



UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM HISTÓRICA DA RELAÇÃO DE EULER COM ARRIMO DA REALIDADE AUMENTADA

A PROPOSAL FOR A HISTORICAL APPROACH OF EULER'S RELATIONSHIP WITH THE SUPPORT OF AUGMENTED REALITY

Paulo Vítor da Silva Santiago¹; Francisco Cleuton de Araújo²

RESUMO

A elaboração de propostas pedagógicas torna-se recorrente ao se considerar os desafios enfrentados no desenvolvimento da percepção espacial e no estabelecimento de relações geométricas no contexto escolar. Este trabalho relata uma experiência pedagógica realizada em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, abordando a Relação de Euler por meio de uma perspectiva histórica e do uso da Realidade Aumentada. O objetivo é apresentar uma intervenção didática que articula a História da Matemática e tecnologias digitais no processo de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos. Este estudo de caso, de natureza exploratória e abordagem qualitativa, coletou dados por meio de observação participante, aplicação de questionários aos alunos e análise dos trabalhos produzidos. Os resultados indicam que a combinação de uma abordagem histórica com o suporte da Realidade Aumentada aumenta o interesse e o engajamento dos estudantes, além de favorecer a compreensão dos conteúdos matemáticos, promovendo uma aprendizagem mais significativa. Observou-se maior envolvimento e compreensão por parte dos alunos ao relacionarem conceitos matemáticos, perspectiva histórica e elementos visuais interativos.

Palavras-chave: Relação de Euler, História da Matemática, Ensino Fundamental, Geometria, Realidade Aumentada.

ABSTRACT

The development of proposals becomes recurrent when considering the challenges faced in enhancing spatial perception and establishing geometric relationships within the school context. This paper reports a pedagogical experience carried out with a 6th-grade elementary school class, approaching Euler's Formula through a historical perspective and the use of Augmented Reality. Thus, this study aims to present a didactic intervention that integrates the History of Mathematics and digital technology into the teaching and learning of geometric concepts. This case study, of an exploratory nature and qualitative approach, collected data through participant observation, student questionnaires, and analysis of the work produced. The results indicate that combining a historical approach with the support of Augmented Reality increases student's interest and

¹ Doutor em Ensino (RENOEN/UFC). Professor da Secretaria de Educação do Ceará (SEDUC), Quixeramobim, Ceará, Brasil. Centro, S/N, Centro, Quixeramobim, Ceará, Brasil, CEP: 63800-000. E-mail: paulovitor.paulocds@gmail.com.

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6608-5452>.

² Doutorando em Ensino de Ciências e Matemática no Programa de Pós-Graduação da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN) pela Universidade Federal do Ceará. Professor de Matemática da Secretaria Municipal de Fortaleza (SEMF), Fortaleza, Ceará, Brasil. Via Paisagística do Loteamento Itaperussu, 80, Itaperi, Fortaleza, Ceará, Brasil, CEP: 60743-065. E-mail: cleutonaraujo86@gmail.com.

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-5955-6324>.



engagement, in addition to enhancing their understanding of mathematical content, thus promoting more meaningful learning. Students showed greater involvement and comprehension when relating mathematical concepts, historical context and interactive visual elements.

Keywords: Euler's Formula, History of Mathematics, Elementary Education, Geometry, Augmented Reality.

Introdução

Neste trabalho, recorte de uma pesquisa em andamento, propõe-se apresentar uma abordagem histórica da Relação de Euler (RE) no contexto escolar, complementada pelo uso da Realidade Aumentada (RA), com o intuito de explorar suas contribuições para o desenvolvimento da percepção espacial e a compreensão de relações geométricas entre alunos do 6º ano do Ensino Fundamental (EF). De acordo com D'Ambrósio (2021), a História da Matemática (HM) no ensino deve ser encarada, principalmente, pelo seu valor motivacional para a Matemática, oferecendo curiosidades e elementos instigantes que possam despertar o interesse dos alunos.

Conforme Chaquiam (2015), a inserção de fatos históricos pode representar uma dinâmica bastante interessante para a introdução de conteúdos matemáticos em sala de aula, possibilitando aos alunos reconhecer a Matemática como uma construção humana originada a partir da busca por soluções para problemas do cotidiano. Para Saito (2015), a HM constitui um instrumento importante para o trabalho docente em sala de aula. Nessa perspectiva, ao utilizar fontes adequadas e atualizadas, é possível promover entre os alunos uma visão mais crítica sobre a Matemática e a construção dos conhecimentos matemáticos.

Assim, destaca-se um dos maiores matemáticos da história, Leonhard Euler (1707-1783), nascido na Suíça, reconhecido por suas contribuições significativas em diversas áreas da Matemática, incluindo a teoria dos números, o cálculo, a geometria analítica, a análise e a probabilidade. Sua capacidade notável de resolver problemas, aliada a uma impressionante produtividade acadêmica, resultou em um extenso acervo de mais de 800 publicações (Boyer; Merzbach, 2019).

Por sua vez, a interseção entre a Relação de Euler (RE), a Realidade Aumentada (RA), a História da Matemática e as novas tecnologias educacionais mostra um potencial significativo para transformar práticas pedagógicas e enriquecer os processos de ensino e aprendizagem em Matemática. Em particular, a aplicação da RA emerge como uma



ferramenta inovadora, capaz de proporcionar experiências de aprendizagem imersivas e interativas.

O ensino de conceitos geométricos frequentemente enfrenta o desafio da abstração, o que pode resultar em dificuldades na apreensão e aplicação prática desses conceitos pelos alunos. A Relação de Euler, ao estabelecer uma conexão fundamental entre vértices, faces e arestas de poliedros, constitui um exemplo clássico dessas dificuldades, exigindo um nível elevado de percepção espacial e capacidade de visualização.

Conforme Azuma *et al.* (2001), a RA enriquece o mundo físico ao integrar elementos virtuais, possibilitando a coexistência harmoniosa de objetos reais e virtuais. Nesse sentido, um sistema de RA deve possuir três propriedades: combinar objetos reais e virtuais, ser interativo em tempo real e alinhar corretamente os elementos no mesmo plano.

