DOS LOGARITMOS DE NAPIER À MAIS BELA DE TODAS AS FÓRMULAS

FROM THE NAPIER'S LOGARITHMS TO THE MOST BEAUTIFUL OF ALL FORMULAS

Ademir Brandão Costa[1]

Secretaria de Estado de Educação - SEDUC/PA

Ritianne de Fátima Silva de Oliveira[2]

Secretaria Municipal de Educação - SEMEC/Canaã dos Carajás

Thiago Beirigo Lopes[3]

Instituto Federal de Mato Grosso - IFMT

Resumo

Este artigo mostra as ideias dos logaritmos desde a sua criação, levando em consideração as necessidades da época, e todo o cenário socioeconômico e cultural do período áureo da renascença, até a estrutura logarítmica atual. Assim, esse artigo tem o objetivo de mostrar o desenvolvimento histórico dos logaritmos até ser apresentada a mais bela de todas as fórmulas, que encanta por sua simplicidade e seu desenvolvimento histórico. Para isso, na pesquisa de revisão bibliográfica realizada, foi considerado John Napier como o criador dos logaritmos, pois ele foi o primeiro a divulgá-lo. Mostra ainda que os logaritmos propiciaram diversas ramificações de estudos, tais como, o número e, o logaritmo natural $\ln x$ e os logaritmos complexos $\ln z$. Sendo realizado uma explanação sobre as discussões teóricas entre Bernoulli e Leibniz sobre o tratamento de logaritmos de números negativos e a contribuição de Euler, que conseguiu um veredicto espantoso onde não houve uma definição entre o certo o errado na discussão.

Palavras-chave: Matemática; História; Logaritmos; Renascimento Cultural.

Abstract

This article shows the ideas of the logarithms since its creation, taking into account the needs of the time, and the entire socioeconomic and cultural scenario of the golden age of the renaissance, to the current logarithmic structure. Thus, this article aims to show the historical development of the logarithms until it is presented the most beautiful of all formulas, which enchants by its simplicity and its historical development. For this, in the study realized, was considered John Napier like the creator of the logarithms, therefore he was the first to divulge it. By showing that the logarithms provided several ramifications of studies, such as the number e, the natural logarithm $\ln x$, and the complex logarithms $\ln z$. An explanation was made of the theoretical discussions between Bernoulli and Leibniz on the treatment of logarithms of negative numbers and the contribution of Euler, who obtained an astonishing verdict where there was no definition between right and wrong in the discussion.

Keywords: Mathematics, History, Logarithms, Cultural Revival.

[1] Endereço eletrônico: ademirbrandao@gmail.com.
[2] Endereço eletrônico: ritianne19@hotmail.com.
[3] Endereço eletrônico: thiagobeirigolopes@yahoo.com.br.

Introdução

O homem sempre teve a necessidade de fazer contas (calcular), porém no início de sua jornada como Homo Sapiens, não havia muita dificuldade, pois os cálculos eram mínimos, no muito efetuavam algumas somas ou subtração. Com o passar do tempo, o homem foi evoluindo sua capacidade intelectual, expandindo suas necessidades sociais e tornando-se dependente da mais-valia. Daí em diante, os cálculos tornaram-se bastante complexos, pois o homem resolveu ir mais longe, além dos horizontes, através das navegações, auxiliado pela astronomia, com seus miraculosos cálculos, também com o surgimento do mercado financeiro, onde o volume de transações entre as nações fez desenvolver a globalização comercial (SILVA, 2008).

Em meio a esses grandes cálculos, que agora não eram mais de um nível somatório e sim multiplicativo, eis que surge um facilitador dos problemas que geravam complicações para astrônomos, banqueiros e comerciantes em geral, os logaritmos. Esse novo instrumento de cálculos facilitava reduzindo multiplicações e divisões em somas e subtrações respectivamente. Assim, tratou-se os logaritmos, analisando: O quê? Como? E por quê? John Napier resolveu inventar esse método e também com essa mesma visão, estudar como se deu a reformulação e adaptação de suas propriedades do modo como se conhece.

