



AS CONTRIBUIÇÕES DE ÉDOUARD LUCAS PARA A TEORIA DOS NÚMEROS

THE CONTRIBUTIONS OF ÉDOUARD LUCAS FOR THE THEORY OF NUMBERS

*Fabiany Lais Gomes de Pontes*¹

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

*Cristiano Rodrigo Gobbi*²

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

*Enne Karol Venancio de Sousa*³

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte

Resumo

Este trabalho traz um relato histórico sobre as principais contribuições do matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891) no âmbito da Teoria dos Números, área na qual houve uma maior dedicação de sua parte e, conseqüentemente, um grande número de trabalhos publicados que obtiveram êxito. Todavia, enunciaremos também, trabalhos de outros campos em que Édouard Lucas atingiu sucesso, como por exemplo em relação à Matemática Recreativa, onde ele expressou seus conceitos em forma de jogos que se consagraram e até hoje tem um grande alcance popular e de comercialização, como a Torre de Hanói, elaborada a partir de um desafio inspirado em uma antiga lenda Hindu e publicado em um de seus trabalhos que é, até hoje, considerado um clássico da matemática recreativa, a *Récréations Mathématiques*. Por essas e outras contribuições que iremos relatar no decorrer desse artigo, Édouard Lucas se consagrou como um dos maiores matemáticos franceses de todos os tempos, porém não sendo dado a isso uma merecida relevância, já que seu nome quase nunca é citado nos principais livros, revistas, etc. Tamanha relevância é atribuída não só por seus trabalhos inéditos, como também em continuações de trabalhos de outros, como é o caso da série de Lucas, surgida de uma generalização da sequência de Fibonacci, de forma a atender à mesma recorrência linear desta. Além disso, também ocorre o inverso, quando outros importantes matemáticos lançam algumas de suas contribuições a partir de trabalhos de autoria de Édouard Lucas, como é o caso do Lema de Kaplansky, o qual foi desenvolvido em decorrência de um problema proposto pelo mesmo. Diante de tamanho aporte, trazemos como objetivo enaltecer a obra deste que tanto contribuiu para a Matemática, de modo geral, mas que assim como outros, não tem um alcance considerável de visualização e reconhecimento, quanto aos seus estudos. Através de uma pesquisa bibliográfica e qualitativa, abordaremos os principais fatos que levam a legitimar a grandiosidade apresentada nos trabalhos de Édouard Lucas.

¹ fabianylais@hotmail.com

² enne.sousa@ifrn.edu.br

³ cristiano.gobbi@ifrn.edu.br



Palavras-chave: Édouard Lucas; Fibonacci; Números Primos; Teoria dos Números; Torre de Hanói.

Abstract

This work presents a historical account of the main contributions of the French mathematician François Édouard Anatole Lucas (1842 - 1891) in the scope of the Theory of Numbers, an area in which there was a greater dedication on his part and, consequently, a great number of published works that were successful. However, we will also mention the work of other fields in which Édouard Lucas achieved success, as for example in relation to Recreational Mathematics, where he expressed his concepts in the form of games that were consecrated and to this day has a great popular and commercial reach, as the Tower of Hanoi, drawn from a challenge inspired by an ancient Hindu legend and published in one of his works that is, until today, considered a classic of recreational mathematics, *Récréations Mathématiques*. For these and other contributions that we will report in the course of this article, Édouard Lucas was consecrated as one of the greatest French mathematicians of all time, but not being given a deserved relevance because his name is almost never mentioned in the main books, magazines, etc. Such relevance is attributed not only to his unpublished works, but also to the continuations of other works, such as the Lucas series, arising from a generalization of the Fibonacci sequence, in order to meet the same linear recurrence. In addition, there is also the reverse, when other important mathematicians make some of their contributions from works by Édouard Lucas, as is the case of Kaplansky's Lemma, which was developed as a result of a problem proposed by him. In view of this contribution, we aim to extol the work of this one that has contributed so much to Mathematics, in general, but as well as others, does not have a considerable scope of visualization and recognition, as for his studies. Through a bibliographical and qualitative research, we will address the main facts that lead to legitimize the grandeur presented in the works of Édouard Lucas.

Keywords: Édouard Lucas; Fibonacci; Prime Numbers; Theory of Numbers; Tower of Hanoi.

