BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

e-ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v12i34.13782

SIMULAÇÕES E APLICAÇÕES COMO AGENTES FACILITADORES NO ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

SIMULATIONS AND APPLICATIONS AS FACILITATORS IN TEACHING OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Murilo Carvalho Feitosa[1]; Francisco Wagner Soares Oliveira[2],
Otávio Floriano Paulino[3]

RESUMO

As equações diferenciais são aplicadas na resolução de problemas de diversas áreas e sua compreensão é relevante na modelagem de vários fenômenos. Tendo em vista a aplicabilidade destas equações, é proposta uma sequência de ensino investigativa, em que o percurso é iniciado pela apresentação de situações que envolvam a aplicação do conteúdo. Simuladores de circuitos elétricos e de movimento harmônico são usados para trabalhar aplicações sugeridas e construir a equação diferencial que modela a situação problema. De posse dos modelos, as técnicas de resolução de equações diferenciais lineares de primeira e segunda ordem são apresentas retomando os conhecimentos de disciplinas de cálculo diferencial e integral vistas em semestres anteriores. Os resultados apontam para uma aprendizagem interdisciplinar, em que os discentes compreenderam os métodos de resolução, bem como os princípios que regem os modelos trabalhados. Dessa forma, pode-se dizer que as aplicações foram norteadoras da motivação, enquanto os simuladores foram grandes aliados na promoção da interatividade entre os envolvidos no processo de ensino de equações diferenciais.

Palavras-chave: Objetos de aprendizagem; Sequência de ensino investigativa; Modelagem; Resolução de equações.

ABSTRACT

Differential equations are applied in solving of problems in different areas and their understanding is relevant in modeling of various phenomena. In view of the applicability of these equations, an investigative teaching sequence is proposed, in which the path is initiated by the presentation of situations involving the application of the content. Simulators of electrical circuits and harmonic

[1] Bacharel em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA). Endereço para correspondência: BR 226, Km 405, Alto do São Geraldo, Pau dos Ferros, Rio Grande do Norte, Brasil, CEP: 59900-000. E-mail: murilocfeitosa@gmail.com.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-1163-8838.

[2] Doutorado em Educação pela Universidade Estadual do Ceará (UECE). Professor do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos (FAFIDAM/UECE), Limoeiro do Norte, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Dom Aureliano Matos, 2058, Centro, Limoeiro do Norte, Ceará, Brasil, CEP: 62930-000. E-mail: wagneruece.oliveira@uece.br.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9296-8200.

[3] Doutorado em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professor Associado na Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA), Pau dos Ferros, Rio Grande do Norte, Brasil. Endereço para correspondência: BR 226, Km 405, Alto do São Geraldo, Pau dos Ferros, Rio Grande do Norte, Brasil, CEP: 59900-000. E-mail: otavio.paulino@ufersa.edu.br.

ORCID iD: https://orcid.org/ 0000-0001-5237-3392.

motion are used to work on suggested applications and build the differential equation that models the problem situation. With the models in hand, the techniques for solving linear differential equations of first and second order are presented, resuming the knowledge of the disciplines of differential and integral calculus seen in previous semesters. The results point to an interdisciplinary learning, in which the students understood the methods of resolution, as well as the principles that govern the worked models. Thus, it can be said that the applications were guiding motivation, while simulators were great allies in promoting of interactivity among those involved in the process of teaching of differential equations.
Keywords: Learning objects; Investigative teaching sequence; Modeling; Solving of equation.

Introdução

O cenário vivenciado atualmente por diversas pessoas quanto às dificuldades no ensino e aprendizagem, principalmente na área de exatas é, de certa forma, preocupante. As dificuldades de aprendizagem na matemática não é algo desconhecido, muitos alunos enfrentam esse problema que se transforma em algo comum entre eles. Na maioria das vezes os alunos são aprovados nesta disciplina, mas quando é necessário relembrar os assuntos anteriores para aprender o novo, é onde ocorre o principal problema. Fiorentini e Miorim (1990) afirmam que os alunos têm dificuldade de utilizar o conteúdo "armazenado", não tendo acesso a esse conhecimento. Os mesmos autores ainda afirmam que os professores são pessoas que tem conhecimento dessa dificuldade, e que refletem diretamente nos resultados e que por esse motivo procuram outros métodos de ensino.

Sabe-se que a matemática não está presente somente nesta disciplina especificamente, e com isso, pode-se ver que esse problema se agrava. Pietrocola (2002) observa que muitos físicos expressam preocupação com as dificuldades enfrentadas pelos alunos em relação à Matemática, uma vez que tais desafios comprometem a obtenção de bons resultados nesta disciplina. Esse problema, que se manifesta especialmente no ensino superior, é identificado pelo autor em diversas situações, como na resolução de equações polinomiais de segundo grau e no cálculo de coeficientes angulares, entre outros aspectos.

Frequentemente, o processo de ensino e aprendizagem nesta área é acolhido com pessimismo, o que limita as oportunidades para reflexão e construção do conhecimento matemático. Diante deste cenário, objetiva-se a aplicação de uma Sequência de Ensino Investigativa (SEI) no ensino de equações diferenciais motivada pelas aplicações e pelos objetos de aprendizagem.

Conforme afirmam Martins et al. (2019), as vivências bem-sucedidas em uma variedade de tarefas não apenas nutrem a autoconfiança dos alunos, mas também servem

como alicerces para o desenvolvimento de sua resiliência. Em contrapartida, o insucesso pode gerar um ambiente de temor e insegurança, prejudicando a disposição para enfrentar novos desafios. Portanto, é primordial ancorar essa (SEI) por meio de exemplos inspiradores que não apenas motivem, mas também elevem os níveis de satisfação e realização dos alunos. Feitosa e Lavor (2020) afirmam que

> [...]os usos dos objetos de aprendizagem são fortes aliados na aprendizagem, visto que a motivação e interação estiveram presentes em todo o processo. Todos os participantes tiveram um bom nível de satisfação e apresentaram bons resultados na prova escrita de avaliação. (Feitosa; Lavor, 2020, p. 138).