Portanto, a partir desse estudo de levantamento bibliográfico foram examinadas a história, as propriedades e algumas aplicações dos logaritmos, que na época foi considerado um dos maiores inventos da matemática. Assim, o objetivo é mostrar o desenvolvimento histórico dos logaritmos até ser apresentada a mais bela de todas as fórmulas, que encanta por sua simplicidade e seu desenvolvimento histórico. Para tanto, foi demonstrado o quanto os logaritmos foram e são importantes para a simplificação dos cálculos matemáticos, tão como apresentar conforme aconteceu a reformulação e adaptação de suas propriedades como se concebe atualmente.

Finaliza-se esse artigo apresentando a exponencial complexa e as discussões que se envolveram Jean Bernoulli (1667-1748) e Leibniz (1646-1717) sobre o sentido de logaritmo de quantidades negativas. Mostrando alguns cálculos e argumentos desses dois grandes matemáticos. Que, com o reforço de Leonhard Euler (1707-1783), chega-se a uma definição surpreendente onde não houve um certo ou um errado entre Jean Bernoulli e Leibniz. E, por fim, é apresentada a mais bela de todas as fórmulas, que encanta por sua simplicidade e seu contexto histórico.

A efervescência renascentista dos séculos XVI e XVII, como fator principal para o desenvolvimento das ciências: essencialmente a matemática.

No início do século XVI aconteceram profundas modificações políticas e econômicas na Europa, que, impulsionada pelo capitalismo e futuramente pela Revolução Industrial, induzira o nascimento de uma burguesia poderosa. Desse modo, devido ao grande poder aquisitivo dessa burguesia e à expansão do comercio nas grandes cidades europeias, surge condições financeiras para o desenvolvimento da cultura desses povos. Nessa mesma época, a comunidade europeia, em especial a Itália, buscou as origens culturais gregas (os textos clássicos) em todas as áreas do conhecimento humano, para resgatar a cultura que tinha se perdido na Idade Média e os "valores que interessava ao novo mundo urbano-comercial" (VICENTINO, 2000, p. 185). Esse foi o grande início da explosão cultural, econômico, político e social da Europa, chamado de Renascimento Cultural. Século de grandes descobertas, invenções e estudos, tempo em que os homens aprofundaram os seus conhecimentos investigando mais a superfície da terra e os mares. Estudaram melhor o céu e os astros, exploraram como jamais tinham feito o corpo humano, desenvolvendo o funcionamento de seu interior e até chegando aos espaços da mente e do pensamento.

Segundo Vicentino (2000), o Renascimento Cultural do século XVI revelou ao mundo grandes personagens e obras até hoje lembradas, como:

- Shakespeare na literatura Inglesa, com a fama de maior dramaturgo de todos os tempos, publicava Sonhos de uma Noite de Verão, Hamlet, O Mercador de Veneza, Otelo e Romeu e Julieta;
- Miguel de Cervantes também nas letras, na Espanha, escrevia um dos livros mais famosos da literatura mundial: Dom Quixote, no qual criticava a cultura medieval, na figura grotesca de seu personagem que investe contra moinhos de vento por imaginar estar lutando com gigantes;
- Martinho Lutero considerado o pai espiritual da Reforma Protestante, religioso alemão, defende suas ideias sobre a tendência dos católicos: serem donos do mundo

material e espiritual. Seus pensamentos produzirão uma crise religiosa de proporções comprometedoras para o futuro da Igreja;

- Michelangelo Buonarroti, pintor, escultor, poeta e arquiteto italiano: É famoso principalmente pela criação dos afrescos do teto da Capela Sistina e também a conceber a cúpula da Basílica de São Pedro em Roma;
- Nicolau Maquiavel, foi historiador, poeta, diplomata e músico, italiano. É reconhecido como fundador do pensamento e da Ciência Política moderna, pela simples manobra de escrever sobre o Estado e o governo como realmente são - a verità effettuale della cosa - e não como deveriam ser, sua obra mais famosa, O Príncipe.

Grandes nomes como os acima citados, influenciaram outros ícones do renascimento que futuramente aprofundariam os estudos até ai realizados e difundiriam pelo mundo inteiro, trazendo o desenvolvimento científico e almejando a modernização das ciências.

