



ARITHMETICA INFINITORUM DE JOHN WALLIS: UMA ANÁLISE DE SUA RELEVÂNCIA PARA O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

ARITHMETICA INFINITORUM OF JOHN WALLIS: AN ANALYSIS OF ITS RELEVANCE FOR DIFFERENTIAL AND COMPREHENSIVE CALCULATION

*Francisco Aureliano Vidal*¹

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba - IFPB

*Kíssia Carvalho*²

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba - IFPB

Resumo

Este artigo apresenta uma pesquisa, ainda em andamento, que consiste em fazer um estudo da obra *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis (1616-1703), publicada em 1655, na qual analisamos a aplicação da abordagem utilizada pelo autor na perspectiva de fazer uma conexão com o ensino nos dias de hoje, além de investigar sua efetividade em sala de aula para a aprendizagem de conceitos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral, procurando em sua metodologia elementos que possam contribuir para uma forma de ensino do Cálculo baseado mais na descoberta do que no rigor característico dessa disciplina. Desta forma procuramos compreender a forma inovadora de Wallis tratar algumas questões relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral, investigar como é realizada a abordagem de alguns de seus conceitos e relacioná-los com o ensino atual. Esse trabalho se fundamenta essencialmente nos estudos realizados nos últimos anos por pesquisadores interessados na área da História da Matemática que defendem o uso da História da Matemática como recurso a ser incorporado na sala de aula além de levar em consideração o que sugerem alguns documentos oficiais brasileiros em relação ao ensino da Matemática (PCN, DCN, COM, etc.). Os resultados apurados apontam que esta obra foi de grande influência nas descobertas posteriores sobre os principais conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. No nosso caso específico, até então, verificamos apenas a presença de comentários a respeito da obra *Arithmetica Infinitorum* e de seu autor em dois livros clássicos de História da Matemática e também em um artigo específico sobre este tema. Ao analisar estas obras, percebemos certas características específicas deste autor que podem ser de grande utilidade ao estudar questões relativas ao ensino nos dias atuais. Espera-se que esta pesquisa possa facilitar a compreensão dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral e assim contribuir para o seu ensino e, conseqüentemente para a sua aprendizagem.

Palavras-chave: John Wallis; *Arithmetica Infinitorum*; Cálculo Diferencial e Integral; História da Matemática.

¹ francisco.vidal@ifpb.edu.br

² kissia.carvalho@ifpb.edu.br



Abstract

This paper presents a research, which is still under way, that consists of a study of John Wallis' (1616-1703) *Arithmetica Infinitorum*, published in 1655, in which we analyze the application of the author's approach in the perspective of making a connection with the teaching in the present day, besides investigating its effectiveness in the classroom for the learning of concepts related to Differential and Integral Calculus, searching in its methodology elements that can contribute to a form of Calculus teaching based more on the discovery than on the rigor of this discipline. In this way, we try to understand Wallis's innovative way of dealing with some issues related to Differential and Integral Calculus, to investigate how to approach some of its concepts and to relate them to current teaching. This work is essentially based on the studies carried out in recent years by researchers interested in the area of Mathematical History who defend the use of the History of Mathematics as a resource to be incorporated in the classroom besides taking into account what some official Brazilian documents suggest in Mathematics teaching (PCN, DCN, COM, etc.). The results show that this work was of great influence in the later discoveries on the main concepts of Differential and Integral Calculus. In our specific case, until then, we only observed the presence of comments about the work *Arithmetica Infinitorum* and its author in two classic books of History of Mathematics and also in a specific article on this subject. In analyzing these works, we perceive certain specific characteristics of this author that can be of great use when studying questions related to teaching in the present day. It is hoped that this research can facilitate the understanding of the concepts of Differential and Integral Calculus and thus contribute to its teaching and consequently to its learning.

Keywords: John Wallis; *Arithmetica Infinitorum*; Differential and integral calculus; History of Mathematics.