Dessa forma, o emprego de Objetos de Aprendizagem (AO) tem grande relevância em inovação e assistência no ensino e aprendizagem, em especial quando utilizados numa sequência adequada de atividades. Aquino e Lavor (2020) usam uma sequência didática no ensino de instalações elétricas e esses autores reforçam essa ideia ao trabalharem com simuladores gerando conhecimento e motivação. Os autores afirmam que o planejamento educacional não depende do nível de ensino, e esse planejamento serve para combater as principais dificuldades dos alunos, servindo para prever as necessidades do emprego de recursos humanos, estruturando etapas e objetivos.

Diante desse contexto, é possível reconhecer a relevância intrínseca dos simuladores, os quais podem ser harmoniosamente incorporados ao processo educacional. Essa integração não apenas enriquece a prática pedagógica, mas também promove uma experiência de aprendizado que envolve os estudantes de maneira profunda e comprometida.

Tratando o ensino como um todo, por meio de pesquisas, é possível ver que os simuladores não se limitam a uma área específica e assim como Igliori e Almeida (2017) que objetivam dispor materiais para professores de cálculo na tentativa de melhorar o ensino-aprendizagem, propõe-se que as aulas de equações diferenciais sejam dinâmicas ao propor a aplicabilidade através das simulações.

Acredita-se que os simuladores sirvam para melhorar a formação do ser não só pessoal, mas também profissional, deixando o conhecimento mais aprimorado e preparado. As simulações, parando para analisar, servem principalmente para poupar tempo e espaço, visto que na maioria delas necessita apenas de um reprodutor dessa simulação (na maioria das vezes um computador).

Campbell (2019) emprega simulações como ferramenta pedagógica e observa um notável aproveitamento e aprendizado por parte dos alunos ao longo do processo. Tal fenômeno se manifesta no crescimento do corpo docente e na acolhida entusiástica à oportunidade de dinamizar suas práticas de ensino.

Como exemplo de ambiente de simulações, tem-se o *PhET* (*Phsics Educaton Tecnology*) plataforma essa encontrada em muitas pesquisas. Reis e Rehfeldt (2019) destacam que por meio de tecnologias digitais computadorizadas, observa-se um maior rendimento com os alunos onde os mesmos demonstraram maior interesse e a simulação *PhET* utilizada auxiliou os alunos que tinham dificuldade na multiplicação.

Em relação às SEI, Bellucco e Carvalho (2013) ressaltam que estas sequências servem principalmente para a preparação de aulas mais interessantes e motivadoras para os alunos e até mesmo para os professores. A ideia da utilização de simuladores se torna importante pois ela dá origem a uma forma de ensino diferente da tradicional como é comum ver nas escolas de qualquer nível de ensino.

De acordo com Lopes, Alves e Ferreira (2015), as sequências se mostram muito importantes para o ensino, principalmente quando se trata do ensino de matemática para engenheiros, mais especificamente ensino superior. O mesmo autor ainda afirma que essas sequências de certa forma desafiam os alunos, pois na maioria delas trata-se de atividades que instigam os alunos a estudar de forma mais interativa, e isso os motiva.

Então, de forma a obter êxito na resolução de problemas de equações diferenciais e conhecendo a motivação gerada pelos objetos de aprendizagem como simulações, é proposta uma SEI que inicie com situações de aplicação do conteúdo a ser trabalhado. Nesta SEI, serão utilizados simuladores de circuitos elétricos e ondas em que o discente pode interagir diretamente com o ambiente de simulação e ver os possíveis resultados ao qual se deseja. A sequência de atividades se coloca na tentativa de gerar motivação e interação ao passo em que se constrói conhecimentos de equações diferenciais que são comuns nos cursos de engenharia civil, eletricista e mecânica, dentre outros cursos ofertados pela instituição.

Referencial teórico

O ensino da Matemática, particularmente, é considerado um dos mais difíceis já que o conhecimento dessa área é primordial para uma opinião crítica na sociedade atual. Prediger, Berwanger e Mörs (2009) reforçam que isso é devido a sua grande expansão e

dificuldade dos problemas oriundos do ensino-aprendizagem, que depende do esforço individual dos alunos, e de certa forma também depende dos professores, já que estes são os responsáveis a levar o conhecimento até eles.

Os desafios inerentes ao ensino e à aprendizagem da Matemática não constituem um fenômeno recente; ao contrário, perpetuam-se através das gerações. Essa persistência deve-se, em grande medida, à intrínseca complexidade da disciplina e ao seu contínuo desenvolvimento. É frequente que um mesmo problema possa ser abordado e solucionado de diversas maneiras, variando conforme a perspectiva de cada educador e, sobretudo, de cada aluno. Tal diversidade de abordagens não apenas ressalta a ausência de um padrão único de ensino e resolução, mas também transforma o aprendizado da Matemática em uma experiência singular e, por vezes, desafiadora. Essa riqueza de interpretações, embora possa ser um obstáculo, também oferece uma oportunidade ímpar para a construção de um conhecimento mais profundo e significativo.

Muitas vezes, as práticas no ensino da Matemática é que faz as dificuldades aumentarem, e isso acarreta novos fatos, dentre elas estão a desmotivação dos alunos na aprendizagem, o desinteresse destes e outras mais. Desta forma, Santos, França e Santos (2007) afirmam que o professor deve gerar entusiasmo e interatividade nos alunos, para que estes despertem o interesse de aprender Matemática.

Uma tentativa de produzir soluções para os problemas decorrentes do ensino e aprendizagem de matemática, é a utilização de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) que são fortes aliadas na transformação de aulas tradicionais em momentos dinâmicos provocando maior participação do público discente no processo de ensino e aprendizagem. Dentre estas tecnologias, estão as simulações que permitem que uma aplicação possa ser realizada de forma eficiente usando objetos que podem ser encontrados gratuitamente.

O desenvolvimento tecnológico vem cada vez mais ocupando um espaço importante no ensino de Matemática, uma vez que ainda existem dificuldades para ensinar e aprender, que podem ser superadas por TIC. Alguns autores tentam resolver esse problema de forma criativa através de aplicações, em que dentre eles, pode-se citar Santos, Morais e Paiva (2004) que afirmam que os professores devem aceitar o computador e o acesso a redes de comunicação, pois estes estão cada vez mais presentes nas suas atividades profissionais.

