SEQUÊNCIA GENERALIZADA DE FIBONACCI E RELAÇÕES COM O NÚMERO ÁUREO

***Francisco Regis Vieira Alves*[1]**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará

RESUMO
Neste trabalho apresentamos modelos que generalizam a noção de Sequência de Fibonacci – SF. Neste sentido, com origem numa argumentação recorrente de um curso de graduação, que adota o modelo de produção de coelhos imortais, temos a possibilidade de identificar propriedades generalizadoras vinculadas com a noção de Sequência Generalizada de Fibonacci – SGF, bem como, possibilidades de obtenção do número de ouro e suas variantes.

Palavras-Chave: Fibonacci; Sequência de Fibonacci; Sequência Generalizada de Figonacci.

Introdução

De modo tradicional, os livros de História da Matemática – HM definem a seguinte sequência recursiva indicada por $\{f_n\}_{n\in IN}$ e descrita do seguinte modo $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, para $n > 2$. Por outro lado, a mesma formula pode ainda ser expressa por $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, para a condição $n > 1$. O aspecto marcante de recursividade diz respeito aos dois termos antecessores. Por outro lado, podemos avaliar, na primeira fórmula, que: $n = 1 \therefore f_1 = f_0 + f_{-1}$. Dai, poderemos ainda obter que $f_{-1} = f_1 - f_0$, todavia, não conhecemos ainda os valores numéricos correspondentes aos termos indicados por f_0 e f_{-1}. Seguindo o mesmo raciocínio, escreveremos $n = 2 \therefore f_2 = f_1 + f_0$ e, dai, inferimos que $f_0 = f_2 - f_1$. Sabemos que uma *sequência* em IR é definida por $\begin{matrix} x_n : N \to N \\ n \mapsto x_n \end{matrix}$. De modo particular, definimos a seguinte sequência descrita de modo recursivo, caracterizada por:

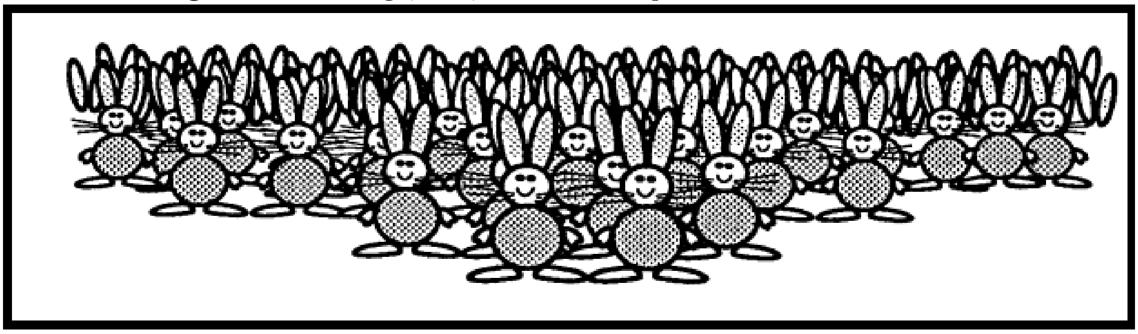
$$(f_N)_{n\epsilon N} : (1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; 377; \dots) \ (*).$$

Tal sequência é chamada de *Sequência de Fibonacci* - SF. O termo Fibonacci é a abreviação de filho de Bonaccio, seu pai, como explica Dunlap. Posamentier &

[1] fregis@ifce.edu.br.

Lehmann (2007, p. 22) comentam que "Fibonacci acumulou experiência nos campo da Aritmética e da Álgebra, a partir das viagens que realizou na Europa", entretanto, apesar de ter desenvolvido vários trabalhos nestes campos da Matemática, Leonardo de Pisa é lembrado geralmente em razão do seu problema que descreve "a reprodução dos coelhos imortais" (GULLBERG, 1997; WELLS, 2005. p. 101), como indicamos abaixo.

Figura 1 - Gullberg (1997) descreve a sequência de coelhos imortais.