Introdução

Esta pesquisa tem como principal objetivo fazer uma análise da obra *Arithmetica Infinitorum* de Wallis para verificar sua forma inovadora de tratar algumas questões relacionadas ao Cálculo Diferencial e Integral e investigar como é realizada a abordagem de alguns de seus conceitos. Para tanto buscamos em algumas obras clássicas de História da Matemática (HM), Boyer (1974), Eves (2011), Lopes e Mendes (2015), fatos relacionados tanto a esta obra quanto ao seu autor no intuito de fazer uma relação com o ensino atual de Cálculo, tendo em vista a forte influência de Wallis e também desta obra sobre os autores das teorias desta disciplina.

Apoiamos-nos também nos relatos de estudiosos atuais sobre a influência da HM para a compreensão de conceitos da Matemática, isto nos incentivou a buscar, especificamente nesta obra, aspectos históricos que possam contribuir para a compreensão de conceitos do Cálculo. Por exemplo, Valente (2007, p. 31) relata que “não existe fatos históricos sem questões postas pelo historiador” e ainda acrescenta que



tais fatos são produzidos pelo historiador a partir de seu trabalho com as fontes e a partir das questões elaboradas. Neste contexto procuramos realizar uma investigação na obra de Wallis buscando elementos que possam contribuir para o ensino do Cálculo. Este autor ainda acrescenta que:

[...] o método histórico envolve a formulação de questões aos traços deixados pelo passado, que são conduzidos à posição de fontes de pesquisa por essas questões, com o fim da construção de fatos históricos, representados pelas respostas a elas (Idem, p. 31).

Sendo assim, acreditamos que o fato da presença do rigor incompleto na obra de Wallis, pode contribuir para um questionamento sobre o fato de haver um rigor generalizado por parte dos professores da disciplina de Cálculo. Pesquisas como a de Rezende (2003) também questionam isto e, ao discutir algumas características de um curso de Cálculo, relata que “Outra característica da normalidade do ensino de Cálculo é a predominância do “pseudo-rigor” na apresentação dos conteúdos do Cálculo” (REZENDE, 2003, p. 8), e ainda questiona qual o nível de rigor aceitável no contexto deste curso.

Assim sendo, o que pretendemos verificar é: Como a obra *Arithmetica Infinitorum* poderá contribuir, nos dias de hoje, para uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos no ensino do Cálculo Diferencial e Integral? Nossa intenção é verificar a utilidade da metodologia adotada no referido livro e sua aplicação no ensino desta disciplina. Acreditamos que ela poderá contribuir para alcançar uma das competências e habilidades próprias do licenciando em Matemática estabelecida pelas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) para Cursos de Matemática, a saber:

Desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmula e algoritmos. (BRASIL, 2001, p. 4).

Acreditamos que a resposta a esta questão pode contribuir significativamente para aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral na medida em que a utilização da História da Matemática como recurso didático “pode ser vista como um elemento importante no processo de atribuição de significados aos conceitos matemáticos” (BRASIL, 2006, p. 86) e, dessa forma, irá motivar os alunos a despertarem o interesse por esta disciplina. Entretanto, “É importante, porém, que esse



recurso não fique limitado à descrição de fatos ocorridos no passado ou à apresentação de biografias de matemáticos famosos” (Idem, p. 86), o que procuraremos evitar, ao fazer uma análise baseada em sua forma de escrever e descobrir novos conceitos relacionados ao Cálculo priorizando mais a descoberta ante o rigor que tal disciplina exige.

Referenciais teóricos

Pretendemos discutir questões relevantes ao ensino do Cálculo, em especial aquelas voltadas à metodologia adotada na *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis onde abordamos a História da Matemática no contexto do ensino e aprendizagem. “A presença da história no ensino e na aprendizagem da matemática deve se dar a partir de atividades de ensino centradas na utilização de informações históricas relacionadas aos tópicos que se pretende investigar” (MENDES, 2006, apud MACENA, 2007). Em nossa pesquisa fazemos uma discussão a respeito do método utilizado por Wallis na sua obra. Garnica e Souza (2012, p. 40), relatam bem a nossa proposta ao afirmarem que:

A História da Educação Matemática visa a compreender as alterações e permanências nas práticas relativas ao ensino e à aprendizagem da matemática; a estudar como as comunidades se organizavam no que diz respeito à necessidade de produzir, usar e compartilhar conhecimentos matemáticos e como, afinal de contas, as práticas do passado podem – se é que podem – nos ajudar a compreender, projetar, propor e avaliar as práticas do presente.

