



EM TORNO DA DEMONSTRAÇÃO DE CANTOR SOBRE A EXISTÊNCIA DE NÚMEROS TRANSCENDENTES: uma possível atividade em sala de aula

AROUND CANTOR'S PROOF ABOUT TRANSCENDET NUMBERS EXISTENCE: a possible classroom activity

Daniel Felipe Neves Martins¹; Anderson Reis de Vargas²

RESUMO

Este artigo, cujas atividades foram construídas baseadas no texto Vorträge Über Ausgewählte Fragen Der Elementargeometrie Ausgearbeitet Von F. Tärget, 1895, de Félix Klein, é um resumo resultante de uma discussão junto a professores da Educação Básica que cursam o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) no Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro. Durante as aulas da disciplina Tópicos de História da Matemática, foi apresentada formalmente aos professores a definição de números irracionais transcendent, a demonstração da existência de tais números e o estudo teórico sobre a irracionalidade de π proposta por Cantor. Além disso, os estudantes tiveram a oportunidade de demonstrar a transcendência de um número irracional diferente do número de Liouville, mas muito parecido com exemplos que aparecem nos livros didáticos. De forma geral, eles puderam compreender um pouco mais sobre a evolução do pensamento matemático que envolve o tema e puderam criar atividades possíveis de serem apresentadas junto a professores de Matemática do Ensino Médio, trazidas nas linhas deste texto.

Palavras-chave: Irracionalidade de π , Números Transcendentes, Números de Liouville, Cantor.

ABSTRACT

This article, which activities are based on the text Vorträge Über Ausgewählte Fragen Der Elementargeometrie Ausgearbeitet Von F. Tärget, 1895, by Félix Klein, is a summary resulting from discussions with middle and upper school mathematics teachers who are Mathematics Master's students on a National Network Graduation Program for School Teachers in Brazil, at Colégio Pedro II, Rio de Janeiro. During Topics in the History of Mathematics classes, teachers were formally introduced to the definition of transcendent irrational numbers, the demonstration of the existence of such numbers and the study of the irrationality of π , proposed by Cantor. Furthermore, they had the opportunity to prove the transcendence of an irrational number which is different from Liouville's, but quite like some examples from High School textbooks. After that, the students were able to understand a little bit more about the evolution of mathematical

¹ Doutor em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Professor do Colégio Pedro II (CPII) / PMAT-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. Endereço para correspondência: Campo de São Cristóvão, 177, São Cristóvão, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, CEP: 20921-903. E-mail: daniel.martins.1@cp2.edu.br. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6131-237X>.

² Doutor em Matemática, pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Professor do Colégio Pedro II (CPII), Rio de Janeiro, RJ, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Marechal Floriano, 80, Centro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, CEP: 20080-001. E-mail: anderson.vargas.1@cp2.edu.br. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-1309-8994>.



thinking on the proposed topic and they could create activities that could be presented in between Brazilian High School Mathematics teachers.

Keywords: Irrationality of π , Transcendental Numbers, Liouville Numbers, Cantor.

Introdução

No campo dos números reais seus elementos podem ser classificados como números racionais ou números irracionais.

Os números racionais são aqueles que podem ser escritos na forma de uma razão entre dois números inteiros com divisor não nulo. São racionais os números inteiros, os decimais exatos, as dízimas periódicas simples e as dízimas periódicas compostas. Já os números irracionais são aqueles números reais que não são racionais. Eis aqui a primeira estranheza sobre a compreensão do que é um número irracional, e ela aparece pelo fato do número irracional ser comumente definido por aquilo que ele não é.

Segundo Niven (1984, p.30) um número racional, como definido acima, também pode ser chamado de fração ordinária e a palavra fração, sozinha, deve ser usada para designar qualquer expressão numérica ou algébrica que possua um numerador e um denominador. Assim, $\frac{\sqrt{2}}{3}$ é uma fração e representa um número irracional.

Na Educação Básica esta classificação é suficiente para as discussões que envolvem a Matemática Escolar. No entanto, ao avançarmos em direção a estudos mais específicos no campo da álgebra abstrata, vamos conhecendo novas classificações para números, pertencentes a estruturas mais particulares e complexas. Isso acontece, por exemplo, com os números chamados algébricos e com aqueles conhecidos por números transcendentais. Estes números satisfazem condições bem específicas a fim de que sejam assim classificados.