Personagens que, em diferentes ramos das ciências como: nas letras, na astronomia, na medicina, na alquimia, na física ou na matemática, contribuíram de certa forma para o enriquecimento do conhecimento daqueles que as praticavam, denominando esse período de efervescência cultural como o Renascimento Cientifico. Tudo porque, o homem passou a pensar mais nele próprio, sendo mais humanista, preocupando-se com problemas de ordem prática. Além disso, o homem renascentista passou a se guiar mais pela razão do que pela emoção “assim, opunha-se ao misticismo, coletivismo, antinaturalismo, teocentrismo e geocentrismo” (ARRUDA; PILETTI, 1998, p. 132), existentes na época, como fez Galileu Galilei (1564-1642) que incentivado pelas obras de Nicolau Corpénico (1473-1543), fundou a formulação da teoria heliocêntrica, sendo até perseguido pelo tribunal inquisitivo da Igreja Católica, sob a acusação de heresia.

Porém, toda essa revolução ideológica se deu pelo fato do investimento realizado pela classe burguesa da época. Burguesia oriunda das camadas marginalizadas da sociedade medieval, que se firmou como classe social através do prestigio que a riqueza lhe trouxe. A rica burguesia visava a sua autopromoção e através do mecenato, financiava vários artistas e intelectuais. Esse financiamento levou a sociedade burguesa ao domínio da natureza, ou seja, tudo que poderia ser comercializado a fim de gerar lucros. Mas, para que houvesse esse domínio, seria necessária a aplicação de uma matemática cientifica como ponto principal da razão pura estabelecida naquele momento.

> O elemento-chave para dominar a natureza era a Matemática, decorrência imediata da mentalidade calculadora expressa nos livros de contabilidade e no uso dos algarismos arábicos. Disto resultaram a convicção de que tudo se poderia explicar pela razão e pela ciência; e a recusa a acreditar em qualquer coisa que não tenha sido provada. (ARRUDA; PILETTI, 1998, p. 132)

No entanto, essa Matemática vinha de um período improdutivo, que ficou conhecido como estiagem matemática. Esse foi um triste e longo momento da história que transcendeu acerca de um milênio, entre o séc. VI e o séc. XVI e

> Somente na Álgebra (métodos para o manuseio de equações, fórmulas gerais para a solução das equações do segundo grau e rudimentos sobre potenciação e binômios), na Trigonometria (evolução do conceito de corda da linha trigonométrica), na simbologia da numeração (sistema indo-arábico) e nas Séries Infinitas (provas de Oresme da divergência da Série Harmônica) houve inovações em relação àquilo que já era sabido pelos gregos. (GARBI, 2006, p. 118)

Diante da necessidade dessa nova ordem social, o movimento cultural burguês, patrocinou e incentivou a realização de várias atividades no intuito de aprimorar e descobrir novos métodos matemáticos para facilitar o desenvolvimento de algumas ciências e até o próprio mercado financeiro em sua fase progressista.

A Matemática como elemento principal para o domínio da natureza.

No século XVI, matemáticos como Girolano Cardano (1501 - 1576), Nicolò Fontana, apelidado Tartaglia (1500 - 1557), Ludovico Ferrari (1522 - 1560), Rafael Bombelli (1530 - 1579), Fraçois Viète (1540 - 1603), Michael Stifel (1487 - 1567), dentre outros que não foram citados, mas tiveram trabalhos de suma importância para o desenvolvimento da matemática moderna. Esses cientistas matemáticos contribuíram muito com estudos relacionados a resoluções de equações de 3º e 4º graus, também incentivaram pesquisas essencialmente fundamental na área dos números complexos, na implantação de uma nova simbologia de sinais como o mais (+) e o menos (-) e as letras nas famosas equações algébricas.

Muitos outros trabalhos foram desenvolvidos em áreas da matemática nos quais os cálculos numéricos são importantes: a astronomia, a engenharia e até o comercio. Porém, três notáveis invenções ou descobertas merecem destaques. São elas: a notação indo-arábica, as frações decimais e os logaritmos. Considerando esse terceiro um grande dispositivo poupador de trabalho, pois não havia nada mais trabalhoso na prática da matemática, nem que mais prejudicasse e atrapalhasse os calculadores, do que as multiplicações, as divisões, as extrações do quadrado e do cubo de números muito grandes nessa época.

