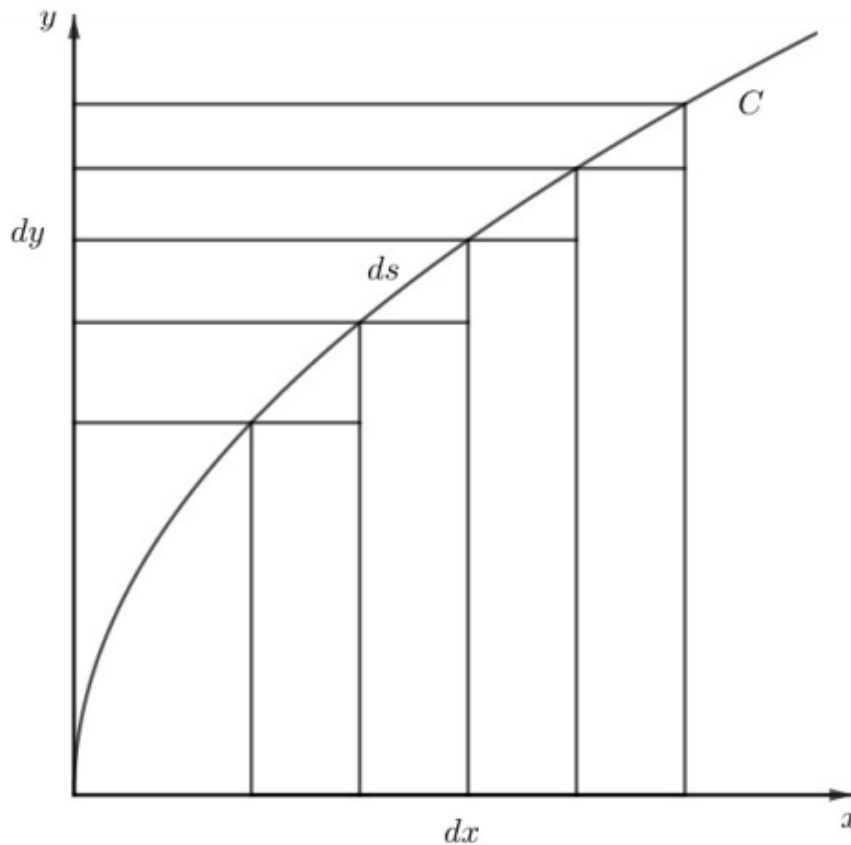


Figura 2 - Integral de Leibniz

Uma das questões fundamentais mais importantes que foi levantada na época, foi a respeito da natureza dos infinitesimais, que além de ter um caráter ontológico questionava a legitimidade das regras de demonstração dessa nova análise. Para Newton e Leibniz, os infinitesimais não passavam de ficções úteis empregadas para abreviar provas, e que deveriam ser definidos como quantidades variáveis que se aproximam de zero. Ambos concordavam também que os infinitesimais podiam ser evitados através de demonstrações baseadas em limites, constituindo a formulação rigorosa do cálculo, e que estas demonstrações seriam uma versão direta do método de exaustão arquimediano (GUICCIARDINI, *Ibid.*, p.97).

No final do século XVIII a noção de função tornou-se fundamental e os livros de Lagrange introduziram uma concepção explicitamente algébrica do cálculo. O entendimento geral do cálculo infinitesimal estava conectado a três conceitos fundamentais: diferenciais, funções e séries de potências. A ferramenta mais importante para a representação de funções eram as séries de potências, consideradas majoritariamente como polinômios infinitos.

O Teorema Fundamental do Cálculo permitia falar de integrais através de derivadas, não sendo necessário recorrer às somas de áreas. Se uma função f é contínua (e positiva, para simplificar) entre os números a e b , incluindo os valores $f(a)$ e $f(b)$, e é possível encontrar uma função F tal que $F'(x) = f(x)$ para todo x nesse intervalo, então a integral definida de B entre a e b é a diferença:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