Considerando o conjunto dos números reais, tais números são chamados de algébricos quando são soluções de equações do tipo $a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x^1 + a_nx^0 = 0$, cujos coeficientes são números inteiros. Números racionais aparecem em um caso especial, quando $a_1x + a_2 = 0$, adverte Klein (1895). Outra categoria de números conhecida por conter os irracionais que não são algébricos é a dos números transcendentais. Estes são caracterizados por não serem raízes de equações algébricas com coeficientes inteiros.

Niven (1984, p.79) nos informa que alguns números algébricos são racionais e outros irracionais, porém, todos os números transcendentais são irracionais.



O que pretendemos com este artigo não é discutir definições, mas responder ao questionamento de um professor de Matemática das séries finais do Ensino Fundamental, aluno do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Colégio Pedro II, na disciplina Tópicos de História da Matemática, que ao tomar conhecimento da existência de duas categorias de números irracionais, perguntou: **Estes números transcendentos existem mesmo? Alguém provou esta existência? Para mim é tudo irracional!** E a partir de uma provocação, aproveitamos a oportunidade para conversar sobre um recorte da História da Álgebra no século XIX.

Números racionais e irracionais

Evocando o problema grego da medida, medir é sinônimo de comparar, e para comparar, há que se ter uma unidade padrão de medida para que seja possível determinar o número de vezes que esta unidade ‘cabe’ no objeto a ser medido. Por exemplo, um segmento de reta AB é dito ter 5cm de comprimento porque tomando-se um segmento unitário u , de medida 1cm como unidade padrão de medida de comprimento, este segmento cabe exatamente 5 vezes inteiras em AB.

Por vezes, subunidades da unidade padrão u podem/devem ser utilizadas, como é o caso de um segmento CD cuja medida é expressa por 17,23cm. A representação numérica desta medida nos informa que o segmento u , descrito anteriormente como uma possível unidade padrão de medida, cabe 17 vezes inteiras em CD e que este número de vezes é insuficiente para determinar a real medida de CD, uma vez que é necessário acrescentar $\frac{23}{100}$ de u a fim de terminarmos o processo comparativo entre a unidade e o todo que se quer medir. Ao pensarmos em subunidades de u , notamos que $\frac{1}{100}$ de u caberá 1723 vezes em CD. Note que esta subunidade cabe um número finito de vezes em CD e este número representa uma quantidade inteira de vezes. Assim, efetuando a medida de CD por comparação, temos que dado um ponto M no interior do segmento CD, segue que $CD = CM + MD$, onde $CM = 17u$ e $MD = \frac{23}{100}u$, permitindo-nos dizer que o segmento é passível de ser medido por comparação entre a unidade u e seus submúltiplos, isto é, este segmento é um segmento comensurável. Notemos que tomando $\frac{u}{10}$ como unidade de medida, esta unidade ‘cabe’ 172,3 vezes inteiras no segmento CD, e o que precisa ser registrado é que ao alterar a unidade de medida, esta passa a ser representada por outro



número, mas a comparação ainda pode ser estabelecida. Na linguagem dos campos numéricos, os números que representam medidas expressas por comparação são conhecidos por números racionais.

Ao tentarmos medir um segmento por comparação a uma unidade u , nem sempre o segmento de reta que se quer medir e a unidade u são comensuráveis. É o que acontece quando tomamos um quadrado ABCD, a unidade u de medida como sendo o próprio lado do quadrado e queremos determinar a medida de sua diagonal. Esta diagonal não terá sua medida expressa em função desta unidade de medida acrescida de um número finito/inteiro de frações de u . A demonstração de que a diagonal do quadrado de lado com medida dada por um número racional x , expressa por $x\sqrt{2}$, que é um número irracional, é bastante conhecida e o leitor poderá encontrá-la em diversos livros de aritmética, álgebra, análise ou História da Matemática, como em Lima (1993). Esta demonstração é geralmente atribuída a Hipaso de Metaponto (Metaponto, Sec. VI a.E.C. – Crotone, Sec. V a.E.C.).

