ENSINO DE SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS: UMA INVESTIGAÇÃO COM PROFESSORES DE MATEMÁTICA

NUMERICAL SEQUENCES TEACHING: AN INVESTIGATION WITH MATHEMATICS TEACHERS

***Helena Noronha Cury*[1]**
Centro Universitário Franciscano
***Isolda Gianni de Lima*[2]**
Universidade de Caxias do Sul
***Laurete Zanol Sauer*[3]**
Universidade de Caxias do Sul

Resumo
Neste artigo, apresenta-se parte dos resultados de uma investigação realizada com apoio do CNPq, com professores de Matemática em formação inicial e continuada, desenvolvida por uma equipe de docentes de duas Instituições de Ensino Superior do Rio Grande do Sul. A subpesquisa aqui apresentada teve como objetivo avaliar o conhecimento matemático para o ensino de sequências numéricas por parte de mestrandas e doutorandas em Ensino de Matemática. Aplicou-se um teste que fazia menção a respostas de licenciados a uma questão sobre sequências numéricas e esperava-se que as participantes justificassem suas opiniões sobre as respostas dadas e apresentassem estratégias adequadas para auxiliar os alunos a compreender o conteúdo envolvido. Conclui-se que as mestrandas e doutorandas participantes não têm, de maneira geral, conhecimento do conteúdo de sequências, confundindo determinação de convergência de uma sequência com cálculos de limites em um ponto; além disso, as respondentes não souberam indicar estratégias adequadas para superar as dificuldades relacionadas ao cálculo do limite de uma sequência. Sugerem-se novas investigações para o aprofundamento da análise do conhecimento matemático para o ensino.

Palavras-chave: Sequências numéricas; Professores de Matemática; Conhecimento matemático para o ensino.

Abstract
In this article, we present part of the results of an investigation carried out with support of the CNPq, with undergraduate and graduate mathematics teaching students. The research was developed by a team of professors of two Institutions of Higher Education of Rio Grande do Sul and aims to evaluate the mathematical knowledge for teaching numerical sequences by master and doctoral students in mathematics teaching. We performed a test that was applied to undergraduate mathematics teaching students and

[1] curyhn@gmail.com
[2] iglima1@gmail.com
[3] lzsauer2@gmail.com

the answers to a numerical sequence question were analyzed by the graduate students, who were expected to justify their opinions about the answers and to suggest adequate strategies to help students understand the content involved. Our conclusion is that the master and doctoral students who participated in this research do not have, in general, knowledge of the content of sequences, confusing determination of a sequence convergence with calculation of limits at a point; moreover, the respondents were unable to suggest adequate strategies to overcome the difficulties related to the calculation of the limit of a sequence. Further research is suggested to deepen the analysis of mathematical knowledge for teaching.

Keywords: Numerical sequences; Mathematics teachers; Mathematical knowledge for teaching.

Introdução

O conhecimento matemático para o ensino de qualquer conteúdo envolve não só o conhecimento do conteúdo em si, como também dos métodos e técnicas que melhor se adaptam ao seu ensino. Na formação de professores de Matemática, inicial ou continuada, é importante trabalhar simultaneamente com os conteúdos e com a metodologia para seu ensino. Docentes de duas Instituições de Ensino Superior (IES) do Rio Grande do Sul, preocupados com dificuldades apresentadas por seus alunos de graduação e pós-graduação no tocante ao conteúdo de sequências numéricas, propuseram-se a desenvolver um projeto que recebeu auxílio do CNPq[4] e envolveu licenciandos em Matemática, bem como mestrandos e doutorandos de Programas de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática das duas instituições.

O objetivo geral do projeto foi investigar o conhecimento pedagógico do conteúdo dos erros na formação inicial e continuada de professores de Matemática, tendo como fundamentação teórica as ideias de Shulman sobre o conhecimento do professor e, especificamente, os trabalhos de Deborah Ball e colaboradores sobre o conhecimento matemático para o ensino.

Inicialmente, foi aplicado um teste a alunos de Licenciatura em Matemática das duas IES, envolvendo o conteúdo de sequências e séries. As respostas ao teste foram analisadas pelos pesquisadores e algumas delas foram selecionadas para compor um segundo teste, aplicado a alunos dos Programas de Pós-Graduação já citados.