O uso de OA se mostra eficiente para resolver problemas enfrentados por todos, visto que estes objetos estão engajados dentro das TIC com o propósito de gerar interatividade. Suas aplicações se mostram eficazes favorecendo o rendimento, e não é de hoje, como comprova Ponte (1995) e ainda Cunha e Cunha (2019) que relatam problema e comprovam a eficiência de OA como auxiliar ao professor e aluno.

Os OA são de fundamental importância para se obter uma tomada de decisão viável de forma segura, já que um preparativo antecipado previne maus acontecimentos posteriormente. Então, os simuladores podem ser utilizados como aliados para que o conhecimento seja construído de forma eficiente e produtiva.

A preocupação com a eficácia do ensino de Matemática deve ser de todos os sujeitos envolvidos para que se tenha metodologias e recursos adequados para ensinar e aprender. No contexto das equações diferenciais, Borssoi, Freire e Silva (2017) empreenderam um estudo abrangente sobre as aplicações no ensino dessa disciplina. Os autores chegaram à conclusão de que as tecnologias empregadas frequentemente distanciam os alunos de um ambiente que lhes é familiar.

Vários autores realizam estudos relacionados ao emprego de outras metodologias de ensino da matemática diferente da tradicional, dentre os quais se pode citar Peripolli e Barin (2018), que trazem o ensino da matemática por meio de histórias em quadrinhos. Estes autores dizem que como a matemática hoje em dia é tratada como complexa e desinteressante, as tecnologias vêm mudando essa visão e cada vez mais os professores vão adquirindo essa forma de ensino para que os alunos se interessem e se motivem.

Coelho e Pereira (2018) trazem o ensino da matemática mediado por um software. Eles citam que o avanço com a tecnologia no ensino é considerável e indispensável para o cotidiano dos alunos, e que essas tecnologias estão ganhando espaço por meio da precisão e eficiência. Assim, podemos entender que adquirir essa ideia de utilização das tecnologias, é adequado e causa interação direta dos alunos com os conteúdos escolares.

Dessa forma é evidente que o uso de OA é motivador, levando em consideração que ainda hoje em dia o ensino de muitas disciplinas, como equações diferenciais, é trabalhado da forma tradicional, mediada por utilização do quadro e de exemplos escritos.

Diante do exposto, a aplicação de uma SEI no ensino de equações diferenciais irá investigar as percepções quanto às aulas dinâmicas mediadas pelas aplicações e simulações na construção de modelos e consequente apropriação de conhecimentos.

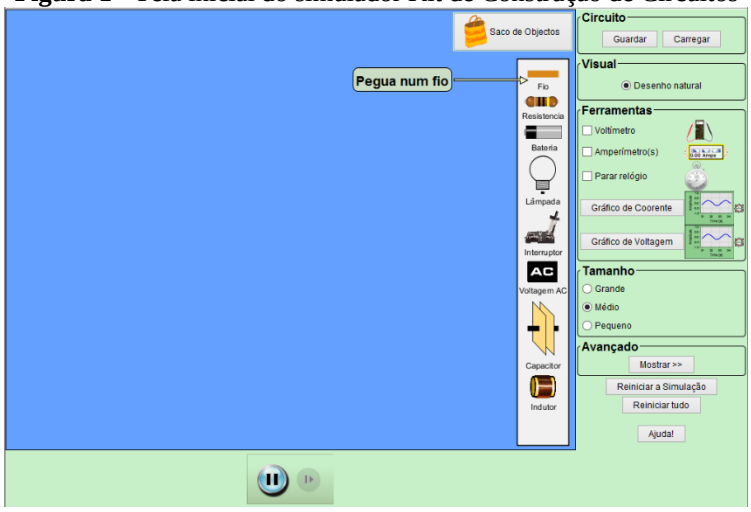
Materiais e Métodos

Essa pesquisa foi realizada no ano de 2020 com um grupo de dez universitários na disciplina de equações diferenciais em uma universidade situada na região do semiárido potiguar.

A fim de experimentar aulas motivadas por aplicações e mediadas por simulações, a investigação é feita a partir de uma sequência de atividades previamente planejadas. Assim, o percurso é guiado por uma SEI, que de acordo com Carvalho (2013) é um tipo de sequência de atividades que cobre uma área da ementa com o objetivo de interligar os conhecimentos anteriores aos novos de forma a atravessar do conhecimento original ao científico. A seleção dos alunos se deu de forma voluntária, em que a proposta era apresentada e os discentes que se disponibilizassem participariam da atividade.

O primeiro passo da SEI é a aplicação de um questionário inicial que busca expectativas em relação a disciplina e aos recursos tecnológicos para nortear o planejamento das aulas a serem ministradas em três encontros. No primeiro encontro, é feito a exposição de aplicações de equações diferenciais, motivando para a compreensão de fenômenos, em que os conteúdos estão alinhados com os livros de Boyce e Diprima (2020) e ZILL (2016). Em seguida, são apresentados os simuladores que tratam destas aplicações. O primeiro é encontrado na plataforma *PhET* nomeado por Kit de Construção de Circuito (AC+DC) desenvolvido por Michael Dubson, Kathy Perkins, Sam Reid e Carl Wieman. Este simulador se encontra gratuitamente para *download*, e serve para modelar circuitos e obter resultados como tensão, corrente entre outras. A Figura 1 mostra a sua interface.

Figura 1 - Tela inicial do simulador Kit de Construção de Circuitos

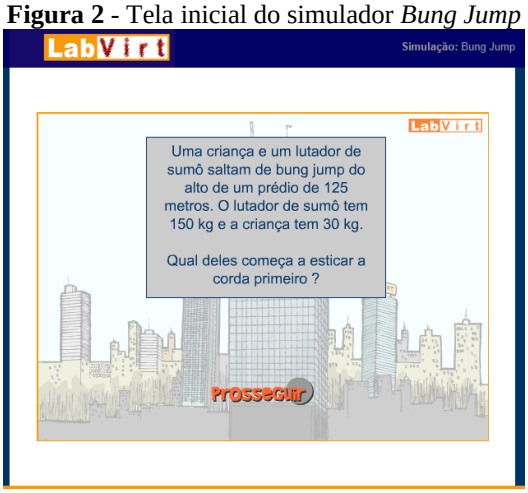


Fonte: Arquivos da pesquisa.