Introdução

Durante toda a história da evolução da ciência, muitos foram os estudiosos que contribuíram para tal crescimento, formando assim toda a grandiosidade existente hoje. Na Matemática, em especial, estudamos diferentes conceitos e teorias herdados de diversas pessoas que se propuseram a explorá-la, o que nos garante hoje uma certa facilidade, nesse aspecto. Graças a essas pessoas, temos hoje uma ciência e tecnologia altamente desenvolvidas e preparadas para suprir necessidades de diversos tipos.

Todavia, nem todas essas pessoas são reconhecidas e obtiveram um alcance de popularidade tanto quanto outras. Além disso, existe ainda o fato de por muitas vezes um certo estudioso ter desenvolvido algum trabalho importante e, por algum motivo, tal trabalho ser atribuído como criação de outro mais popular. Como exemplo disso,



apresentamos a famosa Fórmula de Bháskara, que leva o nome do matemático e astrônomo Bhaskara Akaria (1114 – 1185), mesmo não sendo este o idealizador da mesma. Fontes históricas afirmam que as fórmulas algébricas surgiram apenas 400 anos após a sua morte, não sendo possível ser ele o idealizador.

Levando em consideração isso, apresentamos como proposta para esse artigo, enaltecer o trabalho de um grande matemático francês que não obteve no decorrer do tempo uma visibilidade merecida, já que até mesmo seus trabalhos mais importantes, por serem respostas a outras consagradas teorias, levam o nome dos criadores destas primeiras, como é o caso do Pequeno Teorema de Fermat. O matemático em questão é François Édouard Anatole Lucas e o exemplo anterior se refere ao fato de Pierre de Fermat (1601 – 1665) ter contribuído com um caso particular para testes de primalidade e Édouard Lucas, por meio de uma prova recíproca, ter abrangido esse teste para outros casos, porém esse procedimento leva até hoje o nome de Fermat, e não o seu.

A metodologia aqui abordada trata-se de uma pesquisa bibliográfica e qualitativa, que se sucedeu da abstração de informações quanto ao tema que se está sendo tratado, com o intuito de relacionar de forma histórica tais informações, para que sejam apresentados e expostos os resultados. Foi usado como base a vida e obra do francês François Édouard Anatole Lucas, para se obter referências a trabalhos matemáticos de sua autoria e ainda, de outros que mantém ligações com este. Apresentaremos tais resultados a fim de enaltecer a importância dos mesmo e para que haja a disseminação dos conhecimentos gerados a partir desta pesquisa.

Biografia

François Édouard Anatole Lucas nasceu em abril de 1842 na cidade de Amiens, localizada ao norte da França, a 120 km de Paris. Desde cedo apresentava um notório talento matemático, o que o fez ingressar em uma das mais renomadas instituições de ensino superior da França, a École Normale Supérieure em 1861, onde permaneceu até 1864. Já com o título de graduação, trabalhou no observatório de Paris juntamente com o astrônomo que ficou conhecido por prever a existência de Netuno: Urbain Joseph Le Verrier (1811 – 1877) (SILVA, 2017).



Figura 1 – Édouard Lucas

Fonte: <http://learn-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Lucas>

Entre 1870 e 1871, Édouard Lucas serviu ao exército francês como oficial de artilharia em meio à guerra contra a Prússia, na qual a derrota o fez retornar e dar início oficialmente a sua carreira de professor de matemática, que se iniciou no Lycée of Moulins, onde atuou de 1872 a 1876. Logo após, ainda em 1876 até 1879, lecionou em Lycée Saint-Louis e entre 1879 e 1890 no Lycée Charlemagne.

Tinha a reputação de ser um ótimo professor, entretendo e instigando seus alunos com desafios matemáticos que requeriam considerável inventividade para serem resolvidos. Além de trabalhar como professor do ensino médio, foi um matemático bastante prolífico, tendo publicado durante toda sua vida mais de 180 artigos sobre as mais diversas áreas da matemática, nos mais diversos jornais de matemática do mundo. (SILVA, 2017, p. 21)

Durante todo esse período, Édouard Lucas desenvolveu trabalhos e pesquisas dentre diversas áreas da Matemática, em especial para a Teoria dos Números, onde deixou mais de suas contribuições com resultados bastante satisfatórios para a época em questão. Um exemplo disso é o caso do maior número primo encontrado manualmente, ou seja, sem o auxílio de máquinas.

