



UMA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS SOB O PONTO DE VISTA DE RAIMUNDO TEIXEIRA MENDES

A PROOF OF THE PYTHAGOREAN THEOREM FROM THE POINT OF VIEW OF RAIMUNDO TEIXEIRA MENDES

Marcia Aparecida Garcia Teixeira¹; Irene Magalhães Craveiro²;

RESUMO

A presente pesquisa é uma análise detalhada da demonstração do Teorema de Pitágoras sob o ponto de vista de Teixeira Mendes, conforme documentos físicos que constam duas demonstrações do Teorema de Pitágoras, sendo uma de autoria de Gustavo A. Silveira e a outra pelo autor supracitado, ambas transcritas por Araújo Reis. A fonte primária para esta análise foi encontrada no acervo do Museu Casa Benjamin Constant, especificamente no Fundo B.C. Série Instituto Politécnico Brasileiro BC/IPT, REG 533. Para atingir esse objetivo, procedemos da seguinte maneira: Inicialmente, examinamos minuciosamente os passos da demonstração do Teorema de Pitágoras presentes neste documento histórico. Em seguida, utilizamos a ferramenta Geogebra para a construção das figuras e recriamos os passos da demonstração de Teixeira Mendes. Estas construções comentadas auxiliam na análise do documento proposto por esse brasileiro, uma vez que os conceitos geométricos são visualizados de forma intuitiva. Assim, este trabalho não apenas descreve a demonstração deste autor do Teorema de Pitágoras, mas também oferece uma experiência prática e visual, tornando-a mais acessível a compreensão das ideias e a construção sugerida e apresentada por este matemático brasileiro. Este estudo contribui para o enriquecimento do conhecimento sobre a história da matemática no Brasil, destacando a importância de Teixeira Mendes e sua abordagem única na demonstração de um dos teoremas mais conhecidos e citados da geometria euclidiana e ressalta a relevância de preservar e estudar documentos históricos, como os presentes no acervo do Museu Casa Benjamin Constant, para entender o desenvolvimento da matemática em um contexto nacional e histórico.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras, Geogebra, Educação, Análise Documental.

ABSTRACT

This research is a detailed analysis of the demonstration of the Pythagorean Theorem from the point of view of Teixeira Mendes, according to physical documents that contain two demonstrations of the Pythagorean Theorem, one written by Gustavo A. Silveira and the other by Teixeira Mendes, both transcribed by Araújo Reis. The primary source for this analysis was found in the collection of the Museu Casa Benjamin Constant, specifically in the Fundo B.C. Série

¹. Mestre em Matemática (PROFMAT) pela Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD). Professora da Educação Básica (SED-MS), Bonito, MS, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Matheus Muller, 165, Jardim Andrea, Bonito, MS, Brasil, CEP: 79290-000. E-mail: teixe_ira@hotmail.com.

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-8895-624X>.

² Doutorado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professora da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD). Endereço para correspondência: Rodovia Dourados - Ithau, km12, Cidade Universitária, Dourados, MS, Brasil, CEP: 79804-970. E-mail: irenecraveiro@ugfd.edu.br.

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2839-2598>.



Instituto Politécnico Brasileiro BC/IPT, REG 533. To achieve this objective, we proceeded as follows: Initially, we thoroughly examined the steps of demonstrating the Pythagoras' theorem present in this historical document. Then, we used the Geogebra tool to construct the figures and recreate the steps from Teixeira Mendes' demonstration. These commented constructions help in the analysis of the document proposed by this Brazilian, since the geometric concepts are visualized in an intuitive way. This study contributes to the enrichment of knowledge about the history of mathematics in Brazil, highlighting the importance of Teixeira Mendes and his unique approach in demonstrating one of the best-known and cited theorems in Euclidean geometry and highlighting the relevance of preserving and studying historical documents, such as those present in the collection of the Casa Benjamin Constant Museum, to understand the development of mathematics in a national context.

Keywords: Pythagorean theorem, Geogebra, Education, Document Analysis.

Introdução

O Teorema de Pitágoras, na Matemática, estabelece uma relação crucial entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. Na geometria euclidiana, essa relação é expressa da seguinte maneira: o quadrado do comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos comprimentos dos quadrados dos catetos. Nesse contexto, a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90 graus, enquanto os catetos são os outros dois lados que formam o triângulo. Essa relação pode ser representada algebricamente como $a^2 = b^2 + c^2$, onde "a" simboliza o comprimento da hipotenusa, e "b" e "c" são os comprimentos dos catetos. O Teorema de Pitágoras é uma base fundamental da geometria e tem aplicações significativas em diversas áreas da Matemática e da Física. É amplamente utilizado para resolver problemas envolvendo triângulos retângulos, calcular distâncias, e é essencial na trigonometria.