A interpretação da existência de medidas não comensuráveis foi um choque para o mundo grego e para a escola Pitagórica, pois acreditava-se que tanto números naturais quanto razões entre eles representavam a essência última das coisas e que todas as medidas existentes eram expressas por tais números. Havia, então, uma necessidade de enfrentar a questão. Ainda pensando em possíveis classificações de subconjuntos dos números reais, podemos destacar aqueles que podem ser construídos por régua não graduada e compasso, e aqueles que são impossíveis de determinar graficamente a partir destes dois instrumentos, como é o caso do número π e da constante de Euler e , os irracionais mais conhecidos por alunos da Educação Básica.

Na prática, há uma infinidade de medidas expressas por números irracionais, porém esta infinidade é ‘maior’ do que a infinidade de medidas expressas por números racionais. Esta é uma segunda estranheza que descobrimos aos estudar os irracionais.

Também poderíamos dizer que $\frac{\sqrt{5}}{4}$, $\sqrt{7} + 3$, $5\sqrt{2}$ e $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ são exemplos de números irracionais, uma vez que é um teorema o seguinte enunciado: “Seja p um número irracional qualquer e r um número racional diferente de zero. Então a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão de p por r resultam em números irracionais, da mesma forma que p^{-1} e $-p$. também são irracionais.”



Em 1761, Johan Lambert (Moulhouse/França, 1728 – Berlim/Alemanha, 1777) provou a irracionalidade de π expandindo a função tangente $f(x) = tg(x)$ por meio de frações contínuas $f\left(\frac{\varphi}{\omega}\right) = \frac{\varphi}{\omega - \frac{\varphi\varphi}{3\omega - \frac{\varphi\varphi}{5\omega - \frac{\varphi\varphi}{7\omega - (\dots)}}}}$, mostrando que para todo racional não nulo

x , a imagem $f(x)$ é um número irracional (Carvalho, 2018).

Charles Hermite (Dieuze, 1822 – Paris, 1901) apresenta uma demonstração centrada na Análise Real, Análise Complexa, na Matemática Discreta e na Teoria dos Números, evidenciando os resíduos da função tangente exibida por Lambert, por frações contínuas. Hermite demonstra que π^2 é irracional e caracteriza π como o menor número real positivo cuja metade equivale a uma raiz da função $f(x) = \cos(x)$.

A matemática britânica Mary Cartwright (Aynho, 1900 – Cambridge, 1998) combina Teoria dos Polinômios, Matemática Discreta e elementos de Cálculo Integral, para demonstrar a irracionalidade de π de uma maneira mais simples que as apresentadas por Lambert e Hermite (Carvalho, 2018). Já a prova de Niven (Vancouver/Canadá, 1915 – Eugene/USA, 1999) traz como principal resultado o número π como sendo o menor zero positivo da função $f(x) = \sin(x)$. Para isso, usa elementos do Cálculo Integral e sua prova está mais próxima do resultado de Cartwright e, consequentemente, de Hermite. Ao admitir que π^2 é um número racional, Niven chega a uma contradição, ou seja, o número π^2 é irracional e, consequentemente, π é irracional. A demonstração envolve Teoria dos Polinômios e elementos de Cálculo Diferencial e Integral.

O tema continua fascinando muitos matemáticos e diferentes provas sobre a irracionalidade de π continuam surgindo, sendo algumas simples do ponto de vista das técnicas, e outras, elegantes e interessantes, como as demonstrações do grupo Bourbaki e de Miklòs Laczkovich. Esta última, presente no American Mathematical Monthly Journal, é muito conhecida por ser uma prova mais simplificada e completa da prova original apresentada por Lambert, envolvendo a função hipergeométrica e as funções de Bessel de primeiro tipo³ (Laczkovich, 1997).

³ As funções de Bessel compõem a generalização das funções que são soluções da equação diferencial $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2 y) = 0$, linearmente independentes, em que p é um número real que determina o índice da equação. Elas são classificadas como: funções do primeiro tipo, funções do segundo tipo, funções modificadas, funções de Hankel, funções de Bessel esféricas e funções de Hankel esféricas.



Números algébricos e transcendentos

Ao representar somente os números racionais como pontos da reta sabemos que estes pontos a preencherão densamente, ou seja, tomando um intervalo tão pequeno quanto se queira contendo estes pontos, haverá uma infinidade deles. No entanto, esta infinidade de números não preenche o intervalo de modo a torná-lo contínuo, isto é, não há uma bijeção entre todos os pontos da reta e todos os números racionais. Grosso modo, se tivermos a intenção de arrastarmos os pés sobre uma reta que tivesse pedras numeradas e ordenadas por números racionais, não conseguiríamos, pois haveria buracos. Além disso, esta quantidade de buracos é muito maior que a quantidade de pedras numeradas. Esta é uma terceira estranheza ao estudar os números irracionais.