Os dados apresentados neste artigo referem-se à aplicação do segundo teste a oito mestrandas e doutorandas[5], às quais foi solicitada a opinião sobre respostas de licenciandos em Matemática à questão que envolvia representação gráfica de uma sequência e cálculo de limites. Teve-se como objetivo, nessa subpesquisa envolvendo essas mestrandas e doutorandas, avaliar seu conhecimento matemático para o ensino de sequências numéricas, haja vista que o conteúdo é por elas lecionado em nível médio ou superior e pode influenciar a aprendizagem dos alunos desses níveis de ensino.

[4] Processo 443118/2014-0
[5] Somente houve participação de pós-graduandos do sexo feminino na aula em que foi aplicado este teste, por isso optou-se por indicar os respondentes por “mestrandas e doutorandas”.

As ideias de Shulman (1986, 1987) sobre as categorias de conhecimento do professor, bem como a classificação nelas baseada, realizada por Ball, Thames e Phelps (2008), têm influenciado muitos pesquisadores no Brasil e no exterior (HILL; BALL, 2009; MANDARINO, 2010; JAKOBSEN; THAMES; RIBEIRO, 2013; SHALEM; SAPIRE; SORTO, 2014, entre outros). São revisados esses pressupostos teóricos para, em seguida, apresentar os procedimentos metodológicos da pesquisa e seus resultados.

Pressupostos teóricos

Uma classificação dos tipos de conhecimento do conteúdo de professores de qualquer disciplina e nível de ensino foi estabelecida por Shulman (1986). O autor distingue três categorias: conhecimento do conteúdo da disciplina, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular. Para cada uma delas, Shulman estabelece definições que têm sido objeto de discussões de investigadores desde então, porque havia (e ainda há) necessidade de construir instrumentos de pesquisa que permitam verificar a existência desses conhecimentos e as maneiras de desenvolvê-los, especialmente em programas de formação de professores.

O conhecimento do conteúdo da disciplina (traduzido por alguns pesquisadores como conhecimento do conteúdo do tema) refere-se ao conteúdo da disciplina em si, não só dos fatos ou conceitos, mas também das relações entre conteúdos e suas aplicações. O conhecimento pedagógico do conteúdo foi definido por Shulman (1986) como aquele "que vai além do conhecimento da disciplina em si para a dimensão do conhecimento da disciplina *para ensinar*". (p. 9, grifo do original). Finalmente, o conhecimento curricular envolve o domínio dos programas e da grade curricular para determinado nível de ensino e disciplina, bem como os materiais instrucionais apropriados para ensinar cada tópico do currículo.

Em artigo posterior, Shulman (1987) amplia as categorias e propõe que o professor, além dos tipos de conhecimento já mencionados, tenha também conhecimento pedagógico geral, conhecimento dos alunos e de suas características, dos contextos educacionais e dos "objetivos, propósitos e valores educacionais, e seus fundamentos filosóficos e históricos". (p. 8).

A partir dessas ideias, Deborah Ball e seus colegas propuseram uma classificação do conhecimento específico para o professor de Matemática, denominando-o "conhecimento matemático para o ensino". Subdividiram as categorias de Shulman, estabelecendo que o conhecimento do conteúdo da disciplina pode englobar conhecimento comum (CCK) e especializado do conteúdo (SCK) e que o conhecimento pedagógico do conteúdo pode ser dividido em conhecimento do conteúdo e dos estudantes (KCS) e conhecimento do conteúdo e do ensino (KCT)[6]. (BALL; THAMES; PHELPS, 2008).

[6] Neste artigo, são usadas as siglas das expressões em inglês, por serem mais conhecidas na literatura sobre o tema. Assim, têm-se: *common content knowledge* (CCK), *specialized content knowledge* (SCK), *knowledge of content and students* (KCS) e *knowledge of content and teaching* (KCT).

DOI: 10.30938/bocehm.v4i12.24

O CCK envolve conhecimentos necessários para o ensino, mas não exclusivos do professor. O SCK, por outro lado, é formado pelos conhecimentos e habilidades matemáticas exclusivas do professor. O KCS estabelece possibilidades de antecipar dificuldades dos alunos e suas concepções, adequadas ou errôneas. Finalmente, o KCT envolve, por exemplo, elaborar tarefas que exigem um sequenciamento do conteúdo, escolher bons exemplos e saber quais são as vantagens e desvantagens de usar determinada forma de representação matemática.