Torna-se cada vez mais evidente a convergência entre a Relação de Euler (RE), a RA e a História da Matemática (HM) com o ensino, a educação, a história e as tecnologias digitais. Pensando a partir dessas conexões, formulamos a seguinte problemática de pesquisa: *como incluir a Relação de Euler nos Anos Finais do Ensino Fundamental, sob a perspectiva da História da Matemática, com uso da Realidade Aumentada em uma intervenção didática no ensino de Geometria?*

Neste contexto, a presente pesquisa tem como objetivo analisar uma intervenção didática implementada em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, a qual integra a perspectiva da História da Matemática com o uso da Realidade aumentada no ensino da Relação de Euler no campo da Geometria.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: o primeiro tópico corresponde a esta breve introdução; o segundo tópico apresenta o referencial teórico da pesquisa; o terceiro descreve o percurso metodológico; o quarto traz a análise e discussão dos resultados; e o quinto e último tópico contempla as considerações finais do estudo.

Referencial Teórico

Nesta seção, fornecemos uma descrição detalhada que estabelece a base teórica para compreensão dos desafios e perspectivas da educação contemporânea, abordando temas como História da Matemática, Tecnologia Digital (TD), Realidade Aumentada (RA) no ensino de Matemática e a Relação de Euler (RE) no contexto educacional.



História da Matemática e Tecnologias Digitais no Ensino

Conforme exposto por Boyer e Merzbach (2019), a HM constitui uma jornada fascinante que remonta a milhares de anos, desde as civilizações antigas até as teorias modernas. Ao longo dos séculos, matemáticos como Euclides, Arquimedes e Newton desenvolveram conceitos fundamentais que formam a base do conhecimento matemático atual. Suas contribuições não apenas solucionaram problemas práticos, mas também ampliaram os horizontes do pensamento humano.

Nesse sentido, Boyer e Merzbach (2019) destacam que Leonhard Euler, considerado um dos matemáticos mais influentes da história, deixou um legado notável que transcende seu tempo. Sua habilidade em resolver problemas complexos de forma elegante e sistemática não apenas impulsionou o desenvolvimento matemático, mas também inspirou gerações subsequentes de estudiosos a explorar novos territórios e elaborar novas teorias.

Mas a HM, ao contextualizar fatos científicos em seus respectivos períodos históricos, pode desempenhar um papel fundamental na construção de uma compreensão mais ampla e significativa dos conceitos matemáticos. Quando integrada à RA, essa abordagem tem o potencial de despertar maior interesse dos alunos, além de favorecer a visualização tridimensional e a manipulação virtual de objetos geométricos, facilitando a assimilação de conteúdos considerados abstratos.

No contexto dos Anos Finais do Ensino Fundamental, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a importância de desenvolver a habilidade de quantificar e estabelecer relações entre os elementos de prismas e pirâmides, com vistas à resolução de problemas e ao aprimoramento da percepção espacial. Além disso, enfatiza-se o uso de recursos didáticos tecnológicos e da inclusão da HM, com o intuito de despertar o interesse dos alunos e criar um contexto significativo para o ensino e a aprendizagem da Matemática (Brasil, 2018).

Nesse sentido, o trabalho de Lopes Júnior (2022) analisa os avanços da tecnológicos e a utilização da HM como recursos pedagógicos, investigando como esses elementos podem promover práticas colaborativas e criativas em sala de aula. A pesquisa evidencia que a HM e as tecnologias constituem ferramentas potentes para a inclusão e atuam como agentes transformadores das formas de comunicação e interação na sociedade atual. O estudo sugere que o cenário educacional contemporâneo requer aulas mais participativas, que incorporem metodologias inovadoras e busquem maior



efetividade nos processos de ensino. Nesse contexto, tanto a História quanto a tecnologia devem ser aliadas no ambiente escolar, contribuindo para a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

Ao analisarem teses e dissertações produzidas ao longo de 30 anos (1990-2020) sob a perspectiva dos temas elencados na BNCC para os Anos Finais do Ensino Fundamental, Faccio e Mendes (2022) observaram que a HM tem se consolidado de forma significativa. A Geometria, em particular, tem sido amplamente explorada nesses estudos, com destaque para o uso do *software* GeoGebra na resolução de situações-problema.

Por sua vez, a pesquisa conduzida por Jähring Schunk e Arantes Sad (2022), realizada durante o período pandêmico (2020-2021), investigou os significados produzidos por alunos do 8º ano do EF ao serem expostos a uma abordagem pedagógica que integra a HM no estudo dos Poliedros de Platão e da Relação de Euler. O estudo buscou compreender como a HM pode influenciar a produção de significados e sua integração à prática pedagógica, superando a abordagem convencional centrada na memorização e aplicação mecânica de fórmulas, com o propósito de oferecer uma visão mais contextualizada sobre o desenvolvimento histórico dos conteúdos matemáticos.

Em oficina realizada com alunos do 7º ano da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará (UFPA), abordando os temas Planificação, RE, Poliedros de Platão e o uso do *software* GeoGebra, Da Silva (2022) evidenciou que o emprego de materiais manipuláveis e tecnologias educacionais foi fundamental para aproximar os estudantes da Matemática, especialmente no campo da Geometria. Ao tratar os poliedros de Platão sob uma perspectiva histórica, a autora os relacionou à origem do universo e aos elementos da natureza descritos na obra *Timeu*. A criação de um ambiente acolhedor, aliada à implementação de práticas pedagógicas eficazes, contribuiu para uma melhor compreensão e conexão dos conteúdos, conforme evidenciado pelos *feedbacks* positivos recebidos dos participantes, incluindo alunos e professores da escola.

Em artigo publicado recentemente, Santiago e Araújo (2024) revelaram que o uso da RA, com ênfase no desenvolvimento de noções de quantificação e nas relações entre vértices, faces e arestas, bem como na visualização da planificação de sólidos geométricos, mostrou-se um recurso pedagógico eficaz. No contexto específico de alunos do EF, a utilização da RA favoreceu a criação de um ambiente propício ao processo de



ensino-aprendizagem, aprimorando significativamente a compreensão dos conteúdos matemáticos.

Dessa forma, evidencia-se o potencial da integração entre HM e a tecnologia, como estratégias que podem favorecer a assimilação de conceitos matemáticos no ambiente escolar. Tal combinação tende a contribuir para um ensino de Matemática mais significativo, inclusivo e motivador, preparando os estudantes de forma mais eficaz para os desafios do futuro.