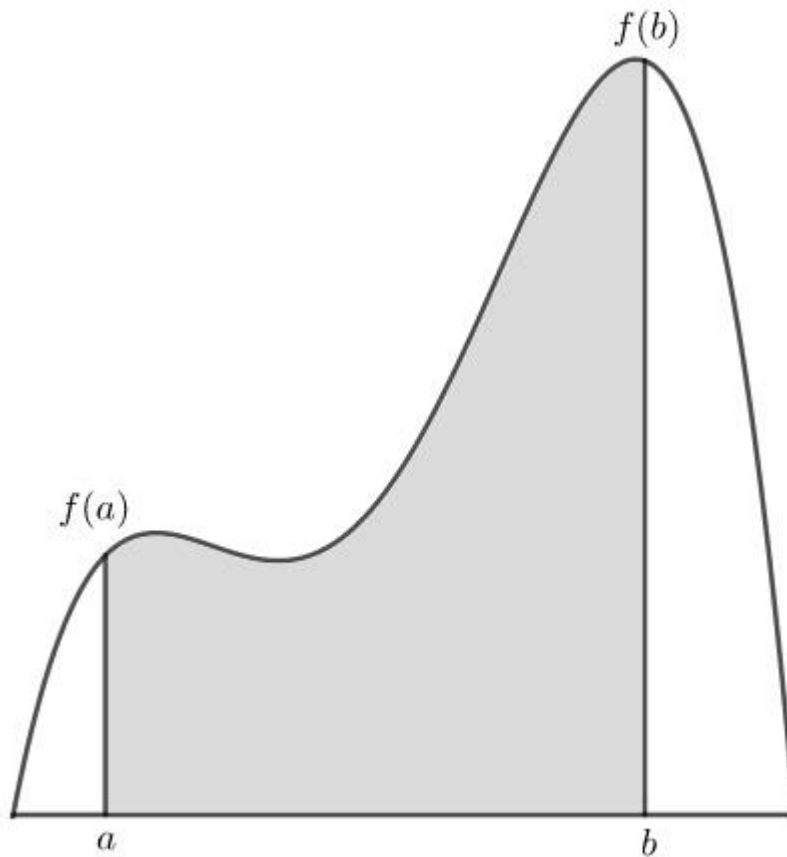


Figura 3 - Integral definida sobre uma curva

No século XIX, surgiram várias discussões acerca de uma definição mais rigorosa de integral, motivadas pela afirmação de Fourier de que toda função f pode ser expressa como:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kw) + b_k \sen(kw)), \tag{1}$$

em que os coeficientes são:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt; \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sen(kt) dt.$$

De fato, não é toda função que pode ser escrita desta forma, no entanto isso motivou muita pesquisa em convergência de séries infinitas.

As integrais definidas de Cauchy e de Riemann

A fim de facilitar a leitura, o desenvolvimento da teoria de integrais definidas de Cauchy é descrito aqui com uma linguagem matemática atualizada. A retomada da ideia de integral como soma de áreas contém a essência da quadratura, e podemos observar

isso na argumentação da existência de uma quantidade h que, multiplicada com a medida do intervalo em que a função é definida, representa a área do retângulo cuja área é a mesma da figura determinada pela função nesse intervalo. Cauchy (1823, p.122 et seq.) procede: suponha uma função $y = f(x)$ contínua entre x e X e uma partição x_0, x_1, \dots, x_{n-1} entre estes valores. Teremos os intervalos:

$$x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}.$$

Agora consideremos os produtos

$$f(x_0)(x_1 - x_0), f(x_1)(x_2 - x_1), \dots, f(x_{n-1})(X - x_{n-1})$$

e sua soma

$$S = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{n-1})(X - x_{n-1}) \quad (2)$$

Cauchy diz que quando n torna-se cada vez maior, o modo de divisão não influenciará no valor de S . Em linguagem atual, isso equivale a dizer que quando $n \rightarrow \infty$ a escolha da partição não fará diferença. Ele argumenta que a soma (2) é igual à soma dos intervalos $(x_n - x_{n-1})$ multiplicados por um valor entre o mínimo e o máximo que $f(x)$ assume no intervalo considerado, o qual ele chama de uma média. Como cada um destes coeficientes é igual a um valor:

$$f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

em que $0 \leq \theta \leq 1$, pode-se substituir a equação (2), pela seguinte:

$$S = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

Usando o mesmo raciocínio e considerando a partição do início, temos:

$$S = (x_1 - x_0)f[x_0 - \theta_0(x_1 - x_0)] + \dots + (X - x_{n-1})f[x_{n-1} - \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]$$

Agora observando que:

$$f[x_i + \theta_i(X_{n+i} - x_i)] = f(x_i) \pm \varepsilon_i,$$

teremos

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \dots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1}).$$

Se $n \rightarrow \infty$ cada um dos valores $\pm \varepsilon_n$ diferirá muito pouco de 0, e o mesmo ocorrerá com a soma

$$\pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \dots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1}),$$

que é equivalente ao produto de $(X - x_0)$ com uma média entre estas diversas quantidades.