Fonte: Gullberg (1997, p. 286).

Domingues (1991, p. 74) explica que, "provavelmente, para amenizar leitura do Livro do Ábaco, ou torná-la mais interessante", Fibonacci incluiu no livro alguns problemas curiosos e estimulantes, dentre os quais, um veio a se tornar especial: "Um homem põe um casal de coelhos dentro de um cercado. Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, se a natureza desses coelhos é tal que a cada mês um casal gera um novo casal, que se torna produtivo a partir do segundo mês?".

O questionamento anterior é recorrente e bem divulgado num contexto de cultura de graduação em Matemática, não obstante, a noção e propriedades que buscaremos discutir, nomeada de Sequência Generalizada de Fibonacci – SGF, ainda não ocupa seu devido lugar de destaque. Dessa maneira, na próxima seção, trazemos ao conhecimento do leitor, outras sequências recursivas. Em alguns de nossos trabalhos (ALVES & BORGES NETO, 2011; ALVES, 2013; 2015), discutimos a generalização do modelo $(f_N)_{n \in N}$ que envolve sua definição no campo dos inteiros. Torna-se natural, então, conjecturarmos que relações podemos obter, na medida em que aumentamos a quantidade de termos antecedentes, com o intuito de definir/descrever outras sequências lineares recursivas, semelhantemente ao caso da SF.

A sequência de Fibonacci e a Tribonacci

DOI: 10.30938/bocehm.v2i6.15

Sem mais delongas, a partir da fórmula de recursividade conhecida, sabemos que: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \therefore \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n}$. Seguindo um raciocínio semelhante ao que encontramos em Koshy (2011, p. 240), conjecturamos o comportamento de convergência dos quocientes do tipo $\frac{f_{n+1}}{f_n} > 0$. Desse modo, estabelecemos ainda que:

$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} \leftrightarrow \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{f_n / f_{n-1}}$. Ora, chamando $x_{n+1} := \frac{f_{n+1}}{f_n} \rightarrow x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}$ e determinamos a seguinte equação $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ e, passando o limite, escreveremos ainda que: $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = 1 + \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} x_n} \therefore x = 1 + \frac{1}{x} \leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$. Koshy (2011, p. 240) declara o fato conhecido nos livros de História da Matemática que, a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$ fornece, justamente, o número de ouro, que é expresso por $\phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

De acordo com a definição, escrevemos: $p_{n=1} = p_n + p_{n-1} + p_{n-2} \leftrightarrow \left(\frac{p_{n+1}}{p_{n-1}}\right) = \frac{p_n}{p_{n-1}} + 1 + \frac{p_{n-2}}{p_{n-1}}$. E, seguida, semelhantemente ao expediente usado em Feinberg (1963, p. 72 – 73), definimos: $\frac{p_{n+1}}{p_n} = t_n; \frac{p_n}{p_{n-1}} = t_{n-1}; \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = t_{n-2}$. Daí, teremos ainda que $\frac{p_{n+1}}{p_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{p_{n-1}} \cdot \frac{p_n}{p_n} = \frac{p_{n+1}}{p_n} \cdot \frac{p_n}{p_{n-1}} = t_n \cdot t_{n-1}$. Desse modo, estabelecemos: $t_n \cdot t_{n-1} = t_{n-1} + 1 + \frac{1}{t_{n-2}} \leftrightarrow t_n = 1 + \frac{1}{t_{n-1}} + \frac{1}{t_{n-1} \cdot t_{n-2}}$. Feinberg (1963, p. 73) admite a convergência da sequência há pouco definida por $\{t_n\}_{n\in IN}$ digamos, para um valor ‘x’, então concluímos: $t_n = 1 + \frac{1}{t_{n-1}} + \frac{1}{t_{n-1} \cdot t_{n-2}} \rightarrow x = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \leftrightarrow x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Portanto, encontramos uma equação semelhante ao caso da SF mas, no primeiro caso, encontramos um valor positivo que, na literatura de um curso de graduação, é nominado de número de ouro. Por outro lado, com origem nas fórmulas de Cardano, podemos expressar a raiz real da equação $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, da seguinte forma

$\phi_3 = \left(1+\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}\right)\Big/3 = 1.839286755214... \in IR$. Pelo que vimos, o número ϕ_3 possui propriedades semelhantes ao número de ouro, originado de uma equação.

