SOBRE O CÁLCULO INFINITESIMAL: ALGUNS ASPECTOS DO SÉCULO XVIII

ABOUT THE INFINITESIMAL CALCULUS: SOME ASPECTS OF THE EIGHTEENTH CENTURY

Alailson Silva de Lira[1]

Universidade Federal do Pará

João Cláudio Brandemberg[2]

Universidade Federal do Pará

Resumo

Este trabalho versa sobre um estudo inicial e preliminar de alguns conceitos do cálculo infinitesimal presentes na obra de de Introductio in Analysis Infinitorum de Leonhard Euler e breve discussão sobre a obra de *Ouvres* De Lagrange. Para isso, buscamos discorrer sobre o desenvolvimento do cálculo infinitesimal e suas influências. Além de destacar os olhares destes matemáticos sob um determinado fato surgindo opiniões convergentes para um mesmo sentido ou seguem sentidos opostos, isto é, um único objeto histórico pode possuir pontos de vista diferentes seja por consequências sociais, políticas ou religiosas. Logo, percebe-se que sua história está dividida em três momentos. O primeiro, de natureza geométrica, em que problemas e métodos de investigação geométricas eram predominantes; o segundo diz respeito a um estágio analítico ou algébrico, que começou por volta de 1740 com os trabalhos de Euler (um trabalho mais analítico) e atingiu sua forma final com Lagrange (um trabalho mais algébrico), no final do século XVIII; e o terceiro refere-se ao período da análise clássica, proposta inicialmente por Cauchy (1789-1857) no início do século XIX. Além disso, observa-se no trabalho deste último e de acordo com os autores, como uma importante ruptura com a tradição então estabelecida, prevalecendo no trabalho do século XVIII e posteriormente apresentada detalhadamente nos livros didáticos de Euler (meio do século) e Lagrange (final do século). Podemos perceber inicialmente que as ideias de Lagrange eram muito próximas das de Euler no que diz respeito à concepção algébrica da análise pois, o matemático acreditava que seria possível estabelecer uma fundamentação rigorosa para o cálculo infinitesimal se este fosse reduzido à álgebra.

Palavras-chave: Cálculo Infinitesimal; História da Matemática; Matemática no século XVIII.

Abstract

This paper deals with an initial and preliminary study of some concepts of infinitesimal calculus present in Leonhard Euler 's Introductio in Analysis Infinitorum and brief discussion on the work of Lagrange' s Ouvres. For this, we seek to discuss the development of infinitesimal calculus and its influences. In addition to highlighting the views of these mathematicians under a given fact arising opinions converging towards

[1] Endereço eletrônico: alailson@outlook.com
[2] Endereço eletrônico: brand@ufpa.br

the same direction or following opposite directions, that is, a single historical object may have different points of view be it by social, political or religious consequences. Therefore, it is clear that its history is divided into three moments. The first, of a geometric nature, in which problems and methods of geometric investigation were predominant; the second concerns an analytical or algebraic stage, which began around 1740 with the work of Euler (a more analytical work) and reached its final form with Lagrange (a more algebraic work) in the late eighteenth century; and the third refers to the period of classical analysis, first proposed by Cauchy (1789-1857) in the early nineteenth century. In addition, it is observed in the latter's work and according to the authors, as an important break with the established tradition, prevailing in the work of the eighteenth century and later presented in detail in the textbooks of Euler (middle of the century) and Lagrange (end of the century). We can see at first that Lagrange's ideas were very close to Euler's ideas about the algebraic conception of analysis because the mathematician believed that it would be possible to establish a rigorous grounding for infinitesimal calculus if it were reduced to algebra.

Keywords: Infinitesimal Calculus; History of Mathematics; Mathematics in the eighteenth century.