Conforme apontado por Rosa (2007), o Teorema de Pitágoras sempre despertou grande interesse, e entre seus apaixonados entusiastas estava Loomis, um professor de matemática dos Estados Unidos. Loomis dedicou-se à coleta e organização de diversas demonstrações desse teorema notável. O resultado de seu trabalho meticuloso foi publicado no livro intitulado "The Pythagorean Proposition" em 1927, que continha incríveis 230 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras. Na segunda edição do livro, lançada em 1940, o número de provas distintas aumentou ainda mais, totalizando impressionantes 370 abordagens diferentes para validar essa proposição matemática fundamental.

Em seu livro, Loomis classificou essas demonstrações em duas categorias principais: algébricas e geométricas. As demonstrações algébricas baseiam-se nas relações métricas em triângulos retângulos, enquanto as demonstrações geométricas envolvem comparações de áreas. É importante notar que, no livro, Loomis ressaltou que



demonstrações do Teorema de Pitágoras que usam argumentos da trigonometria não são consideradas, devido à identidade trigonométrica fundamental $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$. Essa identidade é, de fato, um caso particular do Teorema de Pitágoras e, portanto, não oferece uma prova independente desse resultado.

É fascinante saber que o Teorema de Pitágoras tem inspirado matemáticos de todo o mundo a criar demonstrações criativas e belas ao longo dos anos. George Polya, com sua demonstração baseada em áreas de figuras semelhantes, certamente deixou uma marca significativa na história da matemática. Além disso, é interessante saber que matemáticos brasileiros também contribuíram com demonstrações originais do Teorema de Pitágoras, destacando a importância global dessa proposição.

A história da matemática é repleta de exemplos de pessoas que encontraram maneiras diferentes e elegantes de provar teoremas fundamentais, como o Teorema de Pitágoras. Essa diversidade de abordagens ajuda a enriquecer a compreensão da matemática e a mostrar como a criatividade desempenha um papel vital no desenvolvimento dessa disciplina.

É interessante destacar que matemáticos brasileiros ou residentes no Brasil também fizeram suas contribuições originais para o Teorema de Pitágoras, conforme relatado na revista *Engenharia*³ que faz parte do acervo da Hemeroteca⁴. Dentre esses notáveis matemáticos, encontram-se figuras notáveis como Stockler, o primeiro diretor da Escola Militar Pedro II, Benjamin Constant diretor da Escola Politécnica e o Dr. Augusto Telles. Além deles, Raimundo Teixeira Mendes foi citado na mesma revista, sendo que sua demonstração está preservada no acervo do Museu Casa Benjamin Constant⁵.

Obtivemos permissão junto ao Museu para publicar as imagens relacionadas a esta pesquisa, o que nos permitirá compartilhar essas valiosas fontes visuais. É notável que ainda existam demonstrações inéditas, como a de Raimundo Teixeira Mendes, aguardando nossa exploração. Investigar esses registros históricos representa não apenas uma forma de preservar a riqueza da história matemática, mas também de redescobrir contribuições valiosas que podem ter sido esquecidas ao longo do tempo.

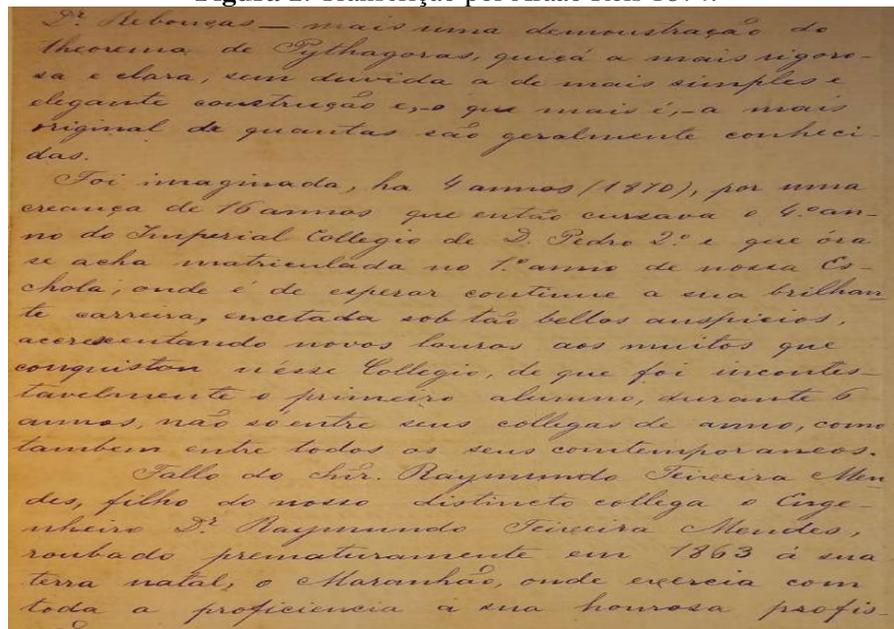
³ Revista *Engenharia* (ano 11, Rio de Janeiro, 1880, nº1, página 2, na seção matemática).