Realidade Aumentada no ensino de Matemática

A RA tem se mostrado uma ferramenta poderosa no ensino de matemática, proporcionando experiências imersivas que engajam os alunos de maneira diferenciada. Um estudo destacou que a RA permite aos estudantes visualizar conceitos matemáticos de forma tangível e interativa, o que facilita a compreensão de temas complexos (Scholz; Smith, 2016). Desde o início dos anos 90, diversos pesquisadores vêm utilizando a RA, contribuindo para aprimorar as abordagens pedagógicas e oferecendo suporte ao seu uso como uma estratégia educacional inovadora e eficaz (Forte; Kirner, 2009; Tonin; Gonçalves, 2013).

A RA é definida como uma tecnologia na qual objetos reais e virtuais são integrados em uma única interface visual, proporcionando ao usuário uma experiência composta por elementos físicos e digitais (Milgram *et al.*, 1995). Por exemplo, aplicativos de RA podem transformar salas de aula em laboratórios virtuais, permitindo que os estudantes manipulem objetos geométricos tridimensionais em tempo real. Conforme afirmado por Amorim e Freitas (2023), isso possibilita a exploração prática de formas geométricas e a compreensão de relações espaciais de maneira mais concreta.

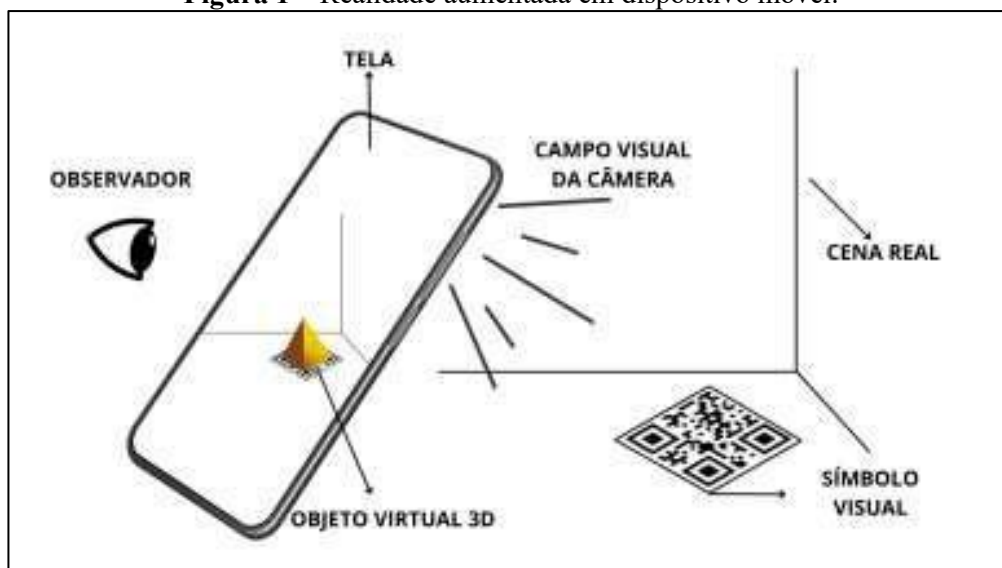
Amorim e Freitas (2023) realizaram um estudo com o objetivo foi analisar o potencial do aplicativo Sólidos RA como recurso didático para auxiliar o desenvolvimento da visualização geométrica entre estudantes. A visualização geométrica constitui um conceito central na Educação Matemática, pois contribui para a intuição, a construção de conceitos e o aprimoramento do raciocínio matemático. Nesse sentido, foi aplicada uma série de tarefas a estudantes do 8º e 9º anos do EF, os quais foram convidados a responder questões enquanto manipulavam o aplicativo.

Além disso, a RA também promove a colaboração e a aprendizagem ativa entre os alunos. Um estudo de Dutra (2011) observou que os alunos trabalham em equipe para

resolver problemas matemáticos utilizando simulações e modelos virtuais, o que fortalece habilidades de resolução de problemas e comunicação matemática. Essa abordagem interativa pode contribuir para a superação de barreiras linguísticas e o aumento da autoconfiança dos alunos em relação à Matemática, conforme evidenciado por uma pesquisa de Oliveira (2016), que identificou maior entusiasmo e motivação para aprender quando a RA foi incorporada ao currículo da disciplina de matemática.

Azuma (1997) ressalta que a RA vai além da simples sobreposição de imagens virtuais sobre o mundo real, incluindo características como a fusão entre realidade e virtualidade, a interação em tempo real e a capacidade de registro em três dimensões. Trata-se de uma tecnologia de natureza interdisciplinar, que tem sido aplicada em diversas áreas, tais como visualização médica, manutenção e reparo, anotações digitais, planejamento de trajetórias para robôs, entretenimento, navegação e seleção de alvos para aeronaves militares (Azuma, 1997). A Figura 1 exemplifica o funcionamento da RA em dispositivos móveis.

Figura 1 – Realidade aumentada em dispositivo móvel.



Fonte: Santiago e Araújo (2024, p. 3).

A aplicação da RA no ensino de matemática não se restringe apenas ao ensino básico. Pesquisas recentes demonstraram que a RA também é eficaz no ensino de conceitos avançados de Cálculo e Álgebra Linear em níveis universitários, proporcionando aos alunos uma compreensão mais profunda e intuitiva de conceitos abstratos (Malara, 2008). Essa tecnologia permite que os professores ilustrem teoremas



complexos e demonstrações matemáticas de forma visual, facilitando tanto a compreensão quanto a retenção do conhecimento.

Contudo, é importante considerar desafios como a acessibilidade e a infraestrutura necessária para implementar eficazmente a RA na educação matemática. Conforme apontado por Schmidt e Cohen (2013), a disponibilidade de dispositivos e a conectividade podem limitar o acesso equitativo a essas tecnologias inovadoras. Dessa forma, estratégias de inclusão digital e o desenvolvimento de conteúdos acessíveis tornam-se essenciais para garantir que todos os alunos possam usufruir dos benefícios da RA no processo de aprendizagem matemático.