Introdução

Os estudos do cálculo infinitesimal se estabeleceram a partir de Arquimedes em o método do equilíbrio.[3]Consequentemente, seus resultados e procedimentos usados passaram a servir de modelos, pois notam-se influências detectadas nos trabalhos de Johannes Kepler (1571-1630), Galileu Galilei (1564 -1642), Evangelista Torricelli (1608-1647) e Cavalieri (1598-1647).

Durante o percurso da revolução Científica, vários matemáticos contribuíram para a elaboração de diversos métodos infinitesimais percorrendo desde aspectos gerais quanto específicos. De acordo com Wussing (1998), as abordagens destes problemas seguiram procedimentos tradicionais geométricos e métodos aritméticos algébricos. Ainda de acordo com o autor

> Em primeiro lugar, aparecem problemas mecânicos-físicos, relacionados com a queda livre e o movimento dos planetas e todos aqueles que exigem o estudo dos processos de movimento, em particular movimentos acelerados. [...]outro tipo de problemas são aqueles de natureza geométrico-mecânica, como aqueles relacionados ao cálculo de áreas e volumes e à determinação de centros de gravidade de superfície e sólidos. O último grupo consistiu em problemas [...] mais estritamente geométricos: o estudo de curvas, superfícies e sólidos, compreendido como um problema abstrato, matemático (e não

[3] Para determinar uma área ou um volume, corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroide conhecidos (EVES, 2011, p. 422)

> físico-mecânico). Neste grupo de problemas, o problema da tangente, ou seja, encontra a tangente a qualquer curva em qualquer um dos seus pontos, O problema das tangentes e o cálculo das áreas provaram ser os principais problemas para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral (WUSSING,1998, p. 138, Tradução Nossa).

Com a existência de diversos trabalhos voltados aos métodos infinitesimais, como por exemplo, os geométricos de Kepler (1571-1630) e Cavalieri (1598 -1647), algébricos de Viète (1540-1603), Descartes (1596-1650) e Fermat (1607-1665), Método da Exaustão, teoria do indivisível, aritmetização, das tangentes, propiciaram condições para sua consolidação depois do ano de 1660 através do trabalho de Newton (1642-1727) com o Cálculo de fluxo e de Leibniz (1646-1716) sobre a matemática infinitesimal.

Muito embora, perceba-se até aqui que a matemática infinitesimal se configurou provisoriamente em termos de forma e conteúdo, houve também questões conflituosas no que diz respeito a magnitude dos infinitesimais e consequentemente a ideia de continuidade.

De acordo com Carvalho e D´ottaviano (2006), as concepções de Newton e Leibniz se diferenciaram para essas entidades. Para Leibniz, os infinitésimos estão associados com a lógica e a metafísica, enquanto para Newton apresentava conexões com a física e os fenômenos naturais. No que diz respeito à ideia de continuidade Roque (2012) afirma que Newton deduzia a continuidade das propriedades físicas, em última instância, da continuidade do decorrer do tempo. Por outro lado, Leibniz exprimia a lei de continuidade em termos metafísicos e matemáticos.

As críticas a essas entidades. De acordo com Wussing (1998):

> [...] a época da iluminação na Europa foi acompanhada pela ação de filósofos obscurantistas e reações políticas. A matemática também foi o foco de disputas ideológicas contínuas, motivadas em grande parte pelas contradições conceituais existentes referentes ao tratamento dos infinitesimais; destes eles queriam apoiar e reforçar posições filosóficas idealistas. Sabe-se que **Marx** realizou estudos matemáticos com algum detalhe, lidando particularmente com problemas históricos. A partir desse momento, ele sempre falou de um período místico em relação às questões fundamentais da matemática infinitesimal e também à controvérsia suscitada entre os proponentes da referida matemática e os defensores do pensamento tradicional. (WUSSING ,2008, p. 174-175, tradução nossa, grifo nosso)

Bem mais a frente Russel (2007) também faz críticas a esse respeito quando discorre sobre limites de uma função:

> [...] Especialmente através do chamado cálculo infinitesimal, pontos de vista errôneos sobre os assuntos de que estamos a tratar se terem tornado tão firmemente arraigados na mente dos filósofos profissionais que se torna necessário um esforço prolongado e considerável para a sua remoção. Pensou-se, desde o tempo de Leibniz, que o cálculo diferencial e integral exigisse quantidades infinitesimais (RUSSEL, 2007, p. 112)

Até o XVIII o cálculo infinitesimal possuía como base um conjunto de métodos analíticos com o objetivo de resolver problemas de geometria e física, assim,

> As dependências funcionais resultavam usualmente de considerações de natureza geométrica, quando um determinado lugar geométrico era representado por uma fórmula, ou de considerações de natureza cinemática, quando objetos geométricos como uma linha, uma superfície ou um sólido eram concebidos como gerados, respectivamente, pelo movimento de um ponto, de uma linha ou de uma superfície Com o tempo, à medida que os problemas enfrentados se tornavam mais complicados, a origem geométrica das fórmulas foi-se esbatendo, e os matemáticos foram concentrando a sua atenção na refinação das técnicas que permitiam a manipulação cada vez mais intrincada dessas fórmulas (CORREIA, 1999, p. 9)

No ano de 1748, o matemático Leonhard Euler (1707-1783) em seu livro *Introductio In analysis infinitorum* apresenta a ideia essencial de que toda a análise se ocupava de quantidades variáveis. Além disso, também é mostrada uma das primeiras definições sobre o conceito de função.

Ainda de acordo com Correia (1999), os matemáticos da época consideravam a função como uma fórmula consequentemente trabalhavam com expressões de forma geral. Assim, as regras do procedimento do cálculo infinitesimal eram consideradas na generalidade.

Ao final do século XVIII, influenciado pelo desenvolvimento do conceito de função e observado Euler como grande influenciador no trabalho com séries infinitas, deram a Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) estabelece uma fundamentação rigorosa para o cálculo infinitesimal, se este fosse reduzido à álgebra. De acordo com Fraser (1987)

> O plano de Lagrange é fazer com que o cálculo faça parte da análise algébrica, tornando-se uma teoria das funções analíticas. Ele espera assim livrar o cálculo das noções geométricas intuitivas e evitar procedimentos envolvendo o uso logicamente questionável de entidades infinitesimais. Sua concepção de álgebra é mais geral do que a visão que ocasionalmente encontra no século 18 da álgebra como "aritmética universal". (FRASER,1987, p. 39, tradução nossa)

DOI: 10.30938/bocehm.v5i14.257

De acordo com Fraser (1988) e Roque (2012), podemos dividir a história do cálculo infinitesimal em três momentos o primeiro, de natureza geométrica, em que problemas e métodos de investigação geométrica eram predominantes; um estágio analítico, ou algébrico, que começou por volta de 1740 com os trabalhos de Euler (um trabalho mais analítico) e atingiu sua forma final com Lagrange (um trabalho mais algébrico), no final do século XVIII; e o período da análise clássica, proposta inicialmente por Cauchy (1789-1857) no início do século XIX. Além disso, observa-se no trabalho deste último e de acordo com os autores, como uma importante ruptura com a tradição então estabelecida, prevalecendo no trabalho do século XVIII e posteriormente apresentada detalhadamente nos livros didáticos de Euler (meio do século) e Lagrange (final do século).

De acordo com Fraser (1988),

> Deve notar-se que EULER e LAGRANGE diferiram em suas ideias específicas sobre a base do cálculo. EULER manteve como fundamental o diferencial, enquanto o LAGRANGE tentou usar o teorema de TAYLOR e as funções derivadas para eliminar a análise de infinitesimais. (FRASER, 1988, p. 319, tradução nossa)

Por meio destas rápidas considerações, observa-se que o desenvolvimento do cálculo infinitesimal perdurou vários séculos com participações de diversos matemáticos. Entretanto, destacaremos alguns pontos sobre Lagrange na obra Ouvres e Leonhar Euler com *Introductio in Analysis Infinitorum*

Assim, cada autor/pesquisador olha determinado fato sob sua ótica surgindo opiniões que convergem para um mesmo sentido ou seguem sentidos opostos, isto é, um único fato ou objeto histórico, pode possuir pontos de vista diferentes. A seguir, explanaremos de forma preliminar os conteúdos do trabalho dos autores supracitados.