Na tela azul é onde se pode montar os circuitos usando as ferramentas que estão à direita, a saber, fios, resistores baterias, lâmpadas, interruptores, capacitores, fonte alternada e indutores, além de saco objetos encontrados no dia-a-dia como clipes ou lápis.

Os alunos, neste momento, já demonstraram grande interesse, a maior parte deles já querendo saber a funcionalidade de cada componente e o comportamento quando modelados num circuito, outros perguntando possíveis atividades que poderíamos realizar. O outro simulador a ser utilizado está disponível no Laboratório Didático Virtual – Escola do Futuro – USP, nomeado por *Bung Jump*, e foi desenvolvido por Alisson, Ana Karla, Jorge e Marina, onde se pode trabalhar a concepção de ondas (Figura 2).

Figura 2 - Tela inicial do simulador *Bung Jump*



Fonte: Arquivos da pesquisa.

Este simulador trata de um cenário em que estão envolvidos uma criança (leve) e um lutador de sumô (pesado), em que os dois saltam ao mesmo instante do topo de um prédio. O simulador pergunta qual dos dois estica a corda do *Bung Jump* primeiro, desconsiderando a resistência do ar. Alguns alunos já conseguiam imaginar o modelo dessa pergunta associado aos conceitos físicos.

Seguindo as fases da SEI, os fenômenos descritos nos simuladores são modelados por equações de primeira e segunda ordem, em que foram utilizados os conhecimentos de circuitos que podem ser encontrados no livro de Halliday, Resnick, Walker (2007). No segundo encontro, com as equações, o conteúdo de técnicas de resolução de equações de primeira ordem é apresentado para dar suporte à resolução da equação de cada modelo e os fenômenos serem compreendidos de forma mais eficiente. No terceiro encontro, é apresentado o conteúdo para dar suporte às equações de segunda ordem. No quarto

encontro, para verificar a aprendizagem, uma avaliação é feita buscando ver se os conhecimentos foram compreendidos. Esta avaliação foi realizada com duas questões, em que a primeira é voltada ao conteúdo de primeira ordem e a segunda questão para o conteúdo de segunda ordem.

Resultados e discussões

A aplicação ocorreu com três questionários a serem detalhados no decorrer desse tópico, em que no primeiro foi tratado informações pessoais acerca de atividades com simulações. O segundo teve o intuito de medir o aproveitamento dos alunos em relação ao conteúdo passado, em que tratava de exercícios abordando questões de equações diferenciais. O terceiro e último questionário foi também sobre informações pessoais, em que mede o nível de satisfação dos alunos com essa aplicação. A Tabela 1 traz os resultados do questionário inicial aplicado aos dez participantes da pesquisa.

Tabela 1: Resultados do questionário I

QUESTÕES	**SIM**		**NÃO**
Você já teve aulas de matemática no ensino superior mediadas por aplicações dos conteúdos?	8		2
Caso a resposta anterior seja sim, estas aplicações foram do tipo tecnológica (simulação)?	8		0
O que você acha da forma como é ensinada a disciplina de Equações Diferenciais?	**Ruim**	**Intermediária**	**Boa**
	0	10	0
QUESTÕES	**SIM**		**NÃO**
Você acha que seria interessante que se fosse ensinado com aplicações? Essas sendo do tipo tecnológicas com circuitos, pêndulos, entre outras.	10		0
Você acredita que o ensino de matemática pode ser motivado com aplicações e simulações?	10		0

Fonte: Arquivos da pesquisa.

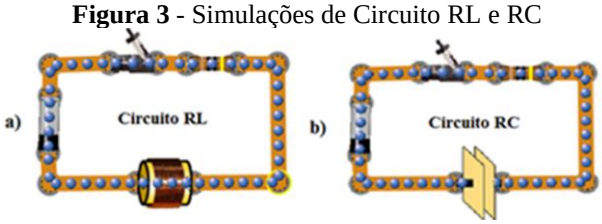
Percebe-se que 80% dos alunos tiveram contato com aulas mediadas por aplicações e estes afirmam que as aplicações eram do tipo tecnológica com uso de simuladores. Os alunos foram indagados sobre a forma atual de ensino que era do tipo tradicional e todos atribuem um nível intermediário e além disso acreditam que o ensino de equações diferenciais pode ser potencializado por meios de aplicações e simulações, pois deixariam estas aulas mais interessantes e motivadoras.

No primeiro encontro, são apresentadas situações problemas que envolve o conhecimento de equações diferenciais. As aplicações apontadas estão ligadas a circuitos

elétricos, bem como o Movimento Harmônico Simples (MHS). Nesta fase, já era possível perceber a empolgação nos alunos, visto que essa apresentação despertou o interesse de entendimento dos fenômenos envolvidos, bem como a modelagem matemática.

Com os problemas apresentados, seguindo as etapas da SEI, são apresentados os simuladores descritos na seção anterior. As aplicações apresentadas são colocadas nos simuladores e diversos modelos são trabalhados. Neste momento, foram trabalhadas quatro questões como exemplo, duas contendo exemplos de equações diferenciais de primeira ordem e duas de segunda ordem. A figura 3 mostra as simulações em que são modeladas por equações de primeira ordem.

Figura 3 - Simulações de Circuito RL e RC



Fonte: Arquivos da pesquisa.

Para abordar os conteúdos planejados, foram utilizados esses circuitos da Figura 3. Na Figura 3a), tem-se um circuito Resistivo-Indutivo (RL) que, através das somas de potenciais e trabalhando a Lei de Kirchhoff das Tensões (LKT), chega-se a uma equação diferencial linear a qual será mostrada adiante. Na figura 3b), é abordado um circuito Resistivo-Capacitivo (RC) e pelas mesmas condições se consegue chegar à equação modeladora. No que segue, é mostrado as equações da forma que foram trabalhadas em sala de aula no segundo encontro.