Com o crescimento do valor de n , o valor de S se aproximará de um limite que será chamado de integral definida. Se designarmos por $\Delta x = h = dx$ um crescimento finito atribuído à variável x , os diferentes termos que compõem S serão comprimidos na fórmula geral:

$$hf(x) = f(x)dx \quad (3)$$

da qual se deduzirá um após o outro. Cauchy enuncia a quantidade S como uma soma de produtos semelhantes à expressão (3):

$$S = \sum hf(x) = \sum f(x)dx\Delta x. \quad (4)$$

Ele afirma ser conveniente representar a integral definida para a qual converge a quantidade S , enquanto os elementos da diferença $X - x_0$, tornam-se infinitamente pequenos, pela notação $\int hf(x)$ ou $\int f(x)dx$, em que a letra \int substituindo a letra \sum indica não mais uma soma de produtos, mas o limite de uma soma desta espécie. Como o valor da integral definida depende dos valores extremos x_0 e X atribuídos à variável x , é conveniente também indicá-los. Ele sugere três notações:

$$\int_{x_0}^X f(x)dx, \quad \int f(x)dx \left[\begin{matrix} x_0 \\ X \end{matrix} \right], \quad \int f(x)dx \left[\begin{matrix} x = x_0 \\ x = X \end{matrix} \right].$$

No caso particular em que a função $f(x) = a$ é constante, tem-se:

$$S = \int_{x_0}^X a dx = a(X - x_0).$$

Se $a = 1$, tem-se:

$$\int_{x_0}^X adx = (X - x_0).$$

Esta definição de Cauchy servia apenas para funções contínuas, apesar de ser facilmente estendida para funções com um número finito de descontinuidades. Em 1829 Dirichlet demonstrou isso e ainda discutiu a possibilidade de estender sua prova para funções ilimitadas em um intervalo limitado, mas não pensava ser possível uma definição de integrabilidade para funções com infinitos pontos de descontinuidade.

Ele argumentou (Dirichlet, 1829, p.157 et seq.) que se há infinitos destes pontos, a integral só faria sentido se para quaisquer valores a e b com $-\pi < a < b < \pi$ (pois o objeto eram as séries de Fourier) fosse possível encontrar valores r e s com $a < r < s < b$ tais que a função fosse contínua entre r e s . Na sequência dá o famoso exemplo de

função que leva seu nome: que assume um valor c quando x é racional e um outro valor d quando x é irracional.

Em 1854 Riemann desenvolveu uma definição mais geral de integral que abarca funções com infinitos pontos de descontinuidade (Riemann, 1898, p.239 et seq.). Ele começa simplificando a notação da soma S denotando os intervalos $x_i - x_{i-1}$ por δ_i . Assim:

$$S = \delta_1 f(x_0 + \varepsilon_1 \delta_1) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n).$$

Ele observa que o valor acima depende da seleção dos intervalos δ_i e dos números ε_i , e sem essa propriedade a integral não pode ser definida. Ainda argumenta que se a função f tornar-se infinitamente grande, não importa quão pequeno seja o valor de δ , S tenderá para um valor arbitrário e não terá um valor limite, assim a integral para essa função não teria significado.

Ele criou uma nova condição de existência para a integral como segue. Suponha que S convirja e cada δ_i torne-se infinitamente pequeno. Denotamos por D_i a maior flutuação da função entre $x_{i-1} - x_i$, ou seja, a maior diferença entre o maior e o menor valor neste intervalo. Dessa forma:

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$$

deve tornar-se infinitamente pequeno junto com cada δ_i .