Na época em que os logaritmos foram publicados por Napier, no ano de 1614, toda comunidade cientifica ficou encantada pela rapidez e eficiência que agora eles poderiam desenvolver em seus trabalhos com essa nova ferramenta de cálculo, principalmente os astrônomos, que para traçarem rotas marítimas, tinham que fazerem uso da trigonometria, tornado os cálculos extraordinariamente enormes, complicados e passiveis ao erro (MAOR, 2008).

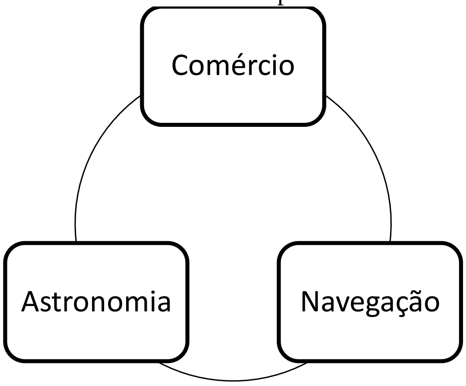
Mas, para que essa engenhosidade fosse aceita pelos cientistas da época, Jonh Napier, que dedicou cerca de 20 anos a esse trabalho, baseou-se em descobertas de Tycho Brahe, Nicole Oresme, Nicolas Chuquet, Michael Stifel e em uma ferramenta astronômica que ele conhecia muito bem, chamada de Prostaférese (palavra grega que significa “adição e subtração”), descobertas que influenciaram na formulação da teoria dos logaritmos que será visto mais adiante (COBIANCHI, 2016).

A matemática como passatempo para Napier, rendeu aos matemáticos várias contribuições para sua época, idealizou um dispositivo baseado em bastões que continham números capazes de multiplicar e dividir de forma automática. Também idealizou um calculador com cartões que permitia a realização de multiplicações e recebeu o nome de Estruturas de Napier. No início do século XVII, inventou um dispositivo chamado Ossos de Napier que são tabelas de multiplicação gravadas em bastão, o que evitava a memorização da tabuada, e que trouxe grande auxílio ao uso de logaritmos, em execução de operações aritméticas como multiplicações e divisões longas. Também, na arte da guerra, seus engenhos militares eram capazes de arremessar bolas de ferro a metros de distância, com uma precisão muito boa para a tecnologia da época (BOYER, 2012).

Como os logaritmos dominaram o homem e a natureza?

Com o surgimento dos logaritmos, descoberto por Napier, houve um enorme avanço na contabilização dos cálculos utilizados principalmente em três importantes áreas do desenvolvimento socioeconômico da época: O comercio, a astronomia e a navegação.

Figura 1 - Ciclo econômico do período da Renascença



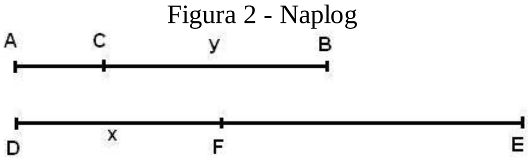
Fonte: Dos autores.

A burguesia fomentadora da ciência, financiava os estudos em astronomia, esta por sua vez, orientava a navegação na busca de novos mercados econômicos, gerando lucros que retornavam e enriqueciam cada vez os burgueses, tornando um ciclo que gerou o desenvolvimento cultural e econômico daquele período até os dias atuais. Neste contexto, os logaritmos contribuíram facilitando a compreensão e a exatidão dos cálculos usados nessas áreas acima citadas.

De acordo com Boyer (2012) e Pippa (2014), Napier não tinha conhecimento dos conceitos de base de um sistema de logaritmos sendo sua definição diferente da nossa. E que, ainda, Napier teve uma visão geométrica para a criação dos logaritmos, inicialmente restrito aos senos de ângulos (GERBASI, 1999).

Sendo assim, de acordo com Eves (2004), a ideia geométrica de Napier se dá do seguinte modo. Considere os segmentos de reta AB e DE e a suposição que os pontos C e F se ponham em movimento simultaneamente ao longo desses segmentos com a mesma velocidade inicial. Admitindo que C se mova com uma velocidade numericamente igual a distância CB, e que F se mova com velocidade uniforme. Então Napier definiu DF como logaritmo de CB. Isto é, iguala-se $DF = x$ e $CB = y$, então $x = \text{Naplog}\, y$ como mostra a Figura 2:

Figura 2 - Naplog



Fonte: Eves (2004).