No sistema Resistivo-Indutivo, figura 3a), pela soma das tenções, e sabendo que a tensão no resistor é $V_R = R \cdot I$, em que V_R é a Tensão no resistor, R é a resistência e I é a corrente no resistor, que para esse caso, como se trata de uma malha apenas é a mesma para todos os componentes. A tensão no indutor é dada por, $V_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$, em que V_L é a tensão no indutor, L é a indutância e I é a corrente no indutor que também está dissipando energia, e por último a tensão da fonte é $V_F = \varepsilon$, onde V_F é a tensão da fonte. Dessa forma,

$$V_F + V_R + V_L = 0$$

e como o resistor e o indutor estão dissipando energia eles ganham um sinal negativo,

$$\varepsilon - R \cdot I - L\frac{dI}{dt} = 0$$

que reorganizando os termos, tem-se:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} \cdot I = \frac{\varepsilon}{L} \tag{1}$$

A equação 1 é uma equação diferencial linear de primeira ordem pois a derivada de maior ordem é primeira. Esta equação modela o circuito RL. Neste momento, é explorado o fato de que só os conhecimentos anteriores vistos em outras disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral não seriam suficientes para resolver esse tipo de equação. É neste momento que se percebe um anseio discente pelo conhecimento de técnicas de resolução de equações diferenciais.

Dada a motivação para o ensino e aprendizagem do conteúdo, é apresentada a técnica de fatores integrantes que consiste em multiplicar a equação por uma função da mesma variável independente que neste caso é o tempo. Nesta técnica, o lado esquerdo da equação toma a forma da derivada do produto de duas funções, momento em que são retomados os conhecimentos de Cálculo Diferencial.

Multiplicando a equação (1) pela função $\mu(t)$, se obtém:

$$\mu(t)\frac{dI}{dt} + \mu(t)\frac{R}{L} \cdot I = \mu(t)\frac{\varepsilon}{L} \tag{2}$$

Na equação (2), para o primeiro membro ser a derivada do produto $I(t)\mu(t)$, é necessário e suficiente que

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \mu(t)\frac{R}{L}$$

que agora retomando os conhecimentos de Cálculo Integral, pode-se obter

$$\mu(t) = e^{\frac{R}{L}t} \tag{3}$$

Agora a equação (2) pode ser reescrita como

$$\frac{d[I(t)\mu(t)]}{dt} = \mu(t)\frac{\varepsilon}{L}$$

que novamente usando os conhecimentos do Cálculo Integral, se chega a

$$I(t)\mu(t) = \int \mu(t)\frac{\varepsilon}{L}dt$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} + De^{-\frac{R}{L}t} \tag{4}$$

em que *D* é uma constante a ser determinada a partir de condições iniciais sobre o problema. Estas condições estão ligadas ao processo de liga e desliga na chave do circuito RL presente na Figura 3a) e que tem solução dada pela equação (4).

Na figura 3b), se tem o circuito Resistivo-Capacitivo, e seguindo o mesmo modelo e sabendo que $V_C = \frac{q}{C}$, em que V_C é a tensão no capacitor, C é a capacitância e q é a carga, a lei das malhas permite chegar na seguinte equação diferencial.

$$\varepsilon - RI - \frac{q}{C} = 0$$

e como $I = \frac{dq}{dt}$, ou seja, a corrente pode ser entendida como a taxa de variação de carga, organizando, tem-se:

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\varepsilon}{R} \tag{5}$$

A equação (5) é uma equação diferencial linear de primeira ordem tal como a equação (1). A solução é obtida de forma análoga ao circuito RL. Então, a solução é

$$q(t) = \varepsilon C + Ee^{-\frac{t}{RC}} \tag{6}$$

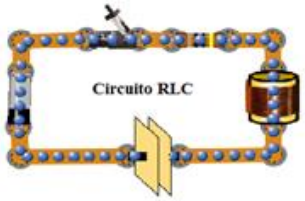
em que E é uma constante a ser determinada por condições iniciais. Como a corrente é a derivada da função carga, tem-se:

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{K_1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

Outros exemplos de equações de primeira ordem foram apresentados finalizando o segundo encontro ressaltando que existem outras aplicações como lei de resfriamento e crescimento populacional.

A Figura 4 traz um circuito Resistivo-Indutivo-Capacitivo (RLC) apresentado no primeiro encontro. O terceiro vai destacar a solução deste circuito apresentando o conteúdo de equações diferenciais de segunda ordem.

Figura 4 - Simulação de circuito RLC



Fonte: Arquivos da pesquisa.

Na figura 4, se tem um circuito RLC, em que a lei das malhas toma a soma das tensões no Capacitor, Resistor e Indutor para chegar na equação

$$\varepsilon - RI - V_C - L\frac{di}{dt} = 0$$

e como $I = C\frac{dV_C}{dt}$, ou seja, tomando a derivada da relação $Q = CV_C$, tem-se que

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{LC} = \frac{\varepsilon}{LC} \tag{7}$$

A equação (7) é uma equação diferencial de segunda ordem pois a derivada de maior ordem é segunda. Para encontrar a solução, pode-se definir o que se chama de constante de amortecimento e frequência angular, respectivamente, $\alpha = \frac{R}{2L}$ e $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ que substituídos na equação (7) se obtém

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + 2\alpha\frac{dV_C}{dt} + \omega^2 V_C = \frac{\varepsilon}{LC} \tag{8}$$

A solução da equação (8) é obtida encontrando uma solução homogênea V_{CH} que aquela que satisfaz a igualdade

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + 2\alpha\frac{dV_C}{dt} + \omega^2 V_C = 0 \tag{9}$$

e mais solução V_{CP} que é uma função que depende da função do lado direito da igualdade na equação (8). A solução V_{CH} é obtida encontrando valores de *r* tais que a substituição $V_C = e^{rt}$ torne a igualdade verdadeira. Dessa forma, a equação (9) é simplificada para

$$r^2 + 2\alpha r + \omega^2 = 0$$

que tem solução

$$r = -\alpha \pm \sqrt{\propto^2 - \omega^2}$$

O termo da raiz quadrada pode ser chamado de ω_0. Tem-se três condições distintas, em que *A* e *B* são constantes a serem determinadas a partir de condições iniciais.