Também os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), ao tratarem das competências e habilidades a serem desenvolvidas em matemática no contexto sociocultural tem-se em uma delas: “Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade” (1999, p. 93). Desta forma, pretendemos compreender as influências de Wallis em sua obra para o desenvolvimento do Cálculo como também a metodologia adotada nesta obra pode contribuir para seu ensino nos dias de hoje.

Os PCN também afirmam que a História da Matemática pode ajudar na resposta a “questão” da utilidade dos conteúdos matemáticos quando relatam:

Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer idéias (sic) matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns “porquês” e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 43).



De acordo com Silva (2014), a História da Matemática torna possível o conhecimento das relações dos homens em diferentes culturas, tempos e contextos, a autora afirma que a História da Matemática “torna-se forte candidata a fornecer respostas sobre as razões, motivações e necessidades de produção de conhecimentos matemáticos” (SILVA, 2014, p. 48) e o que propomos será de grande valia para compreender certos conceitos do Cálculo. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCM) também apontam para esta questão, nos oferecendo elementos para esta pesquisa, pois relatam:

A recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático pode se tornar um importante elemento de contextualização dos objetos de conhecimento que vão entrar na relação didática. A História da Matemática pode contribuir também para que o próprio professor compreenda algumas dificuldades dos alunos, que, de certa maneira, podem refletir históricas dificuldades presentes também na construção do conhecimento matemático. (BRASIL, 2006, p. 86).

Nossa intenção é fazer a análise dessa relação didática estabelecida na obra *Arithmetica Infinitorum* e fazer uma investigação acerca de seu método aplicado ao ensino de seus conceitos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica em que fizemos a análise da obra de Wallis, conforme apontado anteriormente, até o presente momento fizemos apenas uma busca em algumas obras sobre este assunto, afirmamos, no entanto que esta pesquisa ainda está em andamento, a seguir apresentamos alguns resultados que encontramos ao estudar as obras de Boyer (1974), Eves (2011) sobre John Wallis e sua notável obra *Arithmetica Infinitorum*.

Jonh Wallis e a *Arithmetica Infinitorum*

Até o presente momento realizamos uma abordagem da obra *Arithmetica Infinitorum* de John Wallis (1616-1703), publicada em 1655, na qual ele “aritmetizou a Geometria dos indivisibilibus de Cavalieri” (BOYER, 1974, p. 279), e utilizou um método inovador ao dar um tratamento aritmético a resultados geométricos (LOPES; MENDES, 2015). O que pretendemos, neste momento, foi analisar a aplicação desta abordagem.

Segundo Mendes (2009, p. 72), “um fato histórico da Matemática é digno de memória quando exerce ou exerceu na sociedade uma função desencadeadora de uma



série de acontecimentos matemáticos úteis à humanidade e que ainda podem gerar muito mais”, foi exatamente o que aconteceu com a obra de Wallis, pois “o conteúdo e os métodos do livro exercem um papel importante na transição do pensamento geométrico ao pensamento algébrico e influenciou vários matemáticos da segunda metade do século XVII” (LOPES; MENDES, 2015, p. 6).

Além disso, ao procurar na metodologia adotada por Wallis em sua *Arithmetica Infinitorum* elementos que possam contribuir para uma metodologia de ensino do Cálculo baseado mais na descoberta do que no rigor característico dessa disciplina, levamos à baila tal discussão no âmbito da educação superior e, conseqüentemente, contribuindo para a obtenção de melhores condições de aprendizagem das disciplinas ditas exatas sob a ótica da História da Matemática. Bastos Filho (2011), ao discutir a respeito da inserção da História da Ciência e Filosofia da Ciência no Ensino de Física (EF), relata que:

[...] quando estudamos um dado tema sob diversos pontos de vistas e à luz de múltiplas tradições teóricas temos melhores condições de enxergar inúmeros aspectos importantes. Tais aspectos sequer seriam questionados se nos ativéssemos apenas a um EF tradicional e orientado instrumentalmente para atender a certas demandas práticas que em nome de uma pressuposta eficiência técnica, condena como supérflua tal multiplicidade. (BASTOS FILHO, 2011, p. 116-117).