A ideia numérica dos logaritmos, em apresentações encontradas em diversos autores, como Sampaio (2010), Lima *et al* (2004) e Maor (2008), mostra que Napier tinha conhecimento da teoria da soma de arcos, segundo a qual reduzia as multiplicações e as divisões à simples somas e subtrações. Sua forma trigonométrica: $2.\cos(A).\cos(B) = \cos(A+B) + \cos(A-B)$, foi comparativa para a introdução numérica. Comparando os termos de uma PA e uma PG tem-se:

Quadro 1 - Progressões Geométricas e Aritméticas

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1.024
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Fonte: Dos autores.

Segundo Sampaio (2010), Napier percebeu que as potências de base 2 crescem rapidamente, tornando restrito as multiplicações e as divisões, isto é, se somente se, os números utilizados forem divisíveis por 2. Portanto, esse número teria que ter expoente fracionário ou com base suficientemente pequena. Na época utilizava-se a trigonometria como base para os cálculos, mas como o círculo trigonométrico é fechado em 1 e -1, Napier observou que teria que ser usado números entre 0 e 1 do círculo, pois são positivos e suas potencias crescem lentamente, daí escolheu-se um número bastante próximo de 1 que é $1 - 10^{-7}$, ou seja, 0,9999999, pois as melhores tábuas de senos da época dispunham de sete casas decimais (CONTADOR, 2005). Esse número foi chamado por Napier de “proporção”, ou seja, a taxa comum para sua tabela, e também, pelo fato de se conhecer inteiramente as frações definidas por $\frac{p}{q}$.

Então, a obra de Napier estava finalizada e, preocupado com as frações decimais, chegou muito próximo de encontrar um número muito importante para a matemática e que depois seria reconhecido como base universal dos logaritmos. Este número é o e, que será abordado mais adiante.

Segundo Boyer (2012), a descoberta neperiana rapidamente correu o mundo e foi adotada por cientistas de toda a Europa e China. Chegando ao conhecimento do estudioso e professor de matemática Henry Briggs, que ao ir a Escócia ao encontro de Napier propôs modificações em seus logaritmos, para que esses se tornassem mais convenientes; com a aprovação de Napier, acordaram em transformar o logaritmo de 10^7, que antes era 0, em $\log 1 = 0$, e ter logaritmo de 10 igual a uma base conveniente de 10, e decidiram que $\log 10 = 1 = 10^0$, ou seja $N = 10^L$ então L é o logaritmo briggsiano de N, escrito na forma $\log N$, nascendo assim o conceito de base 10. Briggs colaborou com a computação de novas tabelas, que davam os logaritmos de base 10 para todos os inteiros.

Como Briggs, através de Napier, conhecia os logaritmos de 1 e 10, que são respectivamente 0 e 1, sendo necessário encontrar os logaritmos de 2 a 9. Então, Briggs teve a ideia de subdividir 10 para encontrar os logaritmos dos números (a) inteiros, pois se subdividisse 1, os números encontrados não estariam no intervalo $1 \leq a < 10$. Para fazer essa operação de subdivisão, Briggs, como Napier, baseou-se na teoria de Stifel, na qual ele afirmava que assim reduz certos números a potências de base 2^n, e como Briggs tinha introduzido a base 10, afirmando que poderia reduzir também alguns números na forma $x = 10^n$.

Com isso, Briggs observou que, quando usava expoentes de números inteiros, os números encontrados eram demasiados grandes e fora do intervalo $1 \leq a < 10$, porém, usando expoentes fracionários, os números permaneciam no intervalo acima citado. Como $\log N = característica + mantissa$, Briggs considerou a parte fracionária dos logaritmos da tabela acima de mantissas e a parte inteira de característica. Porém, ao observar que todo número multiplicado ou dividido 10 vezes, 100 vezes, 1000 vezes, e assim por diante, maior ou menor que outro, tem a mesma parte decimal deste outro número, e difere apenas pela característica.

Dessa forma, Briggs conseguiu encontrar os logaritmos de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, com uma precisão de quatorze casas decimais. Mais tarde esse espaço entre 20.000 e 90.000 foi preenchido por Adriaan Vlacq (1600 – 1667) (BOYER, 2012).