A motivação surgida dos estudos sobre divisibilidade e fatoração o levaram a grandes resultados, como a série de Lucas, que surgiu como uma generalização da sequência de Fibonacci e ainda uma prova recíproca do Pequeno Teorema de Fermat (SILVA, 2017), dentre outras que serão abordadas no decorrer desse artigo.

Como grande apreciador também da Matemática Recreativa, escreveu diversos volumes do chamado *Recréations Mathématiques*, onde apresentou trabalhos como a famosa Torre de Hanói e o quebra-cabeça de Baguenaudier, também conhecido como anéis chineses.



Édouard Lucas faleceu em 1891, após ter seu rosto atingido durante um jantar por um pedaço de porcelana, lançado de um prato quebrado, o qual gerou uma forte infecção bacteriana poucos dias depois.

As seqüências de Fibonacci e de Lucas

Leonardo de Pisa (1170 – 1250), também conhecido como Leonardo Fibonacci é, para muitos, o maior matemático da idade média. Esse título deve-se aos inúmeros trabalhos deixados por ele que tiveram grande relevância em várias áreas da Matemática. Porém, um trabalho em especial eleva até hoje o seu nome a grandes conquistas. A chamada seqüência de Fibonacci, definida em seu termo geral por $F_n = F_{(n-1)} + F_{(n-2)}$ é uma seqüência que, dentre outras coisas, relaciona-se com a razão áurea, de modo que ao dividir-se um certo número n por seu antecessor, o valor aproxima-se do chamado número de ouro.

Ao tentar difundir o sistema de numeração hindu-arábico pela Europa que, então, utilizava o sistema romano, Fibonacci lançou um problema matemático que tinha como intuito apenas, mostrar a superioridade de um para o outro. O “problema dos coelhos” questionava o seguinte: “Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?”

Esse questionamento fez surgir a mais famosa das seqüências, da qual desenvolveram-se inúmeras generalizações que atendem outros inúmeros problemas. Uma dessas generalizações diz respeito a proporção áurea para as n -ésimas potências. A seqüência de Lucas é definida, em relação a de Fibonacci, imediatamente por $L_n = F_{(n+1)} + F_{(n-1)}$, dentre outras relações e, também resolve um famoso problema do qual surgiram outros trabalhos com o intuito de resolvê-lo. Segue o “problema de Édouard Lucas”: “De quantas maneiras n casais podem sentar em $2n$ cadeiras diferentes em torno de um círculo de modo que pessoas do mesmo sexo não se sentem juntas e que nenhum homem fique ao lado de sua mulher?” Irving Kaplansky (1917 – 2006) sugeriu em um lema relacionado à análise combinatória, uma das formas de solução para esse problema. As soluções para as duas seqüências serão apresentadas na tabela que se segue.



Tabela 1 - Números de Fibonacci e de Lucas

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322

Fonte: Elaborada pelos autores

Observe pelos espaços destacados, a validade da fórmula $L_n = F_{(n+1)} + F_{(n-1)}$, quando $n > 1$. Assim, a sequência de Lucas tornou-se uma das principais generalizações do trabalho de Fibonacci, sendo Édouard Lucas ainda o responsável por tornar popular o termo “sequência de Fibonacci”, já que era conhecida até então por “série de Lamé”. Assim como os números de Fibonacci, todas as suas generalizações atendem a diversas propriedades aritméticas estudadas na Teoria dos Números. A de Édouard Lucas, em particular, diz que L_n é congruente a 1 módulo n , quando n for primo. A partir desse trabalho, foram desenvolvidos outros de tamanha relevância que serão citados no decorrer deste artigo.

Édouard Lucas e o Pequeno Teorema de Fermat

Pierre de Fermat (1601 – 1665), foi um juiz francês que, mesmo sem formação alguma na área de Matemática, muito contribuiu para esta. Essas contribuições o fizeram ficar conhecido como o “príncipe dos amadores”, todavia seus trabalhos mostram o quanto de profissionalismo existia em seus conceitos, mesmo sem ter estudado apropriadamente para isso.