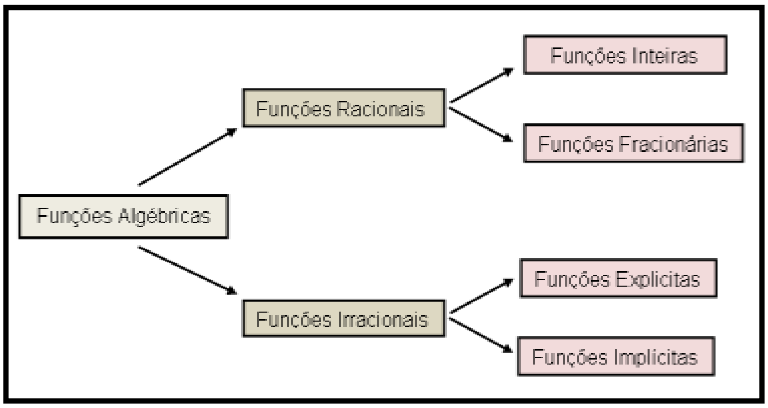
Introductio in analysis infinitorum – Leonhard Euler

Escrito em dois volumes, o volume I trata de processos infinitos da análise, expansão de uma função numa série infinita; também apresenta a diferença entre função contínua e descontínua, embora esta última distinção, assim como a definição de função só tomaram a forma que conhecemos hoje a partir do século XIX.

No início de volume I, Euler apresentou sua definição de função "Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de uma maneira qualquer dessa quantidade variável e de quantidades constantes" (Lira, 2013, p. 39). A palavra "expressão analítica" utilizada por Euler se refere ao modo de se expressar analiticamente uma função conforme classificação dessas funções estabelecidas por Euler.

Entretanto, segundo Dunhan (1999) esta concepção que Euler possuía não era uma concepção moderna, pois quando se diz que uma função é uma expressão analítica, ela parece igual a "função" com "fórmula". Mais tarde Euler ampliou a ideia, até que se aproximou da formulação moderna, porém a definição de maneira analítica foi um grande passo sobre a irrefletida noção, geométrica da "curva". Neste mesmo livro ele destacou algumas funções importantes, definiu os polinômios, as funções trigonométricas e as exponenciais. Assim, Euler classifica as funções de acordo com o esquema a baixo:

Esquema 01: Classificação de Função segundo Euler



Fonte: Elaborado pelos autores

Mais a frente em 1755 no seu *Institutiones calculi differentialis* Euler apresenta o conceito de função de forma universal e abstrata, publicada em 1755

> Se algumas quantidades dependem de tal forma de outras quantidades que, se as últimas variam as primeiras também o fazem, então as primeiras quantidades são chamas funções das últimas. Esta denominação é da mais ampla natureza e compreende cada método por meio do qual uma quantidade pode ser determinada por outras. Se, por conseguinte, x representa uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de x de um modo qualquer ou são por ele determinadas, são chamadas funções dele. (La Penha, apud LIRA 2013, p. 50)

As funções algébricas tinham por característica poder ser definida como equações algébricas e estas eram divididas em funções racionais e irracionais que também se dividiam em inteiras e fracionarias respectivamente. Além disso, as funções transcendentes eram entendidas como não algébricas. Segundo Correia (1999), Euler dividiu as "funções irracionais" em duas classes: as "funções explícitas", quando eram expressas com radicais, e as "funções implícitas", quando resultavam da solução de equações algébricas.