A SEQUÊNCIA DE TETRANACCI, PENTANACCI, HEXABONACCI E ETC...

No caso de uma sequência recorrente definida por $q_n = q_{n-1} + q_{n-2} + q_{n-3} + q_{n-4}, n \geq 4$, repetiremos o argumento de Feinberg (1963). Neste sentido, escrevemos: $q_n = q_{n-1} + q_{n-2} + q_{n-3} + q_{n-4} \leftrightarrow \frac{q_n}{q_{n-3}} = \frac{q_{n-1}}{q_{n-3}} + \frac{q_{n-2}}{q_{n-3}} + 1 + \frac{q_{n-4}}{q_{n-3}}$. Podemos ainda escrever: $\frac{q_n}{q_{n-3}} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-2}} \cdot \frac{q_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} \cdot \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-3}} = \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \cdot \frac{q_{n-2}}{q_{n-3}} + \frac{q_{n-2}}{q_{n-3}} + 1 + \frac{1}{\frac{q_{n-3}}{q_{n-4}}}$. Nestas expressões, vamos assumir que: $t_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}, t_{n-1} = \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}, t_{n-2} = \frac{q_{n-2}}{q_{n-3}}$ e reescrevemos: $t_n \cdot t_{n-1} \cdot t_{n-2} = t_{n-1} \cdot t_{n-2} + t_{n-2} + 1 + \frac{1}{t_{n-3}}$. Mais uma vez, Feinberg (1963, p. 74) comenta que o quociente acima, obtido a partir da sequência $(q_n)_{n\in IN}$, apresenta um comportamento de convergência, semelhante ao caso encontrado com a SF. Feinberg indica o seguinte valor real $1{,}9275619\ldots$. Ora, podemos considerar $\lim_{n\to+\infty} t_n = t \therefore \lim_{n\to+\infty}(t_n \cdot t_{n-1} \cdot t_{n-2}) = \lim_{n\to+\infty}\left(t_{n-1} \cdot t_{n-2} + t_{n-2} + 1 + \frac{1}{t_{n-3}}\right)$ e, efetuando as passagens operacionais com limite, inferimos que: $t^3 = t^2 + t^2 + 1 + \frac{1}{t} \leftrightarrow t^4 - t^3 - t^2 - t - 1 = 0$. Assim, encontramos mais uma vez a seguinte equação polinomial $x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ relacionada com a sequência recursiva, definida a partir de seus quatros termos antecedentes, que possui como uma das raízes reais, o número indicado por ϕ_4.

Vamos, agora, expressar a seguinte relação analítica $r_n = r_{n-1} + r_{n-2} + r_{n-3} + r_{n-4} + \mathrm{r}_{n-5} \therefore \frac{r_n}{r_{n-4}} = \frac{r_{n-1}}{r_{n-4}} + \frac{r_{n-2}}{r_{n-4}} + \frac{r_{n-3}}{r_{n-4}} + 1 + \frac{r_{n-5}}{r_{n-4}}$. Segue ainda que:

$$\frac{r_n}{r_{n-4}} \cdot \frac{r_{n-3}}{r_{n-3}} \cdot \frac{r_{n-2}}{r_{n-2}} \cdot \frac{r_{n-1}}{r_{n-1}} = \frac{r_n}{r_{n-1}} \cdot \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \cdot \frac{r_{n-2}}{r_{n-3}} \cdot \frac{r_{n-3}}{r_{n-4}} = \frac{r_{n-1}}{r_{n-4}} \cdot \frac{r_{n-2}}{r_{n-2}} \cdot \frac{r_{n-3}}{r_{n-3}} + \frac{r_{n-2}}{r_{n-4}} \cdot \frac{r_{n-3}}{r_{n-3}} + \frac{r_{n-3}}{r_{n-4}} + 1 + \frac{1}{\frac{r_{n-4}}{r_{n-5}}} \therefore$$