Caso tenhamos a intenção de tensionar o debate acerca do tema, podemos nos perguntar se a totalidade dos números algébricos formam um contínuo ou se há também a necessidade de inserir uma série de outros números, os transcendentos? Poderiam tais números ser reconhecidos também por aqueles que completam os ‘buracos da reta’ que os números algébricos não conseguem cobrir?

Responder esta questão significa demonstrar a existência dos números transcendentos e tal feito foi realizado primeiramente pelo matemático francês Joseph Liouville (Sait-Omer, 1809 – Paris, 1882). Esta demonstração encontra-se em dois periódicos franceses, no *Comptes Rendus* de 1884 e no volume 16 do *Journal de Liouville*, de 1851. Baseado na teoria das frações contínuas, as argumentações levantadas e demonstrações feitas por Liouville deixaram o texto difícil de ser compreendido, porém, o resultado chamou a atenção da comunidade matemática. Em 1885, Karl Weierstrass generaliza a demonstração do teorema, passando este a ser conhecido por Teorema de Lindemann-Weierstrass (Weierstrass, 1885).

Georg Cantor (São Petersburgo/Rússia, 1845 – Halle an der Saale/Alemanha, 1918) publica em 1874, no volume 77 do *Journal de Crelle* (antigo *Journal de Liouville*), um artigo intitulado *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes reeller algebraischer Zahlen*⁴ (Cantor, 1874), no qual simplifica a demonstração de Liouville-Weierstrass, como comenta Felix Klein.

A demonstração repousa sobre o fato de que números algébricos formam massa contável e os transcendentos não. Com isso Cantor quer dizer que os primeiros

⁴ Sobre uma propriedade da teoria dos números reais algébricos (Tradução nossa).



podem ser arranjados em certa ordem de modo que cada um deles ocupe um lugar definido, seja numerado, por assim dizer. Esta proposição pode ser declarada como segue: a multiplicidade de números reais algébricos e de números inteiros positivos estão em bijeção. (Klein, 1956, p. 50. Tradução nossa⁵)

Mais tarde, em 1891, Cantor aprimora sua própria demonstração ao publicar o que hoje é comumente conhecido por argumento da diagonalização de Cantor (Cantor, 1892). Esta argumentação elucida didaticamente a não enumerabilidade do conjunto dos números reais, isto é, demonstra que existem conjuntos numéricos infinitos que não podem ser colocados em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais. Além disso, propriedades importantes e aparentemente contraditórias são justificadas, como o fato de um conjunto poder ter a mesma quantidade de elementos (cardinalidade) que um subconjunto de si próprio. Por exemplo, é possível estabelecer uma bijeção entre o conjunto dos números naturais e os números inteiros. Uma possível lei de formação para a bijeção procurada pode ser dada por

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ tal que } f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}; & \text{se } n \text{ é um número natural par} \\ -\frac{n+1}{2}; & \text{se } n \text{ é um número natural ímpar} \end{cases}.$$

Após a prova da existência dos números transcendentais, muitas demonstrações importantes do ponto de vista da álgebra que envolve os números transcendentais marcaram o século XIX, como as provas da transcendentalidade de π e de e .

A transcendência de π foi demonstrada pelo matemático alemão Ferdinand Von Lindemann⁶ (Hanover, 1852 – Munique, 1939) em 1882, ao mostrar que este número não é raiz de nenhum polinômio com coeficientes racionais. Esta demonstração é um aprimoramento das pesquisas de Charles Hermite (Dieuze, 1822 – Paris, 1901) quando

⁵ “The demonstration rests upon the fact that algebraic numbers form a countable mess, while transcendental numbers do not. By this Cantor means that the former can be arranged in a certain order so that each of them occupies a definite place, is numbered, so to speak. This proposition may be stated as follows: The manifoldness of positive integers can be brought into a one-to-one correspondence.” (Klein, 1956, p. 50)