Em síntese, a RA configura-se como uma ferramenta educacional promissora, capaz de transformar a maneira como os alunos interagem com conceitos matemáticos complexos. Ao proporcionar experiências imersivas e interativas, essa tecnologia não apenas eleva o engajamento dos estudantes, mas também fortalece suas habilidades de resolução de problemas e comunicação matemática, contribuindo para uma formação mais sólida diante dos desafios contemporâneos no ensino da Matemática.

Além de facilitar a compreensão de conceitos matemáticos abstratos, a RA também permite uma personalização mais eficaz do processo de aprendizagem. Segundo Johnson e McNeal (2021), os aplicativos baseados em RA podem adaptar desafios e exercícios conforme o nível de habilidade de cada estudante, oferecendo um ambiente de aprendizagem mais individualizado e ajustado às necessidades específicas. Isso não apenas aumenta a eficiência do ensino, como também contribui para manter os alunos motivados, ao proporcionar experiências educacionais mais relevantes e envolventes.

Outro benefício significativo da RA no ensino de matemática é sua capacidade de conectar o aprendizado acadêmico a aplicações práticas do mundo real. Pesquisas como a de Skovsmose (2008) destacam que os estudantes podem explorar situações do cotidiano em que conceitos matemáticos são aplicados – como na arquitetura, engenharia e nas ciências naturais – por meio de simulações e modelos virtuais. Nesse sentido, a relevância da RA no contexto da vida cotidiana favorece uma compreensão mais profunda e duradoura dos princípios matemáticos fundamentais, com o uso das tecnologias digitais.

Assim, a RA não se configura apenas como uma tecnologia inovadora aplicada ao ensino de matemática, mas como uma aliada estratégica para transformar a educação em uma experiência mais interativa, personalizada e conectada ao mundo real, preparando os alunos para os desafios e oportunidades da sociedade contemporânea.



Relação de Euler no ensino

A Relação de Euler (RE), fundamental na teoria dos grafos, estabelece uma conexão crucial entre vértices, arestas e faces de grafos planares. A relação destacada neste trabalho foi descrita por Leonhard Euler no século XVIII, quando o matemático desenvolveu a fórmula $V - A + F = 2$. Apesar das diferentes interpretações que essa equação pode assumir, Euler destacou que todo poliedro possui um número V de vértices, A de arestas e F de faces, o que se tornou um dos pilares da Matemática e da Ciência da Computação (Gross; Yellen; Zhang, 2013). Trata-se de um resultado fascinante, tanto por sua beleza quanto por sua simplicidade.

Vale ressaltar, no entanto, que esse teorema não é válido para todos os poliedros, mas apenas para aqueles que são convexos. Ainda assim, é possível encontrar exemplos de poliedros não convexos que satisfazem essa relação (Lima *et al.*, 2006).

A aplicação da RE no ensino promove uma compreensão aprofundada das estruturas geométricas e topológicas, sendo amplamente utilizada para ilustrar conceitos abstratos de forma visualmente acessível. De acordo com Loeb e West (2018), essa fórmula é essencial para a exploração de propriedades fundamentais dos grafos planares, servindo como ponto de partida para investigações em diversas áreas acadêmicas.

A RE não se restringe à Matemática pura; suas aplicações são amplas e impactam diretamente o ensino e a aprendizagem. Em contextos educacionais, ela oferece uma abordagem tangível para o estudo das relações entre vértices, arestas e faces em objetos tridimensionais e representações planas, facilitando a assimilação de conceitos complexos (Batista; Paulo; Eufrásio, 2023). A utilização de modelos visuais e interativos tem se mostrado eficaz para auxiliar os estudantes na internalização e aplicação da fórmula em diferentes contextos geométricos (Stewart, 2019).

Entretanto, a implementação da RA no ensino ainda enfrenta desafios práticos, como a necessidade de recursos educacionais adequados e o suporte contínuo por parte dos educadores (Takami, 2024). Nesse cenário, estratégias pedagógicas que integrem tecnologias educacionais mostram-se fundamentais para superar tais obstáculos, promovendo uma aprendizagem mais dinâmica e interativa. A adoção de abordagens colaborativas também pode enriquecer o processo educacional, proporcionando aos



estudantes uma compreensão mais ampla e contextualizada das aplicações práticas da RA (Ramos; Borges Júnior, 2024).

À medida que novas tecnologias e metodologias de ensino emergem, a RE continua a desempenhar um papel crucial no desenvolvimento acadêmico e profissional dos estudantes. Sua aplicação ultrapassa os limites da matemática, estendendo-se a áreas como Ciência da Computação, Engenharia e Física, o que evidencia sua relevância multifacetada no contexto contemporâneo (Barbosa; Maltempi, 2020). Dessa forma, investir em estratégias educacionais inovadoras que valorizem a exploração e a aplicação da RA revela-se essencial para preparar os estudantes para os desafios da sociedade atual.

Em suma, a RE representa não apenas um conceito matemático abstrato, mas uma ferramenta poderosa para o ensino e a aprendizagem em diversas áreas do conhecimento. Sua incorporação eficaz ao currículo escolar pode não apenas fortalecer a compreensão conceitual dos estudantes, como também capacitá-los a enfrentar problemas complexos e contribuir para o avanço das áreas científicas e tecnológicas.

Percurso Metodológico

Este trabalho apresenta um estudo realizado em uma escola pública municipal localizada em Fortaleza, Ceará, envolvendo uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental composta por 36 alunos, com idades entre 11 e 12 anos. A escolha desta turma deveu-se à necessidade de investigar dificuldades específicas na compreensão de conceitos geométricos, com ênfase na Relação de Euler.

Optou-se por uma abordagem qualitativa, de natureza exploratória, com o objetivo de analisar como a integração da História da Matemática, aliada ao suporte da Realidade Aumentada, pode influenciar o processo de ensino da Geometria. A pesquisa caracteriza-se como um estudo de caso, permitindo uma análise detalhada e contextualizada da intervenção pedagógica, consistindo, assim, em um exame profundo e exaustivo de um objeto, de modo a possibilitar seu amplo e detalhado conhecimento (Gil, 2002).