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} \cdot \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \cdot \frac{r_{n-2}}{r_{n-3}} \cdot \frac{r_{n-3}}{r_{n-4}} = \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \cdot \frac{r_{n-2}}{r_{n-3}} \cdot \frac{r_{n-3}}{r_{n-4}} + \frac{r_{n-2}}{r_{n-3}} \cdot \frac{r_{n-3}}{r_{n-4}} + \frac{r_{n-3}}{r_{n-4}} + 1 + \frac{1}{\frac{r_{n-4}}{r_{n-5}}}.$$ Neste ponto,

repetimos o seguinte procedimento: $q_n := \frac{r_n}{r_{n-1}}; \mathrm{q}_{n-1} := \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}; q_{n-2} := \frac{r_{n-2}}{r_{n-3}}; q_{n-3} := \frac{r_{n-3}}{r_{n-4}}$ o que resulta em: $q_n \cdot q_{n-1} \cdot q_{n-2} \cdot q_{n-3} = q_{n-1} \cdot q_{n-2} \cdot q_{n-3} + q_{n-2} \cdot q_{n-3} + q_{n-3} + 1 + \frac{1}{q_{n-4}}$. Para finalizar, assumindo que a convergência da sequência definida pelos quocientes anteriores, escrevemos:

$$\lim_{n\to+\infty} q_n = q \therefore \lim_{n\to+\infty} \left(q_n \cdot q_{n-1} \cdot q_{n-2} \cdot q_{n-3}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(q_{n-1} \cdot q_{n-2} \cdot q_{n-3} + q_{n-2} \cdot q_{n-3} + q_{n-3} + 1 + \frac{1}{q_{n-4}}\right).$$

Obteremos, pois, que: $q^4 = q^3 + q^2 + q + 1 + \frac{1}{q} \leftrightarrow q^5 - q^4 - q^3 - q^2 - q - 1 = 0$. Para concluir, vamos considerar a seguinte sequência recursiva $s_n = s_{n-1} + s_{n-2} + s_{n-3} + s_{n-4} + s_{n-5} + s_{n-6}$, para $n \geq 6$. Repetiremos, pois, o processo anterior, escrevendo:

$$\frac{s_n}{s_{n-5}} = \frac{s_{n-1}}{s_{n-5}} + \frac{s_{n-2}}{s_{n-5}} + \frac{s_{n-3}}{s_{n-5}} + \frac{s_{n-4}}{s_{n-5}} + 1 + \frac{s_{n-6}}{s_{n-5}} \therefore \frac{s_n}{s_{n-5}} \cdot \frac{s_{n-4}}{s_{n-4}} \cdot \frac{s_{n-3}}{s_{n-3}} \cdot \frac{s_{n-2}}{s_{n-2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{s_{n-1}} = \frac{s_{n-1}}{s_{n-5}} + \frac{s_{n-2}}{s_{n-5}} + \frac{s_{n-3}}{s_{n-5}} + \frac{s_{n-4}}{s_{n-5}} + 1 + \frac{s_{n-6}}{s_{n-5}}$$

Em seguida, reescrevemos: $\frac{s_n}{s_{n-1}} \cdot \frac{s_{n-1}}{s_{n-2}} \cdot \frac{s_{n-2}}{s_{n-3}} \cdot \frac{s_{n-3}}{s_{n-4}} \cdot \frac{s_{n-4}}{s_{n-5}} = \frac{s_{n-1}}{s_{n-5}} + \frac{s_{n-2}}{s_{n-5}} + \frac{s_{n-3}}{s_{n-5}} + \frac{s_{n-4}}{s_{n-5}} + 1 + \frac{1}{\frac{s_{n-5}}{s_{n-6}}}$.