Desse modo, acreditamos que a presente pesquisa contribuirá significativamente para a superação da orientação instrumental citada pelo autor e que acontece também no ensino da Matemática. Trata-se de uma forma de problematizar a construção das ciências e sua relação com os processos formativos e as práticas sociais, na abordagem da Matemática.

Arithmetica Infinitorum se faz particularmente interessante para nós na medida em que nela “são sistematizados e estendidos os métodos de Descartes e Cavalieri e induzidos muitos resultados notáveis a partir de casos particulares” (EVES, 2011, p. 431). Nesta obra, segundo Boyer (1949, apud REZENDE, 2003, p. 174) “Wallis desenvolve o seu método infinitesimal com base na noção intuitiva de limite e de sua vocação aritmética”. Dessa forma, acreditamos que uma investigação mais profunda acerca da metodologia abordada nela poderá ajudar na compreensão dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral.



Wallis acolheu as vantagens advindas da geometria analítica de Descartes (1596-1650) e foi dentre os seus contemporâneos o que exibiu nos seus trabalhos uma aritmética livre de exposições geométricas. Ele mostrou como problemas clássicos de quadratura podem ser manipulados aritmeticamente e algebricamente e essa transição de geometria para aritmética é o cerne do método de Wallis. A geometria dos indivisíveis de Cavalieri torna-se então na aritmética do infinito de Wallis. (LOPES; MENDES, 2015, p. 6-7).

O que mais nos chamou a atenção ao estudar sobre este autor foi o fato relatado em Boyer (1974, p. 280) ao enfatizar que “Wallis era forte em descoberta mais não no rigor” fato este observado abundantemente na obra que estudamos. Entretanto, a mesma manteve-se por muitos anos como um tratado modelo no ensino de matemática (EVES, 2011) e ainda “teve uma nova impressão em 1695 dada a sua grande exposição” (LOPES; MENDES, 2015, p. 6). Em Boyer (1992, p. 39) encontramos o seguinte relato sobre o este autor: “John Wallis foi um dos mais capazes, notáveis e originais matemáticos de seus dias. Seu trabalho no campo da análise contribuiu muito para pavimentar o caminho para as grandes descobertas de Isaac Newton”, dessa forma acreditamos que o estudo detalhado da obra *Arithmetica Infinitorum* pode nos fornecer elementos para uma aprendizagem e também para o ensino de certos conceitos do Cálculo.

A fórmula hoje escrita como $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$, onde m é inteiro, foi concluída por meio de indução incompleta por Wallis, também é válida quando m é fracionário ou negativo, mas diferente de -1. “Nesse tratado muito lido, o autor incluiu sua própria abordagem característica da integral de kx^n , uma prova sugerida pela geometria dos indivisíveis de Cavalieri mas levada a efeito por uma aritmetização nítida do cálculo” (BOYER, 1992, p. 13). E, ainda sobre John Wallis “... ele foi um dos primeiros a aceitar expoentes fracionários e esteve a apenas um passo de conseguir representar graficamente os números complexos” (BOYER, 1992, p.41). As principais contribuições de Wallis ao Cálculo situam-se na teoria da integração (EVES, 2011) e ainda:

John Wallis, que nasceu em 1616, foi um dos matemáticos mais capazes e originais de seu tempo. Foi um escritor produtivo e original em muitos campos e, segundo consta, um dos primeiros a criar um sistema de ensino para surdos-mudos. Foi aluno de Oughtred e, de 1649 até sua morte em 1703, professor saviliano de geometria de Oxford. Fez uso sistemático das séries em análise, contribuindo muito nesse campo para abrir caminho para seu grande contemporâneo Isaac Newton. (EVES, 2011, p. 431).