O número e prelúdio ao ln

Segundo Maor (2008), é incerta a autoria da descoberta do e, porém já relacionado à sua origem, pode-se afirmar que tem ligação com a matemática financeira, pois em:

> De fato, a maior parte da literatura matemática mais antiga que conhecemos lida com questões relativas a juros. Por exemplo, um tablete de argila da Mesopotâmia, datado de 1700 a.C. e agora encontrado no Louvre, propõe o seguinte problema: quanto tempo levará para uma soma em dinheiro dobrar se for investida a taxa de 20 por cento de juros compostos anualmente? (MAOR, 2008, p. 41)

Esse é um dos primeiros problemas envolvendo o número e, encontrado somente no século XVII, através de um matemático anônimo ou talvez um mercador, por percepção de alguns desses intelectuais desconhecidos verificou-se o vínculo entre o modo como o dinheiro se acumulava e o comportamento de uma certa expressão matemática no infinito (MAOR, 2008).

Nesse contexto, pode-se afirmar que financeiramente uma quantia empregada a juros compostos e por período de conversão na taxa, será igual ao número e. Para tanto, parte-se do inicial de juros compostos calculado por meios da fórmula $M = C(1+i)^t$. Tem-se então uma taxa percentual i fixa e um tempo t definidos, agora essa mesma taxa é dividida por um por uma constante n e inversamente multiplicada pelo tempo t. Em outras palavras, está se definindo a taxa e o tempo para períodos de capitalização cada vez menores quanto maior for o valor de n. Então:

$$S = C\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n.t}$$

Supondo que essa taxa percentual se eleva a 100%, o tempo $t = 1$ e o capital $c = 1$, utilizando uma ferramenta importante usada para encontrarmos o e, que são os conceitos de limites que no caso da expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ fica na forma:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Para provar tal definição faz-se uso do Binômio de Newton para o resultado esperado. Conforme o seguinte:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\ &= 1+1+\frac{n(n-1)}{n^2}.\frac{1}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}.\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{n!}{n^n}.\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

Sabe-se que a sequência é convergente, portanto calculando o limite de ambos os lados, tem-se:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{n(n-1)}{n^2}.\frac{1}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}.\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{n!}{n^n}.\frac{1}{n!}\right)\\ &= 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\ &= e\end{aligned}$$

Conclui-se então que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, como provado acima. Esse número há muito tempo conhecido, só recebeu um nome quando Leonard Euler estudou e provou sua existência. A análise feita anteriormente, referente ao e, foi somente para dar-se início a um dos principais alvos de discussão deste artigo, pois sem essa análise poderia dificultar o entendimento sobre a origem do $\ln x$ que é a função inversa do e^x. Sendo os cálculos em séries do e^x já conhecidos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

E este sistema de logaritmos, também conhecido como logaritmos naturais, tem grande aplicação no estudo de diversos fenômenos da natureza e é definido pela reciprocidade $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$.

No ano de 1668 foi identificado, pelos matemáticos Nicholas Mercator (1620 - 1687) e William Brouncker (1620 - 1684), uma série infinita para definir o $\ln(x+1)$ quando no mesmo ano estudavam métodos para calcular a área de um segmento hiperbólico.

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Definindo o logaritmo natural, $f(x) = \ln x$, sendo o número positivo x corresponde um único expoente a, tal que $x = e^a$. Este expoente a denomina-se logaritmo natural de x e é representado por $\ln x$.

$$a = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^a$$

Com a descoberta dessa série, os matemáticos teriam que, num futuro próximo, substituir as tarefas dos logaritmos como ferramenta de simplificação das miraculosas multiplicações e divisões e colocá-los no patamar de função que estuda os fenômenos da natureza (MAOR, 2008).

Jean Bernoulli e Leibniz: Logaritmos negativos, real ou imaginário?

A polêmica sobre logaritmos de números negativos e números complexos teve início no século XVIII em conjunto com a integração. Segundo Lima (2012), em analogia com o caso real, Johann Bernoulli integrou $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$ chegando, após alguns artifícios matemáticos e números complexos, ao resultado $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = -\frac{1}{2ai}.\ln\left(\frac{x+ai}{x-ai}\right)$.