Ainda segundo Correia (1999), Euler observou que o valor explícito de uma função definida de forma implícita podia não ser exprimível mesmo com radicais, pois a álgebra ainda não havia se desenvolvido a um determinado grau de perfeição. Desta forma verificamos que a função poderia ser expressa analiticamente de várias formas, ainda sim, segundo Lira (2013), era impossível enumerar todos os métodos utilizados para expressar as funções analiticamente e, deste modo, Euler reduz a uma forma mais conveniente de uma expressão analítica, como sendo a forma de uma série de potência do tipo A + B.z + C.z^2 + D.z^3 +..., porém, foi incapaz de demonstrá-la. Apesar disso, esta representação era considerada como fora de dúvida tanto para Euler quanto para os demais matemáticos do século XVIII, incluindo a Lagrange que, em 1797, pública um artigo denominado *theorie des functions analytiques* tomando por base essa discussão. Em seu segundo volume da *Introductio*, Euler reconhece que existem outros tipos de funções, ou seja:

> Assim como algumas linhas curvas correspondem a qualquer função de *x*, também linhas curvas são representadas pr funções de *x*. ... de uma tal ideia acerca de linhas curvas decorre de imediato sua divisão em continuas e descontinuas ou mistas. (Euler, apud Lira, 2013, p. 56)

Uma outra forma de representação de Euler, que é utilizada em textos e livros de cálculo para o ensino superior é apresentado por Brandemberg e Mendes (2007) assim, seja uma função racional $\frac{1+z^2}{z-z^3}$; onde os fatores do denominador são z, $1-z$ e $1+z$. Esta função pode ser decomposta em três simples frações: $\frac{A}{z}+\frac{B}{1-z}+\frac{C}{1+z}=\frac{1+z^2}{z-z^3}$. De onde podemos determinar A, B, C a partir da soma

DOI: 10.30938/bocehm.v5i14.257

$A+Bz+Cz-Az^2+Bz^2-Cz^2=1+z^2=1+0z+z^2$. Assim, de $\begin{cases} A=1 \\ B+C=0 \\ -A+B-C=1 \end{cases}$, segue que $B-C=2$, e que $A=1$, $B=1$ e $C=-1$.

Deste modo, a função dada $\dfrac{1+z^2}{z-z^3}$ pode ser expressa como $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{1+z}$.

O segundo volume de ***Introductio*** é um tratado de geometria analítica plana do espaço na forma geral atual. Aparecem as coordenadas polares, as fórmulas de transformação de coordenadas e as propriedades gerais das curvas algébricas, em especial as de segundo, terceiro e quarto grau. As considerações infinitesimais se esguelham considerando como equação da curva seu desenvolvimento em série nas proximidades de um de seus pontos.

OEUVRES (Quarta Seção) – De Lagrange

As questões fundamentais relacionados aos problemas de análise no século XVIII, possuíam caráter puramente filosófico e pedagógico, por tanto de acordo com Correia (1999) os matemáticos da época não estavam interessados nestas questões.

O trabalho de Lagrange apresenta diversos assuntos particionados. Inicialmente parte da álgebra de Euler abordando a analise indeterminada, passando pelas lições numéricas e elementares de matemática (frações, séries, etc.) e por fim chegando algumas notas relacionadas à metafísica do cálculo infinitesimal. Convém observar que no trabalho de Lagrange foi o primeiro (1760) a versar sobre os fundamentos do cálculo infinitesimal

Assim como Euler define o conceito de função, Lagrange em Oeuvres, apresenta a ideia de assíntota de uma função.