⁴ Hemeroteca é um portal de periódicos nacionais que permitem ampla consulta, pela internet, a jornais, revistas, anuários, boletins e publicações seriadas.

⁵ Museu Casa Benjamin Constant-Este documento faz parte do acervo do Fundo B.C. Série Instituto Politécnico Brasileiro BC/IPT, REG 533.

Raimundo Teixeira Mendes⁶, um aluno do prestigioso Imperial Collegio de Pedro II e filho do engenheiro maranhense Raimundo Teixeira Mendes, se destacou por seu desempenho notável desde cedo. De acordo com registros encontrados no arquivo de Benjamin Constant, Mendes demonstrou uma habilidade excepcional quando, em 1870, com apenas dezesseis anos de idade e enquanto cursava o quarto ano, apresentou uma notável demonstração do Teorema de Pitágoras, conforme vemos na figura 1:

Figura 1: Transcrição por Araão Reis 1874.



Fonte: Museu Casa de Benjamin Constant, Ibram. Fundo BC-Série Instituto Politécnico Brasileiro BC/IPT, REG 533.

Para proporcionar uma compreensão completa e aprofundada da demonstração do Teorema de Pitágoras, conforme apresentada por Raimundo Teixeira Mendes, este artigo foi estruturado nos seguintes tópicos:

- Referencial Teórico: Iniciamos nossa exploração pelo referencial teórico, no qual elucidamos os conceitos matemáticos essenciais que são a base para a compreensão da demonstração de Teixeira Mendes. Este tópico inclui a definição de elementos geométricos cruciais, como triângulos retângulos, hipotenusa e catetos e congruências de triângulos.

- Análise Documental: Em seguida, adentramos na análise documental, em que examinamos recortes do documento original encontrado no acervo do Museu Casa

⁶ Filósofo e matemático brasileiro nascido em Caxias, MA, autor do dístico "Ordem e Progresso" da bandeira brasileira e um dos percussores "política positivista".



Benjamin Constant. Nesta seção, apresentamos a construção de Teixeira Mendes, detalhando cada passo do processo e fornecendo análises elaboradas pelos autores.

Em resumo, este artigo é estruturado de forma a guiar o leitor através de um processo cuidadosamente planejado, desde a compreensão dos fundamentos teóricos até a exploração prática das demonstrações, culminando com uma apreciação das contribuições de Raimundo Teixeira Mendes para o Teorema de Pitágoras.

Referencial Teórico

No embasamento teórico, faremos uso do conceito de congruência de triângulos e do cálculo de áreas de figuras poligonais, com foco particular em quadriláteros e triângulos. Para essa finalidade, é fundamental estabelecer algumas notações que descreverão conceitos preliminares essenciais ao longo da pesquisa. A seguir, apresentaremos as notações que serão empregadas no decorrer deste estudo.

- \overline{AB} para descrever o segmento de reta de extremos A e B ;
- $m(\overline{AB})$ é a medida do segmento \overline{AB} ;
- \hat{CAB} é o ângulo de vértice A ;
- $m(\hat{CAB})$ é a medida do ângulo de vértice A ;
- o triângulo formado por três pontos A , B e C por ΔABC ;
- o quadrilátero formado pelos pontos A , B , C e D , por $ABCD$;
- $m(\Delta ABC)$ é igual a medida da área do triângulo ΔABC e
- $m(ABCD)$ é igual a medida da área do quadrilátero $ABCD$.