Esta é uma condição indireta para integrabilidade. Na sequência dá o exemplo particular de função que, de acordo com ele, não havia sido considerada até então: sejam os inteiros n e p , sendo este último ímpar, considere a série:

$$f(x) = \frac{x}{1} + \frac{2x}{4} + \frac{3x}{9} \cdots = \sum_1^{\infty} \frac{nx}{n^2}$$

Ele mostra que para os valores $a = \frac{p}{2n}$, em que p e n são primos entre si, os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(x) - \frac{1}{2n^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots \right) = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2},$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(x) + \frac{1}{2n^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots \right) = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2}$$

são diferentes entre si e portanto mostram que essa função não é contínua nos pontos a . Como esses pontos, que reduzidos à sua expressão mais simples possuem um denominador par, são infinitos em qualquer intervalo, segue que a função é descontínua

um número infinito de vezes em qualquer intervalo, mas, suas variações bruscas superiores a uma dada grandeza são sempre finitas. Dessa forma a função é suscetível de integração. Esse tipo de exemplo, levantou questões sobre a natureza dos domínios das funções e em que condições destes é possível definir claramente a integrabilidade delas. Uma delas é sob quais condições estes domínios podem ser medidos. Camille Jordan deu uma definição de integral definida em que esta era vista como um conjunto cujo conteúdo (algo que pudesse ser medido) era encontrado através do que chamou de conteúdo interior e exterior. E assim, o aprimoramento desta ideia levou à teoria da medida de Lebesgue e consequentemente sua definição de integral como um tipo de medida. Com essa nova integral, algumas funções impossíveis de integrar passaram a ser integráveis, como a do exemplo dado por Dirichlet.

Considerações finais

Abordamos aqui alguns momentos do processo de formação da teoria de integração, desde as buscas por áreas de figuras curvas feitas pelos gregos, até o cálculo de integrais de funções com infinitos pontos de descontinuidade. O processo de desenvolvimento deste conhecimento, bem como as dúvidas concernentes a ele, sugere uma sequência didática natural em que problemas de área surgem a medida que a linguagem para descrevê-los é incrementada.

A docência em matemática envolve sensibilidade por parte do professor com relação às metodologias e abordagens que mais se adequarão ao conjunto de estudantes e ao ambiente em que se encontram. Essa sensibilidade se forma com as diferentes experiências que cada professor vivencia diariamente juntamente com o conhecimento matemático que adquire continuamente. O conhecimento histórico da matemática não raro revela relações com as diferentes metodologias e ainda sugere novas ideias para aulas. Nosso principal objetivo foi trazer elementos do desenvolvimento do conhecimento buscando que isso faça parte do pensamento a ser criado no processo de aprendizagem.

Referências

CAJORI, F. **Uma História da Matemática**. Tradução de Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro. Editora Moderna Ltda. 2007.

CAUCHY, A. L. **Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Ire partie.** Analyse algébrique, Paris 1821.

CAUCHY, A. L. **Résumé des leçons données a l'école royale polytechnique sur le calcul infinitesimal.** Tome premier, Paris 1823.

DIRICHLET, J. P. G. L. **Sur la convergence des series trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.** Journal de Crelle 4, 1829.

EUCLIDES. **Os elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo. Editora UNESP, 2009.

GUICCIARDINI, N. **Newton's Method and Leibniz's Calculus.** In: JAHNKE, H. N. (org.) **A History of Analysis.** Providence: American Mathematical Society, 2003. p. 73-104.

KRAGH, H. **An introduction to the historiography of science.** Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

RIEMANN, B. Deuxième partie. Mémoires publiés après la mort de Riemann. Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique. In: RIEMANN, B. **Œuvres Mathématiques de Riemann, traduites par L. Laugel, avec un préface de M. Hermite et un discours de M. Félix Klein.** Paris: Gauthier-Villars et fils, Imprimeurs-Libraires du Bureau des Longitudes, de L'École Polytechnique, 1898.

ROQUE, T. **História da Matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T. SCHUBRING, G. **Curso de Análise de Cauchy:** uma edição comentada. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

THIELE, R. Antiquity. In: JAHNKE, H. N. (org.) **A History of Analysis.** Providence: American Mathematical Society, 2003. p. 2-39.