⁶ Lindemann foi orientado por Felix Klein (Düsseldorf, 1849 - Göttingen, 1925) e orientador de David Hilbert (Königsberg, 1862 - Göttingen, 1943) o que justifica suas estreitas relações com a Análise Funcional, Álgebra e Teoria dos Números enquanto ramos do conhecimento matemático. Os três matemáticos são excelentes exemplos de pesquisadores considerados como estruturalistas. Seus trabalhos sempre apresentaram técnicas impecáveis de demonstrações, definindo e caracterizando os objetos matemáticos precisamente, além de evidenciar como os aspectos ontológicos de tais objetos devem ser compreendidos desde a base, até suas conexões com outros núcleos do conhecimento, em especial a própria Matemática.

Boletim Cearense de Educação e História da Matemática – Volume 13, Número 35, 1 – 15, 2026



apresentado como exemplo de número irracional. Será que algum professor se perguntou por que podemos afirmar esta irracionalidade e, agora, a possibilidade de demonstrar uma afirmativa ainda mais forte, a sua transcendência? Isso não ocorreu com o grupo que fez parte deste experimento, e partimos para a realização da atividade.

Vamos mostrar a transcendência do número

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k(k+1)} = 0,0100010000010000000100 \dots$$

Considere o número

$$\beta = \sum_{k=1}^j 10^{-k(k+1)} = \frac{t}{10^{j(j+1)}},$$

para inteiros j e t , com t dependendo de j . Observe que β coincide com α até a casa decimal de ordem $j(j+1)$, ou seja, é um número algébrico (decimal finito) muito próximo de α para j suficientemente grande. Logo, temos que

$$\alpha - \beta = \sum_{k=j+1}^{\infty} 10^{-k(k+1)} < \frac{2}{10^{(j+1)(j+2)}}.$$

Vamos supor que α seja algébrico, ou seja, satisfaz a seguinte equação

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0,$$

tal que

- (i) $f(x)$ tem coeficientes inteiros, isto é, c_i é inteiro para $i = 1, 2, \dots, n$;
- (ii) $f(\alpha) = 0$, isto é, α é raiz de $f(x)$;
- (iii) α não é raiz de nenhuma equação com coeficientes inteiros de grau menor do que n .

Lema 1: β não é raiz de $f(x)$.

Prova: Suponha que β seja raiz de $f(x)$. Então $f(\beta) = 0$, ou seja, existe um polinômio $q(x)$, com coeficientes inteiros e grau menor do que n , tal que $f(x) = (x - \beta)q(x)$ ⁸. Portanto, $f(\alpha) = (\alpha - \beta)q(\alpha)$. Mas, $f(\alpha) = 0$, ou seja, $(\alpha - \beta)q(\alpha) = 0$. Como, $\alpha - \beta \neq 0$, conclui-se que $q(\alpha) = 0$. No entanto, isso contradiz o item (iii) acima. Portanto, temos que $f(\beta) \neq 0$.

⁸ Este é um resultado bastante conhecido pelos professores de matemática da Educação Básica. Sua demonstração pode ser encontrada em Niven (1984, p.170).



Lema 2: Existe um número inteiro N , dependendo somente dos coeficientes de $f(x)$ e do seu grau n , tal que $|f(\alpha) - f(\beta)| < N(\alpha - \beta)$.

Prova: Observe que

$$|f(\alpha) - f(\beta)| = |c_n(\alpha^n - \beta^n) + c_{n-1}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \dots + c_2(\alpha^2 - \beta^2) + c_1(\alpha - \beta)|.$$

Pela desigualdade triangular, temos que

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \leq |c_n| \cdot |\alpha^n - \beta^n| + |c_{n-1}| \cdot |\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}| + \dots + |c_2| \cdot |\alpha^2 - \beta^2| + |c_1| \cdot |\alpha - \beta|.$$

Sabemos que, para k inteiro positivo, vale

$$|\alpha^k - \beta^k| = |\alpha - \beta| \cdot |\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{k-2} + \beta^{k-1}|.$$

Além disso, temos que $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$, ou seja $\alpha^r \beta^s < 1$, quaisquer que sejam os inteiros positivos r e s . Portanto,

$$|\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{k-2} + \beta^{k-1}| < 1 + 1 + \dots + 1 + 1 = k.$$

Dessa forma, segue que

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \leq (|c_n| \cdot n + |c_{n-1}| \cdot (n-1) + \dots + |c_2| \cdot 2 + |c_1|) \cdot |\alpha - \beta|.$$

Basta tomar $N = n \cdot |c_n| + (n-1) \cdot |c_{n-1}| + \dots + 2 \cdot |c_2| + |c_1|$ para que a prova esteja completa.