Se $\alpha > \omega$, a solução da homogênea é $V_{CH} = Ae^{(-\alpha+\omega_0)t} + Be^{(-\alpha-\omega_0)t}$

Se $\propto < \omega$, a solução da homogênea do tipo, $V_{CH} = e^{-\alpha t}[A\ sen(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)]$

Se $\alpha = \omega$, a solução da homogênea é

$$V_{CH} = Ae^{(-\alpha+\omega_0)t} + Bte^{(-\alpha-\omega_0)t}$$

Se a tensão da fonte for constante, tem-se que a solução particular é

$$V_{CP} = \frac{\varepsilon}{LC\omega^2}$$

A solução da equação (8) será

$$V_C = V_{CP} + V_{CH} \tag{10}$$

que fornece o comportamento de tensão no capacitor em função do tempo. A solução para carga e corrente são obtidas através da relação $Q = CV_C$.

Outra aplicação trabalhada neste encontro é o sistema que lida com força elástica. A Figura 5 mostra a simulação realizada em que o participante precisa compreender as relações de queda livre e força elástica.

Figura 5 – Simulação do *Bung Jump*

Fonte: Arquivos da pesquisa.

Nesta simulação, está sendo trabalhado o movimento harmônico simples (MHS), considerando que as elasticidades das duas cordas são iguais e assim conseguir uma equação que modele o movimento do menino e do lutador de sumô. Considerando a segunda lei de Newton e a força elástica que é dada por $F = -kx$, onde k é a constante de elasticidade da corda e x a posição, pode-se ter $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ que organizando os termos, se tem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{11}$$

em que foi definida a frequência angular dada por $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$.

A equação (11) é uma equação diferencial de segunda ordem do tipo homogênea. Procedendo de forma análoga ao circuito RLC, tem-se que $r = \pm i\omega$ e a solução será

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2\, sen\,(\omega t) \tag{12}$$

em que C_1 e C_2 são constantes a ser determinadas por condições iniciais.

Neste momento, é explicado que a amplitude de oscilação é dependente da massa e que o ponto inicial é independente de massa visto que a queda livre não depende deste fator. Olhando para as equações diferenciais e para a simulação, o discente pode melhor compreender o fenômeno e apropriar-se das técnicas de resolução de equações diferenciais.

O próximo passo da SEI foi realizado no quarto encontro e se deu pela aplicação da avaliação, em que foram verificados se os objetivos foram alcançados. A avaliação foi composta por duas questões. A primeira questão buscava verificar a aprendizagem sobre

a modelagem das equações de circuitos e a segunda sobre o MHS. Em ambas as questões, foi solicitado a modelagem do problema por uma equação diferencial, bem como a solução da equação (Tabela 2).

Tabela 2: Resultado da avaliação: quantidade de acertos das questões

	RESULTADOS		
EXERCÍCIOS	**INCORRETO**	**PARCIALMENTE CORRETO**	**CORRETO**
CIRCUITO RC	0	0	10
CIRCUITO RL	0	0	10
CIRCUITO RLC	0	0	10
MHS	0	2	8

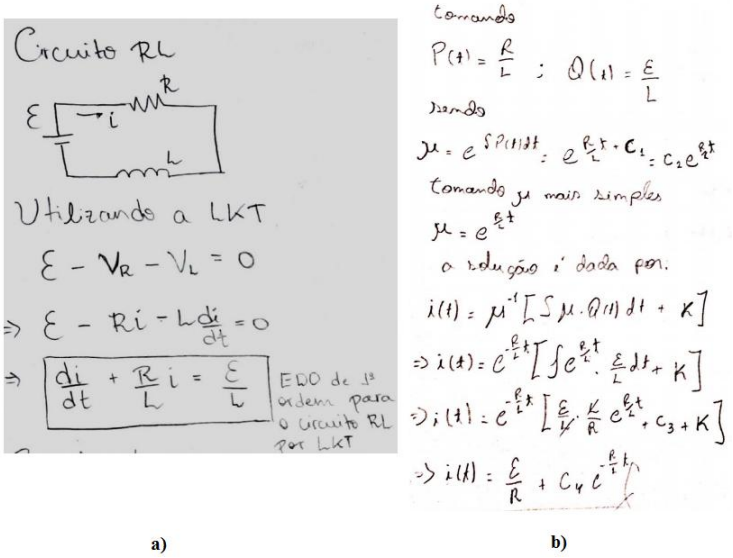
Fonte: Arquivos da pesquisa.

Como apresentado na Tabela 2, todos os alunos acertaram a questão relacionada aos circuitos, o que já mostra que o conteúdo de equações diferenciais foi compreendido por meio das aplicações e simulações através da modelagem de aplicações em eletricidade. Na questão que envolvia o MHS, houve uma taxa de acertos de 80%.

Neste contexto, foi possível ver eu o conteúdo de equações diferenciais de primeira e segunda ordem foram ancorados em conceitos de eletricidade e ondas, concordando com Ausubel (1980) que diz que a aprendizagem significativa só ocorre quando o material a ser aprendido é ancorado em conceitos que o aluno já possui.

No que segue, tem-se algumas resoluções feitas pelos alunos. A figura 6, mostra a resolução de uma questão de circuito RL.

Figura 6 - Exercício do circuito RL

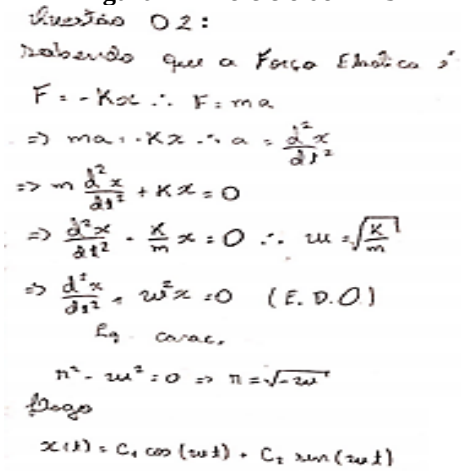


a) b)

Fonte: Arquivos da pesquisa.

Na figura 6a), tem-se a equação encontrada por um aluno e na figura 6b), a solução encontrada por outro aluno. É possível perceber que os alunos resolveram corretamente encontrando a equação que modela o circuito e sua solução. Já na Figura 7, tem um exemplo de resolução da questão que envolve o MHS.