Apesar de nunca ter publicado nada, Fermat desenvolveu importantes teorias em diversas áreas da Matemática, como por exemplo a Teoria das Probabilidades, desenvolvida em parceria com Blaise Pascal (1623 – 1662). Porém, foram seus trabalhos na área da Teoria dos Números que o consagraram. Dentre eles, o Pequeno Teorema de Fermat, composição essa da qual gerou o teste de primalidade de Fermat, que diz que sendo p um número primo e a um inteiro qualquer, p divide $a^p - a$. Usando a linguagem moderna inserida por Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), temos que:

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Como enunciado, esse teorema só vale para o caso em que a é divisível por p . No entanto, há também uma forma de realização disso quando a não é divisível por p .



Essa forma se dá por uma prova recíproca do Pequeno Teorema de Fermat apresentada por Édouard Lucas em 1876 e diz que se a não é divisível por p :

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Com isso, Lucas complementou um dos mais importantes teoremas da Teoria dos Números. Todavia, esse é um teste para números genéricos e que requer muito tempo para a execução. Com essas duas afirmações, é possível confirmar ou não a primalidade de números e isso serviu como base para outros importantes trabalhos que enunciaremos em seguida.

Além deste teorema, em uma carta escrita ao Padre Marin Mersenne (1588 – 1648), Fermat lançou uma conjectura da qual descrevia uma outra fórmula para se encontrar números primos. Os chamados “números de Fermat”, inteiros e positivos, com n pertencente aos naturais, tinham a seguinte forma:

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

Contudo, posteriormente o matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) negou essa conjectura, ao mostrar que quando tem-se $n = 5$, o resultado é 4.294.967.297, um número composto. Atribuiu então, uma correção:

$$F_n = k2^{n+1} + 1$$

Sendo esta ainda, melhorada por Édouard Lucas, que propôs o seguinte:

$$F_n = k2^{n+2} + 1.$$

Édouard Lucas e os primos de Mersenne

Vimos até aqui que diferentes estudiosos publicaram distintas fórmulas e formas de se encontrar números primos. Todavia, uma em especial se destaca por ser a mais usada na procura dos maiores números primos encontrados manualmente. Os chamados “Primos de Mersenne”, apresentados em 1644 pelo Padre Marin Mersenne (1588 – 1648) em um trabalho intitulado *Cogita physico-mathematica*, identificam-se pela forma $2^p - 1$, com p sendo primo e, ainda, p não sendo maior que 257. Com a ascensão das máquinas e computadores, hoje é possível mostrar que essa forma vale para muitos, maiores que 257, inclusive, porém não todos os primos.

Inserindo a isso propriedades referentes aos números de Fibonacci em 1857, aos 15 anos de idade, Édouard Lucas deu início ao teste de primalidade para o número $2^{127} - 1$, o 12º número primo de Mersenne, só conseguindo concluir 19 anos após, em



1876. Com isso, Édouard Lucas encontrou o maior número primo calculado a mão, número esse que contém 39 dígitos. Hoje, com a ajuda de máquinas, números primos imensamente maiores já foram encontrados. O maior é o 50° primo de Mersenne, que acaba de ser calculado (dezembro de 2017) por Jonathan Pace, um engenheiro eletricitista americano que tem se dedicado a encontrar números primos com o auxílio de máquinas e tecnologia.

Édouard Lucas e a Matemática Recreativa

Além das contribuições para a área da Teoria dos Números, Édouard Lucas também foi um grande estudioso no âmbito da Matemática Recreativa. Um dos maiores clássicos existentes nessa área, a *Récréations Mathématiques*, de sua autoria, foi escrita entre 1882 e 1894 e contém vários volumes. Foi no quarto volume que Édouard Lucas apresentou o famoso “Problema das Torres de Hanói”, o qual anos depois em outra publicação, veio sugerido no formato do popular jogo que é comercializado até hoje.

Esse problema surgiu de uma antiga lenda hindu sobre três torres localizadas na cidade sagrada de Bernares, na Índia.

A lenda dizia que no início dos tempos, foi dado aos monges uma pilha de 64 discos de ouro de diâmetros diferentes e com um furo no meio, empilhados em uma das torres de forma que cada disco se sobrepunha a um disco maior de modo que sempre o disco de cima fosse menor que o disco imediatamente abaixo dele. A atribuição que os monges receberam foi a de transferir todos os 64 discos de uma torre para outra, usando a terceira como auxiliar. Apenas 2 regras foram estabelecidas: os monges deveriam movimentar apenas um disco de cada vez e nunca colocar um disco maior sobre um menor. Os monges foram compelidos a trabalhar com eficiência dia e noite e quando terminasse a tarefa, o templo seria transformado em pó e o mundo acabaria! (COSTA, 2011, p. 40)

Daí, surge a Torre de Hanói. Um jogo do tipo quebra-cabeça que envolve além de recorrência, função exponencial. As comercializadas hoje trazem geralmente entre 5 e 8 discos, com 3 pinos, em referência a lenda. O objetivo é transferir os discos para um pino diferente do inicial, de forma que não seja realizado mais do que um movimento por vez e que discos maiores não fiquem por cima de menores.