Além dessas categorias, Ball, Thames e Phelps (2008) propõem uma classe que denominam de "horizon content knowledge", usando a sigla HCK, definida como "uma consciência de como tópicos matemáticos estão relacionados sobre a extensão da matemática incluída no currículo" (p. 403). Jakobsen, Thames e Ribeiro (2013) buscaram explicar este subdomínio do conhecimento do professor:

> HCK é uma orientação e uma familiaridade para com a disciplina (ou disciplinas) que contribuem para o ensino do conteúdo escolar próximo, fornecendo aos professores um sentido de como o conteúdo que está sendo ensinado está situado e conectado ao campo disciplinar mais amplo (p. 4).

De certa forma, essa categoria aproxima-se do que Shulman chamou de conhecimento lateral e vertical do currículo. O lateral está ligado à habilidade do professor em relacionar o conteúdo de uma determinada aula com os que estão sendo discutidos em aulas simultâneas de outras disciplinas. O conhecimento vertical envolve familiaridade com os conteúdos que foram ou serão ensinados na disciplina, em anos anteriores ou posteriores.

Tendo em vista essas classificações, pode-se perguntar: como fazer para identificar tais conhecimentos nos professores de Matemática? Que instrumentos de pesquisa podem ser usados para detectá-los? Essas parecem ser dúvidas de todos os que vêm discutindo o assunto desde a proposta original de Shulman. De fato, alguns pesquisadores criaram instrumentos para medir a incidência de cada categoria de conhecimento no fazer do professor e na aprendizagem dos alunos.

Mandarino (2010), ao trabalhar no contexto do Projeto Pró-Letramento, observa o quanto a análise da produção discente contribui para a construção do conhecimento do professor, nas três categorias apontadas por Shulman (1986). Com base nisso, discorre sobre as desestabilizações que essa análise provoca, pois as dúvidas dos alunos podem levar os professores a refletir sobre suas concepções pedagógicas, sobre a estrutura curricular e sobre os materiais instrucionais empregados no ensino.

Hill e Ball (2009) comentam trabalhos anteriores de seu grupo de pesquisa e discorrem sobre os tipos de conhecimento, indicando que suas pesquisas, aplicadas a um grande número de professores, buscam aprender mais sobre esses tipos de conhecimento e sua relação com a aprendizagem dos alunos. Porém, as próprias pesquisadoras consideram que seria necessário realizar outras avaliações do mesmo tipo para aprofundar os estudos sobre os domínios de conhecimento.

Shalem, Sapire e Sorto (2014) realizaram uma pesquisa durante o desenvolvimento de um projeto com professores da África do Sul, em que 62 docentes discutiram em grupos suas experiências de ensino. Seis atividades distintas foram propostas aos professores, sendo que uma delas aproveitou resultados de um teste anual aplicado a 55.000 alunos, para investigar CCK, KCS e KCT. Com análises quantitativas e qualitativas, esses autores consideraram que, de maneira geral, nas explicações dos professores sobre os erros dos alunos, o conhecimento do conteúdo da disciplina é consistente, ao contrário do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Essas ideias estão subjacentes a muitas investigações e, em especial, fornecem a base teórica para desenvolver a investigação ampla, anteriormente citada, bem como esta subpesquisa, que buscou aproveitar respostas de licenciandos para analisar o conhecimento matemático para o ensino, de professores em formação continuada. A seguir, são apresentados o contexto e os procedimentos metodológicos da investigação e seus resultados.

Contexto da Pesquisa e Procedimentos Metodológicos

A investigação desenvolvida pela equipe de docentes acima indicada é uma pesquisa de campo (FIORENTINI; LORENZATO, 2006), de caráter qualitativo. Inicialmente, foi aplicado um teste, composto por cinco questões abertas sobre sequências numéricas, a 15 licenciandos em Matemática das duas IES envolvidas na investigação, durante uma aula da disciplina de Análise Real. A análise das respostas a uma das questões foi apresentada em artigo elaborado por outros membros da equipe (BISGNIN; BISOGNIN; LEIVAS, 2016) e optou-se por escolher esta questão e algumas respostas dos licenciandos para desenvolver uma subpesquisa, com o objetivo de avaliar o conhecimento matemático para o ensino de sequências numéricas de professores em formação continuada.