Na abordagem qualitativa, a pesquisa utiliza o ambiente como fonte direta de dados, mantendo o pesquisador em contato estreito com o cenário e o objeto de estudo. As questões investigadas são analisadas no próprio contexto em que ocorrem, sem manipulações intencionais por parte do pesquisador. Nessa perspectiva, prioriza-se a compreensão aprofundada dos fenômenos estudados (Prodanov; Freitas, 2013).

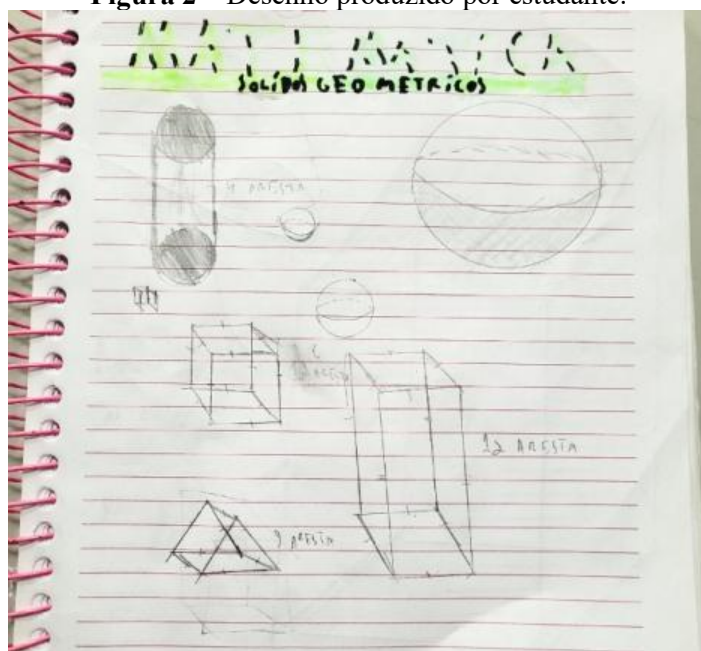


Por sua vez, a observação é uma técnica por meio da qual o pesquisador utiliza seus sentidos para captar e obter dados da realidade. Em particular, a observação participante é realizada *in loco*, com o pesquisador envolvido ativamente na rotina dos participantes da pesquisa, buscando entender e interpretar suas atitudes e comportamentos (Mattos, 2020).

Os dados foram coletados por meio de três técnicas principais (Spradley, 1980), a saber:

- 1) Observação participante: o pesquisador, que também atuava como professor da turma, participou ativamente das aulas, observando e registrando as interações dos alunos, suas reações e o grau de envolvimento nas atividades, utilizando para isso um diário de campo;
- 2) Questionário: aplicou-se um questionário aos alunos após a intervenção, com o objetivo de avaliar suas percepções sobre o objeto de aprendizagem em questão, o uso da RA e a abordagem histórica;
- 3) Análise dos trabalhos produzidos: os trabalhos elaborados pelos alunos durante a intervenção – incluindo desenhos, cálculos, atividades com RA e uma exposição de painéis com elementos da HM – foram analisados com vistas à identificação de evidências de aprendizagem e compreensão dos conceitos geométricos abordados (Figura 2).

Figura 2 – Desenho produzido por estudante.



Fonte: Os autores (2024).



A intervenção pedagógica foi estruturada em seis sessões didáticas, ao longo de três semanas. Foram apresentados elementos teóricos e históricos relacionados às características e propriedades dos sólidos geométricos. Implementou-se o uso do aplicativo Sólidos RA, permitindo a visualização e manipulação de modelos tridimensionais de poliedros. Para isso, os alunos utilizaram *tablets* e *smartphones* para interagir com os objetos virtuais, explorando suas propriedades de forma dinâmica e imersiva. A cada etapa, incentivou-se a discussão crítica e reflexiva, na qual os estudantes compartilharam suas experiências e reflexões sobre as atividades desenvolvidas, destacando os aspectos mais desafiadores e aqueles que contribuíram para uma melhor compreensão dos conceitos estudados.

No transcurso das atividades realizadas, buscou-se: distinguir figuras planas de não planas; classificar corpos redondos e poliedros; reconhecer e quantificar os elementos de um poliedro (vértices, faces e arestas); identificar prismas e pirâmides; compreender a nomenclatura dos poliedros; reconhecer que sólidos geométricos são figuras tridimensionais; explorar a planificação de poliedros; e verificar a validade da Relação de Euler.

Por sua vez, o questionário aplicado foi dividido em três partes distintas, cada uma voltada para aspectos específicos do aprendizado e da compreensão dos alunos sobre a RE, a HM e o uso da RA no ensino. A primeira parte consistiu em seis questões envolvendo o conteúdo matemático propriamente dito, a saber: contagem de vértices, arestas e faces de diferentes poliedros, além da verificação da fórmula de Euler. Essas questões foram elaboradas com o objetivo de reforçar o entendimento dos alunos sobre a relação matemática entre os elementos dos poliedros, estimulando o raciocínio lógico e a habilidade de resolução de problemas.

Já a segunda parte do questionário concentrou-se na perspectiva dos alunos em relação à HM, com duas questões que os incentivavam a refletir sobre a importância histórica de Leonhard Euler e suas contribuições para a Matemática. Essas questões tinham como objetivo avaliar o conhecimento factual dos alunos, além de estimular uma apreciação mais ampla do contexto histórico dos conteúdos abordados.

A terceira parte abordou a percepção dos alunos sobre a utilização de RA como ferramenta educacional. As duas questões finais solicitavam que os alunos descrevessem suas experiências e opiniões sobre o uso de RA para visualizar poliedros e explorar a RE.



Ademais, o projeto final consistiu na realização de uma “Exposição de Painéis” com o intuito de sintetizar o aprendizado dos alunos por meio da criação de cartazes ilustrativos envolvendo a HM. Os alunos foram divididos em grupos, e cada grupo ficou responsável pela elaboração de um painel. Tais painéis deveriam incluir figuras e uma breve explicação histórica sobre os poliedros e sobre a relação descoberta por Euler. Em seguida, organizou-se uma exposição na escola, aberta à visitação de outras turmas visitarem, na qual os alunos apresentaram seus painéis e explicaram o conteúdo para os colegas e professores.