> [...] a assíntota é uma linha reta que se aproxima de uma curva de modo que sua distância à curva possa se tornar menor do que qualquer magnitude dada, sem que seja sempre zero absoluto. Agora, esta condição torna falso o pressuposto de que a assíntota é uma tangente verdadeira; mas é então corrigido no cálculo, fazendo com que o ponto de contato desapareça, por assim dizer, de modo que a tangente deixa de ser tangente e se desvia do

> limite das tangentes, ou seja, o limite da própria curva, o que está de acordo com a natureza da assíntota. (LAGRANGE, 1776, p. 598, tradução nossa)

Além disso, observa-se neste trabalho, comentários a respeito do cálculo de Newton e sua rigorosidade bem indagações que percorriam ideias referentes aos trabalho de Leibniz.

> Pode-se imaginar, por exemplo, que uma curva é um polígono de infinitos lados pequenos, sendo que cada um deles sendo prolongado se torna uma tarefa na curva. Essa suposição é realmente falsa, pois o lado pouco prolongado nunca pode ser outra coisa senão um verdadeiro secante; mas o erro é destruído por outro erro, que é introduzido no cálculo negligenciando como quantidades nulas que, de acordo com a suposição, são infinitamente pequenas. Isto é o que, parece-me, é a metafísica do cálculo do infinitamente pequeno, como disse M. Leibnitz (LAGRANGE, 1776, p. 599, tradução nossa)

Lagrange adotou como ponto de partida a ideia de Euler relacionada a função. Para eles, esta poderia ser entendida como uma expressão analítica e expandida em uma serie de potências. Assim, observa-se nos estudos das literaturas em que foram analisadas que as ideias de Lagrange eram muito próximas das de Euler no que diz respeito à concepção algébrica da análise, pois de acordo com Correia (1999), o matemático acreditava que seria possível estabelecer uma fundamentação rigorosa para o cálculo infinitesimal se este fosse reduzido à álgebra.

Considerações finais

Observa-se preliminarmente que cada autor possuía seu modo de explicar e exemplificar suas ideias matemáticas, seja de forma didática ou crítica observado os pressupostos teórico-metodológico que nortearam a escrita do cada autor. Considerando o período em que as obras foram publicadas, deve-se verificar as possíveis influências que sofreram a partir das correntes filosóficas predominantes e do cenário sociocultural no qual foram publicadas, tendo em vista as aproximações e distanciamentos. Tais fatos serão abordados e apurados em nossas próximas pesquisas.

Durante o decorrer do texto ambos os autores se distanciam e aproxima-se quanto a ideias referentes à base do cálculo.

Referências

BRANDEMBERG, João Cláudio; MENDES, Iran Abreu. **Revisitando a obra de Euler e localizando sua dimensão docente.** V Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, 2007.

CARVALHO, Tadeu Fernandes de; D´OTTAVIANO, Itala M.L. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. **Revista Puc**. São Paulo, v.8, n.1, p.13-43, 2006.

CORREIA, José Manuel Teixeira**. A evolução do conceito de função na segunda metade do século XVIII**. 1999. 89f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática). Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 1999.

DUNHAM, William. **EULER: the master of us all**. Dollciani mathematical expositons No 22.Washington: The mathematical Association of America. 1999.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. Campinas, SP: Unicamp, 2011.

FRASER, Craig, G. **Joseph Louis Lagrange´s algebraic vision of the calculus**. História Mathematica. Canadá: Toronto, v.14, p.38-53, 1987.

FRASER, Craig, G. **The Calculus as algebraic analysis:** some observation on Mathematical analysis in the 18^{th} century. Institute for the History and Philosophy of Science and Technology. University of Toronto. 1988.

LAGRANGE. **Oeuvres**. París, 1776.

LIRA, Alailson Silva de. **A evolução do conceito de função segundo Guilherme de La penha.** Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade do Estado do Pará. 2013.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática:** Uma visão Crítica, desfazendo mitos e lendas. São Paulo: ZAHAR, 2012.

RUSSEL, Bertrand. **Introdução à Filosofia Matemática**. São Paulo: ZAHAR, 2007.

WUSSING, H. **Lecciones de Historia de las Matemáticas**. Espanha: Siglo XXI.