Figura 2 – Torre de Hanói

Fonte: <http://www.ibilce.unesp.br/#!/departamentos/matematica/extensao/lab-mat/jogos-no-ensino-de-matematica/ensino-medio/>

Ao lançar o problema, Édouard Lucas relatou que sendo n o número de discos, a quantidade mínima de movimentos é dada por $2^n - 1$.

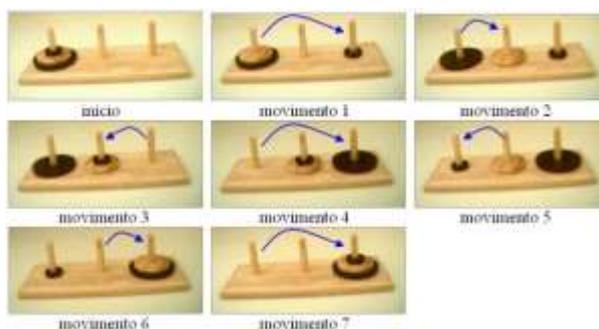


Figura 3 – Movimentos

Fonte: http://www.realidadevirtual.com.br/cmsimple-rv/?%26nbsp%3B_APLICA%C7%D5ES:Torre_de_Hanoi:O_Problema

Outro jogo popular no meio matemático, o quebra-cabeça de Baguenaudier, também conhecido como anéis chineses, citado por Lucas ainda em *Récréations Mathématiques*, traz o uso das recorrências para resolução de um problema também surgido a partir de uma antiga lenda, sendo essa chinesa.

O quebra-cabeça chinês das argolas consiste em um conjunto de fixo de argolas presas caprichosamente à uma haste fixa de metal. Obedecendo-se a um conjunto de regras bem definidas, o objetivo é determinar a sequência correta de inserções e remoções das argolas de maneira que todas as argolas presas à haste de metal sejam retiradas. (MARTINHON, [20-?], p. 1)

Salientamos que esse material não é de autoria de Édouard Lucas, mas sim de Girolamo Cardano (1501 – 1576). Édouard Lucas apresenta apenas suas considerações quanto ao material em si e sua resolução.



Figura 4 – Quebra-cabeça de Baguenaudier

Fonte: <https://pt.aliexpress.com/>

Considerações Finais

Após o término dessa pesquisa, pôde-se comprovar a genialidade apresentada nos trabalhos de Édouard Lucas, não só pelos conceitos matemáticos envolvidos, como também pelo caráter metodológico, onde certamente a atuação como professor de Ensino Médio deve ter grande influência. O que queremos dizer com isso, é que além de apresentar resultados e formas, Édouard lançou a isso desafios e possibilidades de resolução de problemas, além ainda de materiais manipuláveis e jogos, tudo direcionado a uma melhor visualização do que está sendo proposto.

Essa metodologia é hoje defendida pela maior parte dos educadores matemáticos. Existem milhares de estudos na área que comprovam, tanto quanto a resolução de problemas, como para o uso de materiais manipuláveis, o quão satisfatório são os resultados gerados por práticas semelhantes. Sendo assim, Édouard Lucas estava à frente de seu tempo também nesse quesito. Como professor de Ensino Médio, as necessidades apresentadas por seus alunos devem ter desenvolvido nele essa característica, o que por muitas vezes não ocorreu com outros grandes matemáticos que trabalharam apenas com Ensino Superior.

Referências

COSTA, E. B. L. **A História da Ciência e o ensino da recursividade:** as torres de Hanói. – História da Ciência e Ensino: Construindo Interfaces, São Paulo, v. 4, p. 38-48, 2011.

MARTINHON, C. A. **O quebra-cabeça chinês das argolas** – Niterói: RJ, [20-?].

SILVA, Bruno Astrolino e. **Números de Fibonacci e números de Lucas.** / Bruno Astrolino e Silva. – São Carlos: SP, 2017.