Bernoulli e Leibniz argumentaram sobre o significado, mais especificamente de $\ln\left(\frac{x+ai}{x-ai}\right)$ e, em particular, sobre o significado de $\ln(-1)$. Bernoulli afirmava que $\ln(-1)$ era real enquanto Leibniz alegava que era imaginário. Bernoulli afirmava que $\ln(x) = \ln(-x)$, ou seja, que os logaritmos de números simétricos seriam iguais. Porém, Leibniz via esses argumentos como absurdos e questionava que todos log x, para $x > 0$, são números reais, e afirma ainda que, $\ln x$, para todo $x < 0$, deveria ser imaginário

(ROQUE; CARVALHO, 2012). Então, Leibniz mostrou por absurdo que, se $\ln(-1)$ fosse aplicada a série de Taylor, ficaria da seguinte forma:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\ln(-2+1) = \ln(-1) = -2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \frac{16}{4} - \cdots$$

Observando que a série da diverge, ela não pode ser real, por isso deve ser imaginária.

Somente em 1747 veio uma solução plausível para esse embate, Leonard Euler conseguiu explicar a questão, evidenciando que os mesmos não eram números reais e sim imaginários puros além do mais Euler afirmou, após estudar as propriedades dos logaritmos, que tanto os números positivos quanto os negativos, têm uma infinidade de logaritmos. Esta conclusão foi obtida por meio da seguinte fórmula $e^{i\pi} = \cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$ (BOYER, 2012).

Além do mais, Euler considerava e^z o ponto de partida para a teoria da exponencial e dos logaritmos, como afirma Lima (2012), como era de conhecimento de todos na época, as séries trigonométricas:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

Euler percebeu que através de simples manipulações, poderia desenvolver a série da exponencial complexa, que ficou conhecida como constante de Euler,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^7}{7!} \ldots,$$

onde z é um número complexo.

Na série da constante de Euler (e^z), Euler substituiu astuciosamente z por $i\theta$, obtendo para $e^{i\theta}$ a seguinte sequência:

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} \ldots$$

Observando que o número i tornando-se repetidos de forma cíclica a cada quatro potências e assim por diante, $i^1 = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -\sqrt{-1}$, $i^4 = 1$. Substituindo i na equação por seus valores correspondentes:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i.\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i.\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i.\frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + i.\frac{\theta^9}{9!} - \cdots$$

E como no início estão desenvolvidas as séries de $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$, podendo facilmente perceber que pode separar os números imaginários dos reais, deixando-os da seguinte forma:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} - + \frac{\theta^8}{8!} - \cdots\right) + i.\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \cdots\right),$$

então substituindo os valores entre parênteses pelas suas respectivas séries:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$$

Isso implica que, θ é o argumento z visto anteriormente, substituindo θ por π ficava na forma $e^{i\pi} = \cos\pi + i.\operatorname{sen}\pi = -1 + i.0 = -1$. Com a fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$, Euler explicou como Bernoulli estava errado ao dizer que os números opostos têm o mesmo logaritmo. Euler afirmou que $e^{i\theta} = \cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$ vale para todos os ângulos medidos em radianos, e em particular $\theta = \pi$, $e^{i\pi} = \cos\pi + i.\operatorname{sen}\pi$, ou seja, $e^{i\pi} = -1$ então $\ln(-1) = i\pi$.

Depois da brilhante descoberta de que $e^{i\theta} = \cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta$ e uma conclusão diante da controvérsia entre Jean Bernoulli e Leibniz, Euler também se surpreendeu ao considerar o argumento θ dessa relação como π, tendo a seguinte igualdade $e^{i\pi} + 1 = 0$ (LOPES, 2014). Portando Euler não alcançava uma simples relação, mas ele se deparava diante de uma relação que reúne, o que ele considerava, os cinco mais importantes números da matemática: e (que é a base do logaritmo natural), i (o número que representa a unidade imaginária $\sqrt{-1}$), π (o número pi, que é a razão de uma circunferência pelo seu diâmetro), 1 (um, a unidade numérica que está em todos sistemas de numeração) e 0 (zero, o elemento nulo). Além de 3 principais operações da matemática: adição (+), subtração (-), multiplicação (.) e potenciação (a^x).