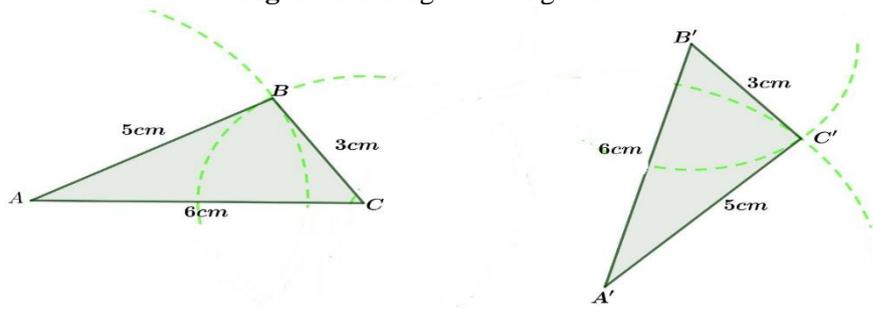
Os tópicos de congruências de triângulos e áreas foram baseados em Barbosa (2017). Nestes dois itens fizemos uma breve apresentação de alguns conceitos que irão auxiliar na Análise Documental do Teorema de Pitágoras provado por Teixeira Mendes.

Congruência de Triângulos

Com auxílio da régua e do compasso construa um triângulo com lados de 6cm, 5cm e 3cm, conforme figura 2.



Figura 2-Triângulos Congruentes.



Fonte: autores.

Ao comparar todos os triângulos construídos, torna-se evidente que todos eles merecem ser considerados idênticos. A única distinção entre eles reside na sua localização e orientação no espaço. Esta análise promove a concepção de igualdade entre triângulos, que é conhecida como “congruência”. Dois triângulos são ditos congruentes quando é possível movê-los no espaço sem qualquer deformação, até que coincidam perfeitamente com o outro triângulo.

Esta definição significa que para dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ serem congruentes, deve ser possível estabelecer uma correspondência $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B',$ e $C \leftrightarrow C'$ entre os seus vértices de modo que lados e ângulos de um triângulo sejam iguais a lados e ângulos correspondentes do outro triângulo. Ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{C}AB = \hat{C}'A'B'; \quad m(\overline{AB}) = m(\overline{A'B'}); \\ \hat{A}BC = \hat{A}'B'C'; \quad m(\overline{AB}) = m(\overline{A'B'}); \\ \hat{B}CA = \hat{B}'C'A'; \quad m(\overline{BC}) = m(\overline{B'C'}). \end{array} \right.$$

Conforme a definição apresentada, o estabelecimento da congruência entre dois triângulos requer a definição de uma correspondência entre seus vértices, seguida pela verificação das seis igualdades entre ângulos e lados. Agora, exploraremos os chamados "casos de congruência" que afirmam, em determinadas situações, a comprovação de apenas três dessas igualdades é suficiente, pois as outras três decorrem automaticamente delas.

Caso LAL (Lado-Ângulo-Lado): Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes congruentes e se os ângulos entre estes lados são congruentes, então os dois triângulos são congruentes. Se ΔABC e $\Delta A'B'C'$ são dois triângulos, então, em símbolos:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \hat{C}AB = \hat{C}'A'B' \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'.$$



Caso ALA (Ângulo-Lado-Ângulo): Se dois triângulos possuem um lado de mesma medida e os dois ângulos adjacentes a estes lados, então são congruentes, logo os dois triângulos são congruentes. Ou seja, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$, então:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'} \\ \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'.$$

Caso LLL (Lado-Lado-Lado): Se dois triângulos possuem os três lados ordenadamente congruentes, então eles são triângulos congruentes. Se ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos, então

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'.$$

Caso LAA (Lado-Ângulo-Ângulo oposto): Se dois triângulos possuem um lado, um ângulo adjacente a este lado e o ângulo oposto a este lado ordenadamente congruentes, então eles são triângulos congruentes. Então, ABC e $A'B'C'$ são dois triângulos e

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'} \\ \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'.$$

Observar que, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes então, de fato, eles possuem os três ângulos ordenadamente congruentes. Assim, pode-se comparar os casos de congruência entre ALA e LAA, concluindo que se dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes congruentes e um lado possui a mesma medida, então eles são congruentes.

Caso Cateto-Hipotenusa: Conforme apresentado nos casos anteriores podemos demonstrar que se dois triângulos retângulos possuem um cateto e a hipotenusa ordenadamente congruentes então eles são dois triângulos congruentes. De fato, suponhamos que ABC e $A'B'C'$ sejam dois triângulos retângulos em B e em B' tais que $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ e $\overline{BC} = \overline{B'C'}$.