Foram convidadas a participar desta subpesquisa quatro mestrandas e quatro doutorandas, dos cursos de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática das duas IES. A elas, foi proposta uma questão que solicitava justificativas para avaliar respostas dos licenciandos, com vistas a discutir seu conhecimento matemático, do conteúdo em si e das estratégias metodológicas que poderiam empregar para auxiliar seus alunos na superação das dificuldades relacionadas ao conteúdo de sequências numéricas.

As sugestões de Hill, Schilling e Ball (2004) para testar o conhecimento matemático para o ensino de professoras de anos iniciais levaram à elaboração do teste aplicado nesta subpesquisa, já que também partiam de erros de estudantes e questionavam estratégias de ensino para superar as dificuldades.

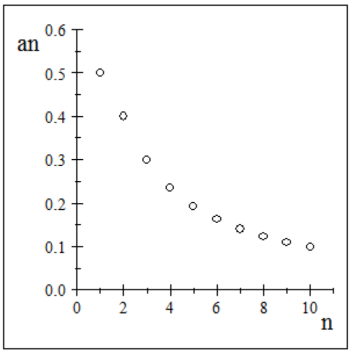
Todos os participantes, licenciandos, mestrandos e doutorandos, assinaram Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e a pesquisa foi autorizada pelas coordenações dos respectivos cursos.

As oito professoras participantes desta subpesquisa lecionam nos três níveis de ensino: cinco lecionam na educação básica (Ensino Fundamental ou Médio), duas lecionam no Ensino Médio e Superior e uma, apenas no Ensino Superior. Todas afirmam trabalhar com o conteúdo de sequências numéricas, no Ensino Fundamental (padrões e generalidades), no Ensino Médio (progressões geométricas) e no Ensino Superior (em Cálculo Diferencial e Integral). Nos dados a seguir apresentados, essas professoras são identificadas apenas por letras, para preservar suas identidades.

Apresentação e Análise dos Resultados

A questão respondida pelos 15 licenciandos tem o seguinte enunciado:

A sequência $\left(a_n = \dfrac{n}{n^2+1}\right)$ *tem os seus primeiros termos representados na figura abaixo.*



(a) A figura permite concluir que a sequência é convergente? Por quê?

(b) Considere, também, a definição do seu termo geral e determine qual é o limite desta sequência quando $n \to +\infty$.

O Quadro 1, a seguir, apresenta a distribuição das respostas dos licenciandos, em que “C” indica resposta correta, “PC”, parcialmente correta, “I”, incorreta e “EB”, em branco.

Quadro 1 - Distribuição do número de respostas em cada categoria

Item	C		PC		I		EB	
	N.	%	N.	%	N.	%	N.	%
a	4	26,7	2	13,3	4	26,7	5	33,3
b	0	0,0	5	33.3	8	53,3	2	13,3

Fonte: BISOGNIN; BISOGNIN, LEIVAS (2016, p. 369)

Nota-se que as respostas incorretas ou em branco, no item (a), totalizaram 60% e, no item (b), 66,6%. Por serem alunos de licenciatura em Matemática, em seus últimos semestres de cursos (visto que cursavam a disciplina de Análise Real, em geral presente no final da grade curricular desses cursos), essa aparente dificuldade nas respostas foi motivo de preocupação, porque o conteúdo de sequências numéricas é apresentado desde o Ensino Fundamental, com o estudo de regularidades e padrões; no Ensino Médio, com o estudo de progressões geométricas e no Ensino Superior, em disciplinas de cursos da área de Ciências Exatas.

Assim, considerando o trabalho realizado junto a mestrandos e doutorandos em exercício de docência, elaborou-se um teste em que foi repetido o enunciado da questão aplicada aos licenciandos e acrescentadas duas perguntas. Com a informação de que analisariam respostas de licenciandos em Matemática, as questões formuladas às participantes são apresentadas e discutidas abaixo.