Seus métodos, apesar de produzirem alguns questionamentos, geraram importantes descobertas. “Fermat com razão criticou a indução de Wallis. Pois não tem o rigor do método de indução completa que Fermat e Pascal frequentemente usavam” (BOYER, 1974, p. 279), porém Wallis foi um grande contribuidor para o desenvolvimento do Cálculo, o método de indução que ele utilizava em sua *Arithmetica Infinitorum*, apesar de “ingênuos” e incompletos, produziram resultados interessantes e muito importantes para a matemática apesar das limitações dos conhecimentos da época em comparação com os de hoje.

Considerações finais

Com base no que foi exposto, concluímos que esta obra foi de grande influência nas descobertas posteriores sobre os principais conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Procuramos analisar a abordagem apresentada pelo autor no sentido de verificar até que ponto esta poderá contribuir para o ensino de Cálculo nos dias de hoje. No nosso caso específico, verificamos apenas a presença de comentários a respeito da obra *Arithmetica Infinitorum* e de seu autor em dois livros clássicos de HM e também em um artigo específico sobre este tema o que não nos permite tirar conclusões definitivas sobre o assunto.

Ao analisar estas obras, percebemos certas características específicas deste autor que podem ser de grande utilidade ao estudar questões relativas ao ensino nos dias atuais como, por exemplo, o rigor característico do Cálculo que, para Wallis não era mais importante que a descoberta.

Sugere-se uma pesquisa mais aprofundada e com mais elementos a respeito do ensino da disciplina de Cálculo para que se tenham mais subsídios que possam contribuir para um ensino mais eficaz. Pois acreditamos que “é preciso que o professor esteja preparado para seu uso em sala de aula, caso contrário, essa estratégia não passará de mais uma frustrada tentativa de melhorar o ensino apenas com a inclusão de uma nova forma de instrução” (VIDAL, 2016, p. 4), o autor fala sobre a estratégia de se utilizar a HM como instrumento de motivação e também como ferramenta que pode sim contribuir para o ensino da Matemática, fato que também foi discutido neste trabalho.



Referências

BASTOS FILHO, J. B.; A história da ciên HISTÓRIA DA CIÊNCIA E A FILOSOFIA DA CIÊNCIA AJUDAM, ATRAPALHAM, OU SÃO IRRELEVANTES PARA O ENSINO DE FÍSICA? *In: Norte Ciência*, vol. 2, n. 2, p. 111-125. 2011.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

_____. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: Cálculo**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. V. 6.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. [ed.] Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, 2006. Vol. 2.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. PCNEM, 3. Brasília: Ministério da Educação; Secretaria da Educação Média e Tecnológica, 1999.

_____. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____. **Parecer CNE/CES 1.302/2001**. Estabelece as Diretrizes Curriculares para os cursos de Matemática. Brasília: 2001.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GARNICA, A. V. M.; SOUZA, L. A. **Elementos da história da Educação Matemática**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012.

LOPES, G. L. O.; MENDES, I. A. *Arithmetica Infinitorum* de Wallis: Cume da Trajetória Histórica do Infinitesimal. **Anais...** *In: XI Seminário Nacional de História da Matemática*. Natal: 2015. Disponível em: http://www.sbhmat.org/wa_files/C23.pdf. Acesso em: 15 jan. 2018.

MACENA, M. M. M. **Contribuições da investigação em sala de aula para uma aprendizagem das secções cônicas com significado**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2007.

MENDES, I. A. **Investigação histórica no ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológicas**. 2003. 468f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.



SILVA, C. M. S. Onde está a proporção? **Revista de História da Matemática para Professores**, Natal, ano 1, n. 1, mar. 2014. Natal: Editora da SBHMat, 2014.

VALENTE, W. R.; História da Educação Matemática: interrogações metodológicas. In: **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V2. 2, p.28-49, UFSC: 2007.

VIDAL, F. A.; A História da Matemática presente nos livros didáticos: uma análise sobre o conteúdo estatística. In: II Seminário Cearense de História da Matemática. **Anais...** Disponível em: https://drive.google.com/file/d/0B_Z20PM5ckRjWkdzX2V1Mmw2YzA/view. Acesso em: 15 jan. 2018.

WALLIS, J. **Arithmetica Infinitorum**. Oxford, 1656.