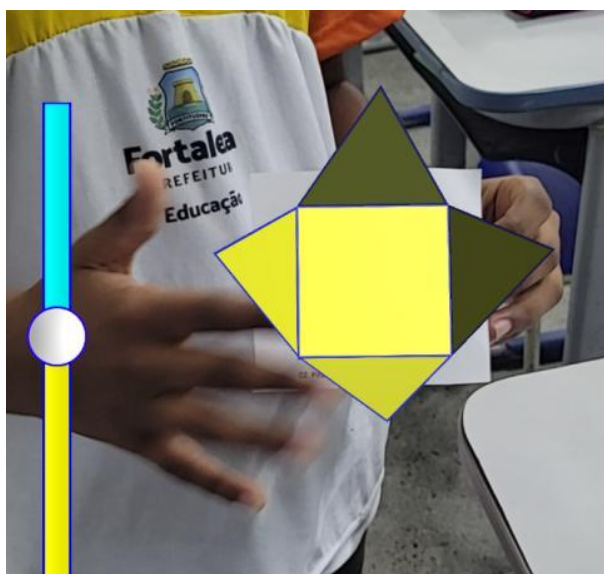
Análise e Discussão

Os resultados obtidos a partir da aplicação do questionário revelam que a maioria dos alunos conseguiu compreender e aplicar corretamente a RE. Quando solicitados a verificar a relação em um cubo, 89% responderam corretamente, demonstrando uma compreensão adequada dos conceitos de vértices, arestas e faces. Além disso, ao desenhar um tetraedro e realizar a contagem de seus elementos, 86% dos alunos conseguiram validar a relação, embora alguns tenham apresentado dificuldades iniciais.

A aplicação da fórmula de Euler a um prisma triangular também foi bem-sucedida, com 78% dos participantes confirmando corretamente o resultado esperado. Na tarefa de classificação de poliedros, 83% dos estudantes identificaram corretamente um octaedro. Em um exercício voltado para a dedução do número de faces de um poliedro com 12 vértices e 20 arestas, 86% dos alunos deduziram corretamente que o poliedro possui 10 faces, utilizando a Relação Euler de forma eficaz.

Ademais, na comparação entre um octaedro e um dodecaedro, 81% dos estudantes conseguiram verificar a Relação de Euler em ambos os casos, reconhecendo corretamente as diferenças estruturais entre esses sólidos geométricos (Figura 4).

Figura 3 – Estudante utiliza RA durante atividade.



Fonte: Acervo dos autores (2024).

No que se refere à perspectiva dos alunos em relação à HM, muitos relataram que aprender sobre Leonhard Euler foi interessante e que suas contribuições são significativas para a Matemática. De modo geral, os alunos demonstraram apreço pelo fato de uma fórmula tão antiga ainda possuir relevância e aplicabilidade nos dias atuais. Relataram ainda que o contexto histórico tornou o processo de aprendizagem mais interessante e significativo, e alguns mencionaram que a trajetória de Euler os inspirou a aprofundar seus estudos sobre os poliedros e a Matemática como um todo.

Figura 4 – Leitura de *QR Codes* para visualização em RA.



Fonte: Os autores (2024).



Quanto à utilização da RA, todos os alunos (100%) consideraram a experiência útil ou muito útil para visualizar e compreender os elementos de um poliedro. Além disso, avaliaram a ferramenta como interativa e divertida, o que facilitou significativamente a compreensão da RE. Além disso, 97% dos estudantes acreditam que a RA pode auxiliar outros colegas na aprendizagem da Matemática de forma mais eficaz, e muitos sugeriram sua aplicação em outras áreas da disciplina, como Geometria e Álgebra, bem como em outras disciplinas escolares, como Ciências e História.

Em síntese, os resultados obtidos com o questionário indicam que a combinação entre ensino teórico, abordagem histórica e suporte tecnológico pode constituir uma estratégia eficaz para o ensino de conceitos matemáticos. Os dados obtidos evidenciam que a contextualização histórica e o uso de ferramentas tecnológicas, como a RA, contribuíram para tornar o processo de aprendizagem mais engajador e significativo para os alunos.

No que se refere à observação participante realizada ao longo da intervenção pedagógica, foi possível constatar uma melhora significativa no envolvimento e na compreensão dos alunos. Durante as atividades com o uso da RA, observou-se um aumento notável na interação dos estudantes com os modelos tridimensionais dos poliedros. Os estudantes demonstraram grande curiosidade e interesse em explorar as propriedades dos sólidos geométricos, manipulando os objetos virtuais e verificando a RE de maneira dinâmica. Essa prática proporcionou uma experiência de aprendizagem mais imersiva, facilitando a internalização dos conceitos geométricos (Oliveira, 2016).

Ademais, percebeu-se que a utilização da HM como contexto para o ensino da RE motivou os alunos a se engajarem nas discussões e reflexões sobre o tema. Com frequência, os estudantes associaram os conceitos matemáticos às contribuições de Leonhard Euler, demonstrando uma compreensão mais contextualizada dos conteúdos. As atividades propostas permitiram que os alunos compartilhassem percepções e questionamentos, promovendo um ambiente colaborativo e participativo em sala de aula.

Outro aspecto relevante identificado, conforme apontado por Autor (ano), foi a evolução das habilidades de percepção espacial dos alunos. Por meio das atividades práticas e do uso da RA, os estudantes foram capazes de desenvolver uma compreensão mais precisa das relações entre vértices, arestas e faces dos poliedros. De modo geral, os alunos apresentavam, inicialmente, dificuldades em abstrair esses conceitos, mas, ao

longo da intervenção pedagógica, demonstraram progressos significativos, consolidando os conhecimentos com maior precisão e segurança.

Quanto à exposição de painéis, realizada como culminância das atividades, a estratégia mostrou-se extremamente eficaz para consolidar o aprendizado dos alunos. Os grupos de estudantes elaboraram painéis que apresentavam conexões entre a HM e os poliedros. Tal atividade incentivou a criatividade dos alunos, além de proporcionar uma oportunidade para que demonstrassem suas habilidades de comunicação e síntese do conhecimento adquirido (Faccio; Mendes, 2022). A exposição foi aberta a outras turmas da escola, promovendo o senso de responsabilidade e o intercâmbio de conhecimentos entre os alunos.

Figura 5 – Painel confeccionado por estudantes.



Fonte: Acervo dos autores (2024).