Questão 1) *Na pergunta do item (a) da questão feita aos licenciandos, um dos respondentes afirmou que "Não, pois podemos verificar a convergência da esquerda para a direita, contudo, da direita para a esquerda não é possível". Se você fosse professor(a) dessa turma, como você analisaria esta resposta? Está correta? Está parcialmente correta? Está incorreta? Justifique sua análise.*

A seguir, são reproduzidas as respostas de sete participantes, visto que uma declarou não lembrar a definição de convergência e não respondeu a qualquer das duas perguntas:

Professora A: *Na minha opinião a resposta da aluna está parcialmente correta, pois a figura permite a análise da convergência da esquerda para a direita e da direita para a esquerda. A sequência é a mesma, sendo possível fazer a generalização.*

Professora B: *A resposta da aluna está parcialmente correta, pois a mesma analisou os valores de* $x \to +\propto$ *apenas. A aluna deveria ter analisado os valores quando* $x \to -\propto$, *porque embora o gráfico represente poucos valores, é possível generalizar, encontrar um termo geral para a sequência e a partir disso, analisar a convergência da sequência utilizando o limite bilateral (* $\lim_{x\to-\infty} S_n$ *e* $\lim_{x\to+\infty} S_n$ *). Além disso, quando ela analisou da direita para a esquerda percebeu que os valores estavam aumentando. Podemos representar pelos pares ordenados (2; 0,4) ; (1; 0,5), etc. O aluno percebeu que não saberia para qual valor tenderia.*

Professora C: *Na minha opinião, a resposta do aluno está parcialmente correta, considerando a análise feita somente pela representação gráfica. Quando o aluno responde que não podemos verificar a convergência da direita para a esquerda, parece haver um equívoco no entendimento sobre convergência de sequências no sentido de pensar em limites pela esquerda e pela direita. Podemos pensar, talvez, que o aluno tenha feito uma analogia com os limites de funções do cálculo.*

Professora D: *Nesta questão é possível verificar se o aluno compreende o conceito de convergência a partir da leitura do gráfico da sequência definida. Pela resposta do aluno, acredito que tenha confundido a convergência com os conceitos de limites laterais, por isso, considero incorreta.*

Professora E: *Parcialmente correta, pois convergência se define no decorrer da função, ou seja, analisamos a convergência da esquerda para a direita e a mesma converge a zero.*

Professoras F e G: *A resposta está correta, pois da esquerda para a direita tende a zero (converge) e da direita para a esquerda tende a infinito positivamente (diverge).*

Na análise dessas respostas, em relação ao conhecimento do conteúdo de sequências numéricas, pode-se dizer que a maior parte das professoras não tem claro o conceito de sequência e, como consequência, não tem o conceito de convergência. Lima (1999) considera que ℕ={1, 2, 3, 4, …} e define: "Uma *sequência* de números reais é uma função x: ℕ → ℝ, que associa a cada número natural *n* um número real x_n , chamado o *n-ésimo termo* da sequência". (p. 22, grifos do original). Indica-se essa sequência por (x_1 , x_2 , ..., x_n , ...) ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n).

Ainda em Lima (1999, p. 23), lê-se que "o número real a é *limite* da sequência (x_n) quando, para todo número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos x_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|x_n - a| < \varepsilon$. Escreve-se então a = lim x_n". (Grifos do original).

A seguir, Lima (1999) indica que uma sequência que possui limite é dita *convergente*, caso contrário, é *divergente*. Não há, entretanto, definição de "convergência à esquerda" ou "convergência à direita". Parece que o licenciando (e algumas professoras) confundiram a determinação de limite de uma função em um ponto com convergência de uma sequência.

Quando a professora B comenta que "deveria ter analisado os valores quando x→ - ∝", está mostrando não ter claro o conceito de sequência, já que, por ser uma função definida nos naturais, não tem sentido mencionar x → - ∝.

Também as professoras F e G mostram equívocos nas concepções sobre sequências convergentes e divergentes, quando afirmam que "da direita para a esquerda tende a infinito positivamente (diverge)".

A maior parte das professoras parece não ter claros os conceitos e, assim, pode-se dizer que não têm o conhecimento comum do conteúdo (na classificação de Ball, Thames e Phelps, 2008) ou não têm o conhecimento do conteúdo da disciplina (Cálculo ou Análise), conforme a nomenclatura usada por Shulman (1986).