Lema 3: O número $|f(\alpha) - f(\beta)| \cdot 10^{nj(j+1)}$ é um inteiro positivo, qualquer que seja o valor atribuído a j .

Prova: Por hipótese, $\beta = \sum_{k=1}^j 10^{-k(k+1)} = \frac{t}{10^{j(j+1)}}$, para algum inteiro t dependente de j . Logo,

$$\begin{aligned} f(\beta) &= c_n \beta^n + c_{n-1} \beta^{n-1} + \dots + c_1 \beta + c_0 \\ &= \frac{c_n t^n}{10^{nj(j+1)}} + \frac{c_{n-1} t^{n-1}}{10^{(n-1)j(j+1)}} + \dots + \frac{c_1 t}{10^{j(j+1)}} + c_0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(\beta) \cdot 10^{nj(j+1)} &= c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} \cdot 10^{j(j+1)} + \dots + c_1 t \cdot 10^{(n-1)j(j+1)} + c_0 \cdot 10^{nj(j+1)}. \end{aligned}$$

Note que o segundo termo é um inteiro, pois t e os coeficiente são inteiros. Além disso, é diferente de zero pelo Lema 1. Portanto, $|f(\alpha) - f(\beta)| \cdot 10^{nj(j+1)} = |-f(\beta)| \cdot$



$10^{nj(j+1)}$ é um inteiro positivo.

Observe que, pelo Lema 2, temos que $|f(\alpha) - f(\beta)| \cdot 10^{nj(j+1)} < N|\alpha - \beta| \cdot 10^{nj(j+1)}$.

Assim, da desigualdade $\alpha - \beta < 2 \cdot 10^{-(j+1)(j+2)}$, segue que

$$\begin{aligned} |f(\alpha) - f(\beta)| \cdot 10^{nj(j+1)} &< 2N \cdot 10^{nj(j+1)} \cdot 10^{-(j+1)(j+2)} \\ &= 2N \cdot 10^{-2n(j+1)} = \frac{2N \cdot 10^{2n}}{10^{j+1}}. \end{aligned}$$

Note que N e n são inteiros fixos, ou seja, podemos tomar j suficientemente grande de forma que

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \cdot 10^{nj(j+1)} < \frac{2N \cdot 10^{2n}}{10^{j+1}} < 1.$$

Entretanto, esta cota superior contradiz o Lema 3. Consequentemente, a suposição de que α é algébrico não pode ser verdadeira e temos provado que o número α é transcendente.

Mas, estavam os professores convencidos da existência dos números transcendentos?

A atividade construída em sala de aula não provou a existência dos números transcendentos de maneira formal no quadro, através de uma aula tradicional como as ministradas nos cursos universitários, mas recorreu à existência de uma classe numérica conhecida por Números de Liouville, elegendo um candidato a número transcendente e comprovando sua pertinência ao conjunto dos números irracionais transcendentos.

Decidir se o número é ou não transcendente a partir de uma atividade presente num material didático que forma professores, é o que tornou a discussão rica em sala de aula e incentivou os alunos a lerem a demonstração de Cantor de uma maneira crítica.

A leitura foi feita como complementação dos estudos teóricos e como possibilidade de aquisição de capital cultural matemático para o professor. Lançar mão da História da Matemática como metodologia para a compreensão da gênese de um conceito e de ideias contidas no universo matemático dos professores aproxima o professor da Educação Básica de assuntos complexos presentes nas entrelinhas de conteúdos que vão ensinar. Foi então, iniciado um momento de leitura do texto conclusivo



de Felix Klein, onde todas as ideias contidas no documento foram reconhecidas pelos professores como ideias que já haviam sido estudadas em sala de aula.