De maneira geral, durante a apresentação dos painéis, observou-se que os estudantes explicavam os conceitos com clareza e respondiam às perguntas dos colegas com segurança, indicando uma sólida compreensão dos conteúdos trabalhados. A atividade também possibilitou a revisão e o reforço do aprendizado, uma vez que a preparação dos painéis exigiu a integração de diferentes habilidades cognitivas, como a organização das ideias, a elaboração de argumentos e a capacidade de comunicar informações de maneira eficiente.

Outro ponto relevante foi o *feedback* positivo recebido dos visitantes da exposição. Professores e alunos de outras turmas elogiaram a iniciativa e a qualidade dos trabalhos apresentados, o que reforça a importância de metodologias que integrem



elementos históricos e tecnológicos no ensino da Matemática. Nesse sentido, a exposição de painéis revelou-se uma prática pedagógica eficaz para engajar os alunos e aprofundar a compreensão de conceitos matemáticos de forma contextualizada e significativa.

Em síntese, os dados obtidos indicam que essa intervenção pedagógica contribuiu significativamente para o desenvolvimento da percepção espacial dos alunos e para a compreensão das relações geométricas abordadas, além de fomentar o interesse e a motivação pelo estudo da Matemática. Os resultados sugerem que a integração de elementos históricos e tecnológicos pode ser uma estratégia valiosa para aprimorar o ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos no contexto dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Considerações Finais

A presente pesquisa evidenciou o potencial da integração entre a História da Matemática (HM), com o suporte da Realidade Aumentada (RA), no processo de ensino-aprendizagem de conceitos geométricos, com ênfase na Relação de Euler (RE), em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental. Ao longo da intervenção pedagógica, observou-se um aumento expressivo no interesse e no engajamento dos alunos.

Neste contexto, os resultados indicam que o uso da RA proporcionou uma experiência de aprendizagem mais imersiva e interativa, facilitando a compreensão de conceitos abstratos e promovendo o desenvolvimento da percepção espacial. A abordagem histórica, por sua vez, contribuiu significativamente para a contextualização dos conteúdos matemáticos, tornando-os mais significativos e relevantes para os estudantes. Os alunos demonstraram maior envolvimento e compreensão ao relacionarem conceitos matemáticos com a perspectiva histórica e com elementos visuais interativos, o que resultou em uma aprendizagem mais sólida, aprofundada e significativa.

Desse modo, os dados coletados revelam que a maioria dos alunos foi capaz de aplicar corretamente a Relação de Euler e desenvolver uma apreciação pelo contexto histórico das descobertas matemáticas. Além disso, a Realidade Aumentada foi amplamente reconhecida pelos estudantes como uma ferramenta eficaz, motivadora e inovadora para o aprendizado de Matemática.

A exposição de painéis, enquanto culminância das atividades desenvolvidas, destacou-se como uma estratégia relevante para a consolidação do conhecimento e para a promoção da integração entre diferentes habilidades cognitivas e sociais dos alunos.



Em síntese, a pesquisa confirma que a combinação de História da Matemática e Realidade aumentada pode contribuir significativamente para um ensino de Matemática mais contextualizado, inclusivo, motivador e significativo. Espera-se que os resultados apresentados possam servir de base para futuras investigações e aplicações pedagógicas, incentivando o uso de abordagens que valorizem a história e a tecnologia como aliadas no processo educativo, contribuindo para a formação de estudantes mais preparados para os desafios do mundo contemporâneo.

Referências

- AMORIM, L. L.; FREITAS, R. C. de O. Contribuições do aplicativo sólidos ra para o desenvolvimento da visualização geométrica na perspectiva da realidade aumentada. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v. 13, n. 1, 2023. Disponível em: <https://ojs.ifes.edu.br/index.php/dect/article/view/2073>. Acesso em: 19 jul. 2024.
- AZUMA, R.; BAILLOT, Y.; FEINER, S.; JULIER, S.; MACINTYRE, B. Recent advances in augmented reality. **Computer graphics and applications, IEEE**, v. 21, n. 6, 2001. Disponível em: <https://www.cs.unc.edu/~azuma/cga2001.pdf>. Acesso em: 05 abr. 2024.
- AZUMA, R. T. A Survey of Augmented Reality. In: **Presence: Teleoperators and Virtual Environments**, Columbus, v. 6, n. 4, p. 355-385, 1997. Disponível em: <https://www.cs.unc.edu/~azuma/ARpresence.pdf>. Acesso em: 24 fev. 2024.
- BARBOSA, L. L. da S.; MALTEMPI, M. V. Matemática, Pensamento Computacional e BNCC: desafios e potencialidades dos projetos de ensino e das tecnologias na formação inicial de professores. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 3, n. 3, 2020. Disponível em: <https://seer.upf.br/index.php/rbecm/article/view/11841>. Acesso em: 12 jun. 2024.
- BATISTA, C. C.; PAULO, R. M.; EUFRASIO, N. P. L. O ensino de Geometria Espacial com realidade aumentada: : contribuições de um Estudo de Aula. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 12, n. 29, p. 100–118, 2023. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/8240>. Acesso em: 19 abr. 2024.
- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. Tradução: Helena Castro. São Paulo: Editora Blucher, 2019. 504 p.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC**. Educação é a Base. Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2018.
- CHAQUIAM, M. **História da Matemática em sala de aula**: proposta para integração aos conteúdos matemáticos. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. 241 p.



DA SILVA, R. C. Ensino de poliedros através do geogebra e materiais manipuláveis: experiência durante o ensino remoto com alunos do 7º ano. **Anais do 8º Encontro Goiano de Educação Matemática – VIII EnGEM**, Catalão-GO, 2022. Disponível em: <https://anais.sbem-go.com.br/index.php/EnGEM/article/download/254/191>. Acesso em: 01 abr. 2024.

DUTRA, D. S. de A. **Resolução de problemas em ambientes virtuais de aprendizagem num curso de licenciatura em matemática na modalidade a distância**. 2011. 170 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011. Disponível em: <https://repositorio.ufop.br/items/b7c43245-e602-4d2d-b5f1-ebfb200ddeb7>. Acesso em: 11 jun. 2024.