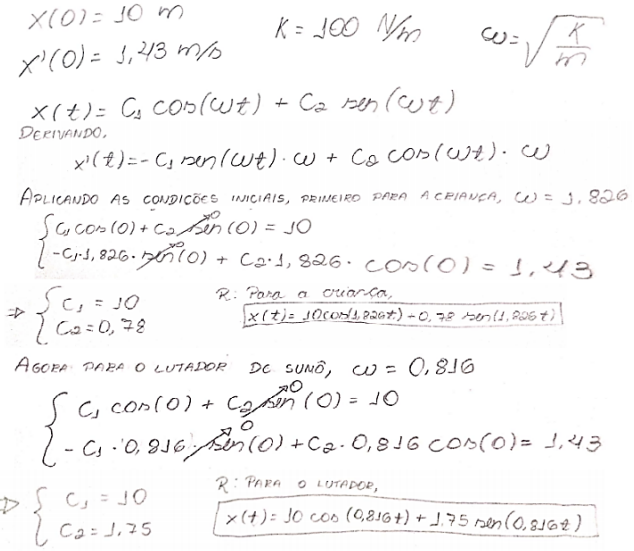
Figura 7 - Exercício do MHS



Fonte: Arquivos da pesquisa.

Neste caso, pode-se ver que a equação diferencial e sua solução foram encontradas e o estudante pode compreender a relação entre as equações de movimento e as equações diferenciais. Para responder as questões no simulador, foram dadas condições iniciais a saber, uma constante elástica de 100 N/m (Newton por metro), a massa do garoto como sendo 30 Kg, lutador de sumô com massa de 150 Kg e o movimento harmônico iniciando na posição $x = 10m$. A Figura 8 mostra a solução encontrada por um aluno.

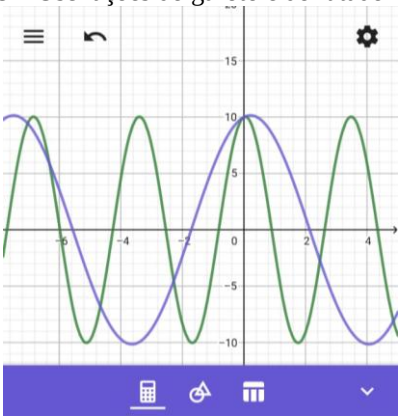
Figura 8 - Exercício do MHS com condições iniciais



Fonte: Arquivos de pesquisa.

A figura 9 mostra o gráfico do movimento do garoto e do lutador de sumô, em que a curva verde representa as oscilações do garoto e a curva azul representa as oscilações do lutador.

Figura 8 – Oscilações do garoto e do lutador de sumô



Fonte: Arquivos de pesquisa.

Pelos gráficos, nota-se que a amplitude de oscilação é a mesma, no entanto a frequência de oscilação do garoto é maior, visto que sua massa é menor. Ao final da SEI, foi aplicado um questionário onde os alunos afirmam quererem atividades desta natureza e que as simulações e aplicações tiveram papel fundamental em sua aprendizagem.

Considerações finais

Concordando com Silva (2020), a Matemática precisa passar por intervenções e aprimorar seus diversos conceitos. No caso do ensino de equações diferenciais de primeira e segunda ordem, foi proposto uma SEI que motive tanto os professores quanto os alunos, a fim de melhorar os aspectos de aplicabilidade e a promoção do ambiente favorável a aprendizagem.

Neste trabalho, foi destacado a utilização de simuladores no auxílio do ensino de matemática, no qual o público alvo foi alunos de graduação matriculados na disciplina de equações diferenciais que é comum às engenharias civil, elétrica e mecânica, de forma que estes estudantes participaram voluntariamente e se mostraram motivados e satisfeitos com a atividade realizada. Estes simuladores foram usados na perspectiva de melhor apresentar a aplicação das equações diferenciais, pois a simulação tem uma função de apresentar fenômenos possibilitando uma proximidade com o com as causas e efeitos reais.

Os resultados revelam que a utilização de objetos de aprendizagem, como os simuladores, desempenha um papel crucial e se configura como um aliado potente no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, os alunos demonstraram forte motivação e interação ao longo de toda a experiência educativa.

Ademais, a problemática proposta, que se entrelaçava com o conteúdo a ser explorado, despertou a curiosidade e o entusiasmo dos estudantes para os encontros subsequentes. Em outras palavras, a implementação da (SEI) gerou resultados que não apenas enriquecem a reflexão sobre a prática docente, mas também incentivam os educandos a se engajar na aplicação de equações diferenciais por meio dos objetos de aprendizagem.

Referências

AQUINO, Adelmo Artur de; LAVOR, Otávio Paulino. ENSINO DE INSTALAÇÕES ELÉTRICAS RESIDENCIAIS: uma sequência didática a partir de uma aplicação mobile. **Reamec - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, [s.l.], v. 8, n. 2, p. 125-146, 30 abr. 2020. Revista REAMEC. http://dx.doi.org/10.26571/reamec.v8i2.9862. Disponível em: http://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/9862/pdf. Acesso em: 30 maio 2020.

AUSUBEL, Davis P.; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional**. 2 ed. Rio de Janeiro: Editora Interamericana, 1980.

BELLUCCO, Alex; CARVALHO, Anna Maria Pessoa de. Uma proposta de sequência de ensino investigativa sobre quantidade de movimento, sua conservação e as leis de Newton. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, [s.l.], v. 31, n. 1, p. 30-59, 25 nov. 2013. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/2175-7941.2014v31n1p30. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5165601. Acesso em: 17 maio 2020.

BORSSOI, Adriana Helena; FREIRE, Talita Breschiliare Piffer; SILVA, Karina Alessandra Pessoa da. UM PRODUTO EDUCACIONAL PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS EM UM CURSO DE FORMAÇÃO DOCENTE. **Revista de Produtos Educacionais e Pesquisas em Ensino**, Paraná, v. 1, n. 1, p. 59-78, 20 jun. 2017. Disponível em: http://seer.uenp.edu.br/index.php/reppe/article/view/1113. Acesso em: 24 maio 2020.

BOYCE, William; DIPRIMA, Richard. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

CAMPBELL, Suzanne Hetzel. **Simulação clínica para o ensino em saúde**. 2019. Disponível em: http://deploy.extras.ufg.br/projetos/fen_revista/v21/pdf/a00-57250.pdf. Acesso em: 17 maio 2020.

CARVALHO, Ana Maria Pessoa (Org.). **O ensino de Ciências e a proposição de sequências de ensino investigativas**. São Paulo: CENCAGE Learning, 2013.