Compreender que o *continuum* de valores numéricos representados por uma porção do eixo das abscissas, tão pequeno quanto se queira, possui uma potência maior que qualquer outra massa contável de números (Klein, 1956), é afirmar a existência dos números transcendentos. Este foi um momento de maturidade do grupo e permitiu acompanhar a demonstração do teorema, a partir da construção de uma tabela de números algébricos investigando as raízes reais de todas as equações algébricas da forma $a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \dots + a_{n-1}\omega^1 + a_n = 0$, irreduzível, com todos os coeficientes primos entre si e a_0 positivo, técnica usada por Cantor.

Figura 1 – Obtenção dos transcendentos pelo comprimento de Cantor

52 FAMOUS PROBLEMS.

N	n	$ a_0 $	$ a_1 $	$ a_2 $	$ a_3 $	$ a_4 $	EQUATION.	$\phi(N)$	ROOTS.
1	1	1	0				$x = 0$	1	0
	2	0	0	0			—		
2	1	2	0				—	2	-1 +1
		1	1				$x \pm 1 = 0$		
	2	1	0	0			—		
3	1	3	0				—	4	-2 - $\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{2}$ +2
		2	1				$2x \pm 1 = 0$		
		1	2				$x \pm 2 = 0$		
	2	2	0	0			—		
		1	1	0			—		
		1	0	1			—		
	3	1	0	0	0		—		
4	1	4	0				—	12	-3 -1.61803 -1.41421 -0.70711 -0.61803 -0.33333 +0.33333 +0.61803 +0.70711 +1.41421 +1.61803 +3
		3	1				$3x \pm 1 = 0$		
		2	2				—		
		1	3				$x \pm 3 = 0$		
	2	3	0	0			—		
		2	1	0			—		
		2	0	1			$2x^2 - 1 = 0$		
		1	2	0			—		
		1	1	1			$x^2 \pm x - 1 = 0$		
		1	0	2			$x^2 - 2 = 0$		
	3	2	0	0	0		—		
		1	1	0	0		—		
		1	0	1	0		—		
		1	0	0	1		—		
	4	1	0	0	0	0	—		



Fonte: Klein, 1956, p.52.

O número $N = (n - 1) + |a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$, em que $|a_i|$ representa o valor absoluto de a_i , é denominado por comprimento de Cantor. Klein (1956, p.51), ao apresentar o argumento usado por Cantor na demonstração da existência dos transcendentais, comenta que para um N dado, haverá um número finito de equações algébricas associadas a N . Além disso, existe um número natural n , tal que N é igual a $n - 1$ acrescido de um número positivo. Assim, a diferença $N - (n - 1)$ tem como resultado uma soma finita de números primos entre si que define uma quantidade (massa) finita de números algébricos, $\phi(N)$.

A tabela da Figura 1 mostra como números algébricos ω foram obtidos a partir de N . Dentre as equações obtidas, as redutíveis são descartadas. Os números algébricos são ordenados de acordo com seu comprimento de Cantor N . Compreender como organizá-los é compreender que tais números são contáveis, como mostra a contagem desses números algébricos por $\phi(N)$. Tal contagem aparece na tabela da Figura 1 nos valores de $\phi(1)$, $\phi(2)$, $\phi(3)$ e $\phi(4)$.

Considerações finais

Em uma pequena enquete junto aos alunos que participaram da atividade que relatamos neste artigo, a maior curiosidade foi o fato de que todos afirmaram terem cursado a disciplina História da Matemática de maneira factual e padrão, mesmo estando em instituições de ensino diversas.

Os relatos contam que os cursos seguiram ementas extremamente semelhantes, duas indicações bibliográficas exatamente iguais e que as temáticas destacadas foram as mesmas, variando um pouco quanto à abordagem dada aos séculos XVI e XVII. A maioria dos alunos não chegou a estudar aspectos do século XX, parando na primeira metade do século XIX, sem muito aprofundamento.

Nenhum aluno do curso havia tido acesso a fontes primárias ou secundárias em relação à temática deste artigo ou a qualquer outra de caráter matemático, o que tornou evidente que para este grupo, estudar resultados matemáticos usando a História da Matemática como metodologia foi uma novidade. O desconhecimento dos alunos ao fazer o uso e a leitura de documentos históricos, em não saber classificar as fontes de pesquisa



ou mesmo não ter o hábito de contextualizar o período histórico no qual o desenrolar da temática abordada estava inserido, tornou-se num primeiro momento um impeditivo para a compreensão de que matemática é feita em colaboração. Isso ficou claro ao comparar os trabalhos de Lambert, Hermite, Liouville e Cartwright.