Questão 2) No item (b), outro aluno escreveu: "$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\frac{\infty}{\infty^2+1}=1$". *Quais erros você encontra nesta resposta? O que você faria para auxiliar este aluno a superar suas dificuldades de resolução?*

Novamente, são apresentadas as respostas das sete participantes:

Professora A: *Pode-se dizer que o limite é igual a 1, pois analisando o gráfico e substituindo seus pontos, encontramos* $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}$. *Mas se analisarmos* $\lim\limits_{n\to\infty}$ *pode-se olhar tanto da direita para a esquerda como da esquerda para a direita e com a análise do gráfico da direita para a esquerda o aluno não poderia dizer que é 1. Por se tratar de funções, não utilizaria a indeterminação* $\frac{\infty}{\infty^2+1}=1$. *Poderia ser feita pela regra de L´Hôspital.*

Professora B: *Quando o aluno substitui "∝" na expressão, que representa o termo geral da sequência, conclui que a sequência tende a 1. Porém, não é possível concluir em função de se tratar de uma indeterminação, nada se pode confirmar. É necessário a utilização da regra de L´Hôspital, ou seja,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{d(n)}{dn}}{\frac{d(n^2+1)}{dn}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$$

DOI: 10.30938/bocehm.v4i12.24

Professora C: *Primeiro erro: o valor do limite ser igual a 1, pois se o termo geral* $\frac{n}{n^2+1}$ *representa a sequência dada, pelo aspecto do gráfico essa sequência não tende a 1 quando n cresce. O auxílio viria no sentido de retomar a ideia de significado geométrico da convergência de sequências. Segundo erro: operar com o símbolo do infinito como se fosse um número. O auxílio viria para trabalhar novamente com o cálculo de limites no infinito.*

Professora D: *A resposta está incorreta, pois só pela visualização no gráfico a resposta já poderia ser comprovada. Trabalharia a visualização gráfica e as propriedades dos limites; quando ocorre ou não uma indeterminação, qual o significado desses conceitos a partir do gráfico.*

Professora E: *Quando dividimos um número pelo seu quadrado o valor dessa conta não resulta em 1. Mostraria exemplos com números menores e iria aumentando-os gradativamente a fim de construirmos uma conclusão.*

Professoras F e G: *Quando dividimos infinito por infinito o resultado é indeterminado, portanto a resposta está errada.*

O maior problema que se pode detectar nessas respostas é que algumas professoras usam o símbolo "∞" como se fosse um número e, como afirmam F e G, consideram a possibilidade de dividir infinito por infinito. A divisão usual, mencionada aqui, é uma operação definida em $\mathbb{Q}^*$ ou $\mathbb{R}^*$ e o infinito não é elemento desses conjuntos. Além disso, a regra de L´Hôpital não é aplicável para funções de variáveis naturais e só pode ser usada em certas condições especiais; isso não parece claro para as professoras A e B, que apenas mencionam a regra e fazem uso dela.

Efetivamente, se a é um número real, se f e g são funções deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto contendo a (exceto, possivelmente, no próprio número a) e se $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \; e \; \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \; e \; \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, então $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(X)}{g'(x)}$. Se a representa o símbolo $+\infty$, assume-se que f e g são funções deriváveis em um intervalo não limitado (a, ∞). (MALTA, PESCO, LOPES, 2002).

Talvez as respondentes que mencionaram a regra de L´Hôpital tenham esquecido as condições sob as quais pode ser aplicada, mas, de qualquer forma, nota-se que não há um domínio do conhecimento relacionado a esses tópicos. A professora A, por exemplo, concorda que o limite é igual a 1 e isso mostra que não tem uma ideia intuitiva de limite e só pensa em empregar a regra de L´Hôpital, possivelmente porque lembra que esta regra tem uso no caso de limites no infinito.

Entende-se novamente que se trata de falta de conhecimento do conteúdo da disciplina (Cálculo ou Análise) e, neste caso, também, falta do conhecimento pedagógico do conteúdo, pois as professoras não explicam claramente o que fariam para auxiliar os alunos, já que apenas a retomada dos aspectos gráficos de convergência não basta para trabalhar com o cálculo do limite, tendo sido dada a lei da sequência. Na resposta da professora C, trabalhar novamente com o cálculo de limites no infinito parece ser uma repetição do que teria feito inicialmente em uma aula sobre esse conteúdo e a repetição de uma mesma explicação não garante a sua compreensão.