Mais uma vez, adotamos a substituição: $h_n = \frac{s_n}{s_{n-1}}; h_{n-1} = \frac{s_{n-1}}{s_{n-2}}; h_{n-2} = \frac{s_{n-2}}{s_{n-3}}; h_{n-3} = \frac{s_{n-3}}{s_{n-4}}; h_{n-4} = \frac{s_{n-4}}{s_{n-5}}$ o que conduz a nova igualdade: $h_n \cdot h_{n-1} \cdot h_{n-2} \cdot h_{n-3} \cdot h_{n-4} = h_{n-1} \cdot h_{n-2} \cdot h_{n-3} \cdot h_{n-4} + h_{n-2} \cdot h_{n-3} \cdot h_{n-4} + h_{n-3} \cdot h_{n-4} + 1 + \frac{1}{h_{n-5}}$.

Ora, com arrimo nos argumentos anteriores, encontramos a seguinte equação $h^6 - h^5 - h^4 - h^3 - h^2 - h - 1 = 0$ que possui, como umas das raízes reais positivas, o número

ϕ_6. Encerramos a presente seção assinalando que as últimas argumentações, de modo geral, são desconsideradas e não pormenorizadas por autores de livros de História.

Considerações finais

Na seção anterior, de acordo com referências especializadas e pouco divulgadas no *locus* acadêmico (VOROBE´V, 1974), discutimos propriedades relacionadas com as sequências de *tribonacci*, *tetranacci*, *pentanacci* e *hexabonacci*. Ora, com arrimo nos argumentos anteriores, podemos conjecturar a existência de outras propriedades originadas da SF e adquirir um entendimento da evolução histórica de um modelo que se mostra indene aos efeitos temporais, séculos e séculos após sua proposição. Apresentamos, pois, equações polinomiais que resultam no número de ouro ϕ, bem como outros números derivados, que denotaremos por $\phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \ldots, \phi_n, \ldots$ (FENG, 2011).

Referências

ALVES, F.R.V. Sobre a evolução histórica do modelo de Fibonacci: a classe das funções hiperbólicas de Fibonacci. **Revista Vydia Educação**. v. 35, nº , 133 – 148, 2015. [online] < http://periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA>.

ALVES, F.R.V. Uma discussão de artigos envolvendo propriedades da Sequência de Fibonacci apoiada na Tecnologia. **Anais do VI HTEM**. 1 – 17, 2013. [online] <http://htem2013.dm.ufscar.br/anais/anais_do_vi_htem_ufscar_2013.html>

ALVES, F.R.V; BORGES NETO, H. A existência de sequência de Fibonacci no campo dos inteiros: uma atividade de investigação apoiada nos pressupostos da Sequência Fedathi. **BOLETIM GEPEM**. nº 59, 135 – 140, 2011. [online] <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=647>

DOMINGUES. Hygino. H. **Fundamentos de Artimética**. São Paulo: Editora Atual, 1991.

FEINBERG, M. Fibonacci-Tribonacci. **The Fibonacci Quartely**. v. 1, nº 3, October, 209 – 222. 1963. [online] < http://www.fq.math.ca/Scanned/1-3/feinberg.pdf>

FENG, J. More identities on the Fibonacci Numbers. **Ars Combinatoria**. nº 100, 73 – 78, 2011.

GULLBERG, Jan. **Mathematics: from the birth of numbers**. New York: W. W. Norton & Company, 1997.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers with Applications**. New York: John Wiley and Sons, 2011.

POSAMENTIER, Alfred. S. & LEHMANN, Ingmar. **The fabulous fibonacci numbers**. New York Prometeus Book. 2007.

VOROBE´V, N. N. **Números de Fibonacci**. Leciones Populares de Matemática. Moscou: Editora MIR, 1974.

WELLS, David. **Prime Numbers: the mysterious figures in the Math**. New Jersey: John Wiley and Sons. Inc. 2005.