Dar ao professor em formação continuada a oportunidade de ampliação do capital cultural através da História da Matemática permite que este profissional compreenda, de maneira mais ampla, como a Matemática é construída e que ela não é resultado da produção de uma única mente ou o desenvolvimento de uma única ideia em um único lugar. Além disso, perceber que toda a temática contida nas grades curriculares da Matemática Escolar possui uma raiz profunda, potencializa o trabalho do professor, pois permite que este apresente as diversas conexões que um dado tema possui com um tema central. Neste caso, as ideias contidas neste texto extrapolam a ideia intuitiva de número, classificação, ordenação e contagem, para atingir um patamar de abstração e rigor matemáticos de altíssimo nível.

Usar as técnicas de rodas de conversa e de leituras em grupo propostas aos alunos auxiliou muito a compreensão do texto matemático e proporcionou novas reflexões sobre a temática, permitindo o vislumbre de outras possibilidades de pesquisa na área de História da Matemática e no Ensino, além de aproximar o professor de matemática de uma Matemática que muitas vezes é vista como inacessível.

Referências

CANTOR, Georg. Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. **Journal für die Reine und Angewandte Mathematik (Journal de Crelle)**, v. 77, pp 258-62, 1874. Disponível em: <https://www.jamesmeyer.com/pdfs/cantor-1874-ueber-eine-eigenschaft-des-inbegriffes.pdf> >. Acesso em: 3 fev. 2025.

CANTOR, Georg. **Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.** Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1890–1891. V, 1, pp. 75–78, 1892. Disponível em: https://web.archive.org/web/20160528133848/http://gdz-lucene.tc.sub.uni-goettingen.de/gcs/gcs?action=pdf&metsFile=PPN37721857X_0001&divID=LOG_0001&pagesize=original&pdfTitlePage=http%3A%2F%2Fgdz.sub.uni-goettingen.de%2Fdms%2Fload%2Fpdf%2Ftitle%2F%3FmetsFile%3DPPN37721857X_0001%7C&targetFileName=PPN37721857X_0001_LOG_0001.pdf& >. Acesso em: 3 fev. 2025.



CARVALHO, Wagner Wilson Pereira de. **Números transcendentos**. 2018. 49 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, João Pessoa, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/16845/1/Arquivototal.pdf>>. Acesso em: 3 fev. 2025.

KLEIN, Felix. **Famous Problems of Elementary Geometry**. 1 ed. Dover Publications INC, 1956.

KLEIN, Felix. Vorträge über Ausgewählte Fragen der Elementargeometrie Ausgearbeitet von F. Target. Eine Festschrift zu den Pfingsten 1895 in Göttingen stattfindenden dritten Versammlung des Vereins zur Förderung des Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterrichts. In: **Digital Collection of University of Michigan Historical Math Collection**. 1895. Disponível em: <<https://quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/ACV2370.0001.001?rgn=main;view=fulltext>>. Acesso em: 3 fev. 2025.

LACZKOVICH, Miklós. On Lambert's Proof of the Irrationality of π . **The American Mathematical Monthly (JSTOR)**, v. 104, n. 5, pp. 439–43, 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/2974737>>. Acesso em: 3 fev. 2025.

LIMA, Elon Lages. Curso de Análise, v.1. Rio de Janeiro: Editora Projeto Euclides, 1993.

LINDEMANN, Ferdinand Von. Ueber die Zahl π . **Mathematische Annalen**, v. 20, 213-225, 1882. Disponível em: <https://www.digizeitschriften.de/id/235181684_0020%7Clog31?tify=%7B%22view%22:%22info%22,%22pages%22:%5B1%5D%7D>. Acesso em: 3 fev. 2025.

NIVEN, Ivan Morton. **Números: racionais e irracionais**. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

WEIERSTRASS, Karl. **Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen**. Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. n.2, pp. 633-639, 1885. Disponível em: <<https://www.cambridge.org/core/books/abs/mathematische-werke/uber-die-analytische-darstellbarkeit-sogenannter-willkurlicher-functionen-reeller-argumente/8C407E36F74E4257BF4A9A19CA661B93#access-block>>. Acesso em: 3 fev. 2025.

Recebido em: 16 / 02 / 2025
Aprovado em: 24 / 10 / 2025