FACCIO, T.; MENDES, I. A. A Pesquisa Brasileira sobre a História da Matemática como Recurso para o Ensino dos Temas Matemáticos Propostos pela BNCC para as Séries Finais do Ensino Fundamental. **Revista História da Matemática para Professores**, v. 8, n. 2, p. 1–15, 2022. Disponível em: <https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/90>. Acesso em: 07 abr. 2024.

FORTE, Cleberson E.; KIRNER, Cláudio. Usando realidade aumentada no desenvolvimento de ferramenta para aprendizagem de física e matemática. In: **6º Workshop de Realidade Virtual e Aumentada**. Santos-SP: UNISANTA. 2009. p. 1-6. Disponível em: <https://www.academia.edu/download/48161263/62200.pdf>. Acesso em: 08 abr. 2025.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. 176 p.

GROSS, J. L.; YELLEN, J.; ZHANG, P. (eds.). **Handbook of Graph Theory**. 2. ed. New York: Chapman & Hall/CRC, 2013. 1630 p.

JÄHRING SCHUNK, T.; ARANTES SAD, L. Poliedros de Platão e Relação de Euler numa abordagem utilizando a História da Matemática. **REMATEC**, v. 17, p. 150–168, 2022. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/18>. Acesso em: 02 abr. 2024.

JOHNSON, E. T.; MCNEAL, K. S. Student perspectives of the spatial thinking components embedded in a topographic map activity using an augmented-reality sandbox. **Journal of Geoscience Education**, n. 70, v. 1, p. 13–24, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10899995.2021.1969862>. Acesso em: 15 jun. 2024.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. v. 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LOEB, S. J.; WEST, D. B. Fractional and circular separation dimension of graphs. **European Journal of Combinatorics**, n. 69, p. 19-35, mar. 2013. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S019566981730149X>. Acesso em: 23 mar. 2024.

LOPES JÚNIOR, J. E. Tecnologia e História da Matemática potencializando o saber em



sala de aula. **CoInspiração - Revista dos Professores que Ensinam Matemática**, v. 5, 2022. Disponível em: <https://sbemmatogrosso.com.br/publicacoes/index.php/coinspiracao/article/view/93>. Acesso em: 01 abr. 2024.

MALARA, Maria Bernadete da Silva. **Os saberes docentes do professor universitário do curso introdutório de estatística expressos no discurso dos formadores**. 2008. 309 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2008. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/items/c71f3a1d-ab10-48a0-9cf2-6d6ecb42501a>. Acesso em: 16 jun. 2024.

MATTOS, S. M. N. **Conversando sobre metodologia da pesquisa científica**. Porto Alegre: Editora Fi, 2020. Disponível em: <https://www.editorafi.org/83pesquisa>. Acesso em: 12 abr. 2024.

MILGRAM, P.; TAKEMURA, H., UTSUMI, A.; KISHINO, F. Augmented Reality: A Class of Displays on the Reality-Virtuality Continuum. **Telemanipulator and Telepresence Technologies**, v. 2351, p. 282-292, 1994. Disponível em: <https://www.spiedigitallibrary.org/conference-proceedings-of-spie/2351/0000/Augmented-reality--a-class-of-displays-on-the-reality/10.1117/12.197321.s hort?SSO=1>. Acesso em: 11 mar. 2024.

OLIVEIRA, P. S. de. **Procedimentos Pedagógicos para o Processo Ensino Aprendizagem de Matemática no Ensino Médio: Intervenção pela Realidade Aumentada**. 2016. 175 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2016. Disponível em: <https://repositorio.unifei.edu.br/jspui/handle/123456789/436>. Acesso em: 15 jun. 2024.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. **Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas de Pesquisa e do Trabalho Acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013. 277 p.

RAMOS, R. C.; BORGES JÚNIOR, W. L. Realidade virtual na educação: fundamentos, dispositivos, aplicações e inovação no ensino. **RCMOS - Revista Científica Multidisciplinar O Saber**, Brasil, v. 1, n. 1, 2024. Disponível em: <https://submissoesrevistacientificaosaber.com/index.php/rcmos/article/view/540>. Acesso em: 19 jun. 2024.

SAITO, F. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. 260 p.

SANTIAGO, P. V. da S.; ARAÚJO, F. C. de. Realidade Aumentada no Ensino de Sólidos Geométricos para o Ensino Fundamental: relato de experiência em uma escola pública de Fortaleza-CE-Brasil. **Educação Matemática em Revista**, [S. l.], v. 29, n. 82, p. 1–15, 2024. DOI: 10.37001/emr.v29i82.3465. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/3465>. Acesso em: 17 jan. 2025.



SCHMIDT, E.; COHEN, J. **A nova era digital**. 1. ed. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2013, 319 p.

SCHOLZ, J.; SMITH, A. N. Augmented reality: Designing immersive experiences that maximize consumer engagement. **Business Horizons**, v. 59, n. 2, p. 149-161, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.bushor.2015.10.003>. Acesso em: 16 jun. 2024.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica**. Tradução: FIGUEIREDO, O. de A.; BARBOSA, J. C. Campinas: Papirus, 2008. 144 p.

SPRADLEY, J. P. **Participant Observation**. Florida: Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, 1980. 195 p.

STEWART, I. **Desbravadores da matemática: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot**. Tradução: SCHLESINGER, G. Rio de Janeiro: Zahar, 2019. 328 p.

TAKAMI, F. C. Metodologias Ativas e a Busca por uma Educação mais Relevante: Desafios e Perspectivas: Desafios e Perspectivas. **SALA 8: Revista Internacional em Políticas, Currículo, Práticas e Gestão da Educação**, v. 1, n. 6, 2024. Disponível em: <https://periodicos.upe.br/index.php/revistasalaoito/article/view/799>. Acesso em: 19 jun. 2024.

TONIN, Leandro; GONÇALVES, K. V. Desenvolvimento de aplicações utilizando realidade aumentada. **Revista das Faculdades Integradas Claretianas**, v. 6, p. 93-106, 2013. Disponível em: <http://web-api-claretiano-edu-br.s3.amazonaws.com/cms/biblioteca/revistas/edicoes/6059fe9e4ea91f55e7624944/605b7df1411a529388ea431a.pdf#page=93>. Acesso em: 08 abr. 2025.

Recebido em: 19 / 07 / 2024

Aprovado em: 17 / 06 / 2024