COELHO, Nilcilene da Silva; PEREIRA, Rubenvaldo Monteiro. Software GCompris como recurso didático no processo de ensino-aprendizagem de Matemática: investigações na formação continuada de professores na rede municipal em Cametá/PA. **Revista de Estudos e Pesquisas Sobre Ensino Tecnológico (educitec)**, [s.l.], v. 4, n. 8, p. 257-267, 14 nov. 2018. Instituto Federal do Amazonas. http://dx.doi.org/10.31417/educitec.v4i08.620. Disponível em: http://200.129.168.14:9000/educitec/index.php/educitec/article/view/620. Acesso em: 30 maio 2020.

CUNHA, Aldrin Cleyde da; CUNHA, Janielle da Silva Melo da. TECNOLOGIAS EDUCACIONAIS: representações sociais de professores indígenas em formação. **Revista Observatório**, [s.l.], v. 5, n. 5, p. 983-998, 1 ago. 2019. Universidade Federal do Tocantins. http://dx.doi.org/10.20873/uft.2447-4266.2019v5n5p983. Disponível em: https://sistemas.uft.edu.br/periodicos/index.php/observatorio/article/view/4061. Acesso em: 24 maio 2020.

FEITOSA, Murilo Carvalho; LAVOR, Otávio Paulino. ENSINO DE CIRCUITOS ELÉTRICOS COM AUXÍLIO DE UM SIMULADOR DO PHET. **Reamec - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Pau dos Ferros-RN, v. 8, n. 1, p.126-139, 7 fev. 2020. Revista REAMEC. http://dx.doi.org/10.26571/reamec.v8i1.9014. Disponível em: http://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/9014/pdf. Acesso em: 15 mai. 2020.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. 1990. Disponível em: http://files.profpereira.webnode.com/200000097-846ca86603/Texto%20-%20Uma%20Reflexao%20sobre%20o%20uso%20de%20Materiais%20Concretos%20e%20Jogos.pdf. Acesso em: 29 maio 2020.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl, Fundamentos de Física Volume 3 Eletromagnetismo, Rio de Janeiro: LTC, 2007.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo; ALMEIDA, Marcio Vieira. Aplicações para o ensino de equações diferenciais. **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, [s.l.], v. 10, n. 1, p. 257, 30 maio 2017. Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). http://dx.doi.org/10.5007/1982-5153.2017v10n1p257. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/1982-5153.2017v10n1p257. Acesso em: 16 maio 2020.

LOPES, Lidiane Schimitz; ALVES, Gilson Leandro Pacheco; FERREIRA, André Luís Andrejew. **A Simetria nas Aulas de Matemática: uma proposta investigativa**. 2015. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/edreal/2015nahead/2175-6236-edreal-46015.pdf. Acesso em: 30 maio 2020.

MARTINS, Endrigo Antunes, et al. CRENÇAS DE AUTOEFICÁCIA E ATITUDES DE ALUNOS DA EDUCAÇÃO BÁSICA: possíveis indicativos de desmotivação para a resolução de questões "matematizadas" de ciências naturais. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, v. 7, n. 2, p.5-27, jul./dez. 2019. Disponível em: http://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/8346. Acesso em 17 mai. 2020.

PERIPOLLI, Patrícia Zanon; BARIN, Cláudia Smaniotto. **USO PEDAGÓGICO DE HISTÓRIAS EM QUADRINHOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA**. 2018. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Claudia_Barin/publication/326441417_O_USO_PEDAGOGICO_DE_HISTORIAS_EM_QUADRINHOS_NO_ENSINO_DE_MATEMATICA/links/5b4dce99aca27217ff9bdf9a/O-USO-PEDAGOGICO-DE-HISTORIAS-EM-QUADRINHOS-NO-ENSINO-DE-MATEMATICA.pdf. Acesso em: 30 maio 2020.

PIETROCOLA, Maurício. **A MATEMÁTICA COMO ESTRUTURANTE DO CONHECIMENTO FÍSICO**. 2002. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/download/9297/8588. Acesso em: 29 maio 2020.

PONTE, João Pedro da (1995). Novas tecnologias na aula de Matemática. **Educação e Matemática**, Lisboa, v.1, n. 34, p.2-7, mai. 1995. Disponível em: http://hdl.handle.net/10451/4470. Acesso em 23 mai. 2020.

PREDIGER, Juliana; BERWANGER, Luana; MÖRS, Marlete Finke. Relação entre aluno e matemática: reflexões sobre o desinteresse dos estudantes pela aprendizagem desta disciplina. **Revista Destaques Acadêmicos**, [s.l.], v. 1, n. 4, p. 23-32, dez. 2009. Disponível em: http://univates.br/revistas/index.php/destaques/article/view/39. Acesso em: 30 maio 2020.

REIS, Erisnaldo Francisco; REHFELDT, Márcia Jussara Repp SOFTWARE PHET E MATEMÁTICA: POSSIBILIDADE PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA MULTIPLICAÇÃO. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, Cuiabá, v. 10, n. 1, p.194-208, 2019. Disponível em: http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1557. Acesso em 18 mai. 2020.

SANTOS, Elci; MORAIS, Carlos; PAIVA, João. **Formação de professores para a integração das TIC no ensino de Matemática**. 2004. Biblioteca Digital do Instituto Politécnico de Bragança. Disponível em: http://hdl.handle.net/10198/1094. Acesso em: 23 maio 2020.

SANTOS, Josiel Almeida; FRANÇA, Kleber Vieira; SANTOS, Lúcia Silveira Brum dos. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática**. 2007. 41 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Centro Universitário Adventista de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em:

http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Santos.pdf. Acesso em: 23 maio 2020.

SILVA, Davi Ferreira Lima et al. Proposta de Sequência Didática para o Ensino de Funções de Duas Variáveis Utilizando o Geogebra Mobile. **Brazilian Journal Of Development**, [s.l.], v. 6, n. 2, p. 9217-9229, 2020. Brazilian Journal of Development. http://dx.doi.org/10.34117/bjdv6n2-291.

ZILL, Dennis. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

Recebido em: 19 / 08 / 2024
Aprovado em: 14 / 03 / 2025