Considerações finais

A leitura das respostas das professoras mostra que, com poucas exceções, não há conhecimento matemático para o ensino desse conteúdo de sequências numéricas, pois falta conhecimento do conteúdo da disciplina e conhecimento pedagógico do conteúdo, haja vista que as professoras parecem não saber o conceito *para ensiná-lo*.

Talvez essas respondentes, tendo mais experiência no Ensino Fundamental ou Médio, pudessem trabalhar bem com padrões e generalidades ou com progressões geométricas. No entanto, considera-se que, sendo professoras em formação continuada (mestrandas ou doutorandas), deveriam ter mais conhecimentos de um tema que poderá lhes ser exigido no ensino em cursos de Licenciatura em Matemática, especialmente porque essa formação continuada tem sido, de maneira geral, a exigência básica para aprovação em concursos para professor em IES públicas (ou para o convite para lecionar em tais cursos em IES privadas).

Considera-se que precisam ser construídos novos instrumentos de pesquisa para investigar as facetas do conhecimento matemático para o ensino, com professores em formação inicial ou continuada, de modo que se possa debater sobre a própria formação e as responsabilidades dos formadores. Este artigo, ao apresentar este recorte de uma investigação maior, pretende apontar dificuldades de professores e lançar ideias para discussões sobre os tipos de conhecimentos que devem ser desenvolvidos por professores de Matemática. Além disso, espera-se que a divulgação dos estudos de Shulman, Ball e colaboradores possa trazer novas ideias para as pesquisas sobre a formação do professor de Matemática no Brasil.

Referências

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. **Content knowledge for teaching: what makes it special?** Journal of Teacher Education, v. 59, n. 5, p. 389-407, Nov./Dec. 2008.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V.; LEIVAS, J. C. P. **Aprendizagem de sequências numéricas:** pesquisa sobre dificuldades de licenciandos em Matemática. Zetetiké, v. 24, n. 3, p. 361-377, set./dez. 2016.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, 2006.

HILL, H. C.; SCHILLING, S. G; BALL, D. L. **Developing measures of teachers´mathematical knowledge for teaching. T**he Elementary School Journal, v. 105, n. 1, p. 11-30, Set. 2004.

HILL, H. C.; BALL, D. L. **The curious – and crucial – case of mathematical knowledge for teaching.** Phi Delta Kappan, v. 91, n. 2, p. 68-71, Oct. 2009.

JAKOBSEN, A.; THAMES, M. H.; RIBEIRO, C. M. **Delineating issues related to horizon content knowledge for mathematics teaching.** In: CONGRESS OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 8., 2013, Antalia, Turkey. Proceedings. Disponível em: <http://www.researchgate.net/profile/C_Ribeiro4/publication/258960348_Delineating_issues_related_to_Horizon_Content_Knowledge_for_mathematics_teaching/links/00b7d5356838a7af3e000000.pdf>. Acesso em: 01 ago. 2015.

LIMA, E. L. **Análise real**, volume 1. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1999.

MALTA, I.; PESCO, S.; LOPES, H. **Cálculo a uma variável**: volume II. Rio de Janeiro: Ed. da PUC-Rio; São Paulo: Loyola, 2002.

MANDARINO, M. C. F. **A análise de soluções dos alunos na formação de professores que ensinam matemática.** In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 33., 2010, Caxambu. Anais... Disponível em: <http://33reuniao.anped.org.br/33encontro/app/webroot/files/file/Trabalhos%20em%20PDF/GT19-6989--Int.pdf >. Acesso em: 12 jan. 2017.

SHALEM, Y.; SAPIRE, I.; SORTO, M. A. **Teachers´explanations of learners´errors in standardized mathematics assessments.** Pythagoras, v. 35, n. 1, p. 1-11, 2014.

SHULMAN, L. S. **Those who understand: knowledge growth in teaching.** Educational Researcher, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986. Disponível em: <http://www.fisica.uniud.it/URDF/masterDidSciUD/materiali/pdf/Shulman_1986.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2015.

SHULMAN, L. S. **Knowledge and teaching: foundations of the New Reform.** Harvard Educational Review, v. 57, n. 1, p. 1-22, Feb. 1987. Disponível em: <http://people.ucsc.edu/~ktellez/shulman.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2015.