> Existe uma fórmula famosa – talvez a mais compacta e famosa entre todas as fórmulas – desenvolvida por Euler a partir de uma descoberta de De Moivre: $e^{i\pi} + 1 = 0$. [...] Ela fascina igualmente o místico, o cientista, o filósofo e o matemático. (KASNER, NEWMAN apud MAOR, 2008, p. 199)

Fórmula que foi considerada na época, e até hoje, por muitos matemáticos, inclusive Euler, como “a mais bela de todas as fórmulas” (MAOR, 2008, p. 208).

Considerações Finais

Diante das pesquisas bibliográficas, foi possível produzir esse artigo cuja pesquisa contém pontos que são considerados importantes para estudo, podendo assim contribuir muito para que outros pesquisadores o tenham como referência. Foi possível também constatar mediante este estudo a mudança do mundo socioeconômico a partir da criação dos logaritmos com a facilitação dos cálculos que antes eram enormes.

É importante enfatizar que a construção do conteúdo matemático, em especial dos logaritmos, não foi obra de um único autor, mas vários outros deram sua parcela de contribuição. Assim, destaca-se alguns importantes nomes como Michael Stifel, Nicole Oresme, Nicolas Chuquet, John Napier, Henry Briggs. Nicolas Mercator, Johann Bernouilli, Gottfried Wilhen Leibniz, Leonard Euler, dentre outros que muito contribuíram para o desenvolvimento dessa ferramenta matemática para a resolução de cálculos muitos complicados.

Assim foi alcançado o objetivo de mostrar o desenvolvimento histórico dos logaritmos, uma concisa explanação sobre a exponencial complexa e as discussões teóricas entre Jean Bernoulli e Leibniz sobre o tratamento de logaritmos de números negativos. Expressando alguns cálculos e argumentos desses dois grandes nomes da história da matemática. Também foi abordado a contribuição de Leonhard Euler que conseguiu um veredicto espantoso onde não houve uma definição entre o certo o errado na discussão.

Referências

ARRUDA, José Jobson de A.; PILETTI, Nelson. **Toda a história:** história geral e história do Brasil. 8ª. ed. São Paulo - SP: Editora Ática, 1998.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2ª. ed. [S.l.]: Editora Edgard Blücher, 2012.

COBIANCHI, Antonio Sérgio. Os logaritmos neperianos: algumas considerações históricas. **Revista Espacios**, v. 37, n. 26, p. E-2, 2016.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática uma breve história**. Campinas - SP: Editora Komadi, v. 2, 2005.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas - SP: Editora da UNICAMP, 2004.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo - SP: Editora Livraria de Física, 2006.

GERBASI, Adalberto Valderrama. Um tratado sobre sistemas de logaritmos. **Akrópolis - Revista de Ciências Humanas da UNIPAR**, v. 7, n. 26, p. 23-30, 1999.

LIMA, Elon Lages *et al*. **A matemática do ensino médio**. 4ª. ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, v. 3, 2004.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. 5ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LOPES, Thiago Beirigo. **Uma metodologia baseada na história para obtenção de conceito sobre Números Complexos**. 2014. 58 f. Palmas: Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Tocantins (UFT), 2014. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1142/2012_00923_THIAGO_BEIRIGO_LOPES.pdf>. Acesso em: 10 jun. 2015.

MAOR, Eli. **e:** A história de um número. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro – RJ: Editora Record, 2008.

PIPPA, Tania Cristina Maggioni. **A função logarítmica e a régua de cálculo**. 2014. 62 f. São Paulo: Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. **Tópicos de história da matemática**. 1ª. ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, 2012.

SAMPAIO, João Carlos. John Napier, Henry Brigss e a invenção dos Logaritmos. **Departamento de Matemática - Ufscar**, 2010. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/logshistoria.PDF>. Acesso em: 2 jun 2017.

SILVA, Marcelo Carlos da. A construção numérica: um breve histórico. **PsicoGlobal**, v. 196, p. 1-7, 2008.

VICENTINO, Cláudio. **História geral:** volume único: ensino médio. 1ª ed. ed. São Paulo: Scipione (Coleção Novos Tempos), 2000.