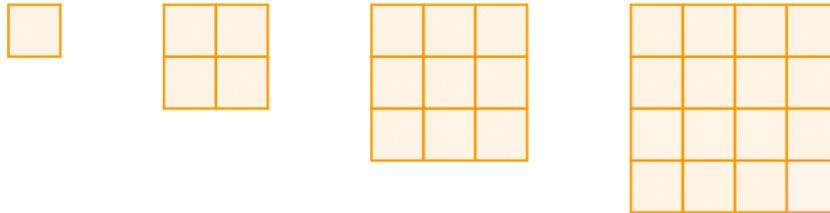
Área: conceito e áreas de figuras geométricas poligonais

No caso do conceito de área de figuras planas, a unidade de medida utilizada é um quadrado de lado 1 (fixada uma unidade de comprimento). Assim um quadrado de lado 1 tem, por definição, uma unidade de área. O cálculo de área de alguns quadrados cujos lados são números inteiros. Por exemplo, fazendo algumas figuras observa-se que o quadrado de lado 2 deve ter área 4, pois dentro dele cabem exatamente quatro quadrados



de lado 1. E o quadrado de lado 3 deve ter área igual a 9, pois nele cabem exatamente nove quadrados de lado 1, conforme observamos na figura 3.

Figura 3- Quadrados de lados iguais 1, 2, 3 e 4.



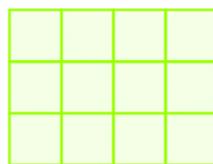
Fonte: Os autores.

Utilizar um argumento simples de contagem para mostrar que se um quadrado tem lado n , em que n é um número inteiro positivo, então a área do quadrado é igual a n^2 , pois dentro deste quadrado cabem exatamente n^2 quadrados de lado 1.

Podemos aproveitar esta ideia do cálculo da área de um quadrado de lado n para comentar as seguintes propriedades principais de área: a área é invariante sob movimentos rígidos no plano, ou seja, figuras congruentes possuem a mesma área; se uma figura for dividida em duas figuras disjuntas, então a soma das áreas destas duas figuras menores será igual à área da figura original.

A área de um retângulo cujos lados são números inteiros, como por exemplo, o retângulo $1 \times n$ deve ter área n , pois ele é formado por n quadrados unitários. O retângulo $2 \times n$ é formado por dois retângulos $1 \times n$. Assim sua área é $2n$. Procedendo desta forma, pode-se chegar a expressão nm para a área do retângulo $n \times m$. Em particular, o retângulo 3×4 da figura 4, tem área igual a 12 pois ele é formado por 12 quadrados unitários, ou por 3 retângulos 1×4 (três faixas horizontais).

Figura 4 - Retângulo formado por quadrados unitários.



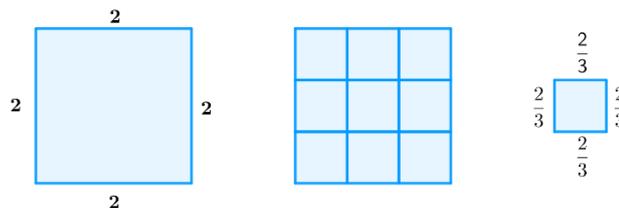
Fonte: Os autores.

Dessa forma a expressão nm é igual a área do retângulo $n \times m$. Quando $m = n$ a expressão n^2 é o valor da área de um quadrado que é um caso particular da expressão nm para a área de um retângulo. No caso em m e n não são inteiros, iremos exemplificar,



ou seja, a área do quadrado de lado $\frac{3}{2} = 1,5$, que consiste em juntar 4 quadradinhos de lado 1,5 obtendo um quadrado de lado 3. Isto nos diz que a área do quadrado de lado 1,5 é igual a $\frac{1}{4}$ da área do quadrado de lado 3. Como o quadrado de lado 3 tem área igual a $3^2 = 9$, concluímos que o quadrado de lado 1,5 tem área igual a $\frac{1}{4} \times 9 = \frac{9}{4}$. E como determinar a área do quadrado de lado $\frac{2}{3}$? Para se obter a área deste quadrado, podemos dividir cada lado de um quadrado de lado 2 em três partes, dividindo assim o quadrado de lado 2 em 9 quadrados de lado $\frac{2}{3}$ (conforme figura 5). Esta divisão nos mostra que a área do quadrado de lado $\frac{2}{3}$ é igual a $\frac{1}{9}$ da área do quadrado de lado 2. Como o quadrado de lado 2 tem área igual a 4, concluímos que o quadrado de lado $\frac{2}{3}$ tem área igual a $\frac{1}{9} \times 4 = \frac{4}{9}$.

Figura 5 - Área de quadrados cujo lado é um número racional.



Fonte: Os autores.

Resumindo os cálculos destes três exemplos obtemos que: o de lado $\frac{1}{2}$ tem área igual a $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$; o quadrado de lado $\frac{3}{2}$ tem área igual a $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$; o quadrado de lado $\frac{2}{3}$ tem área igual a $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

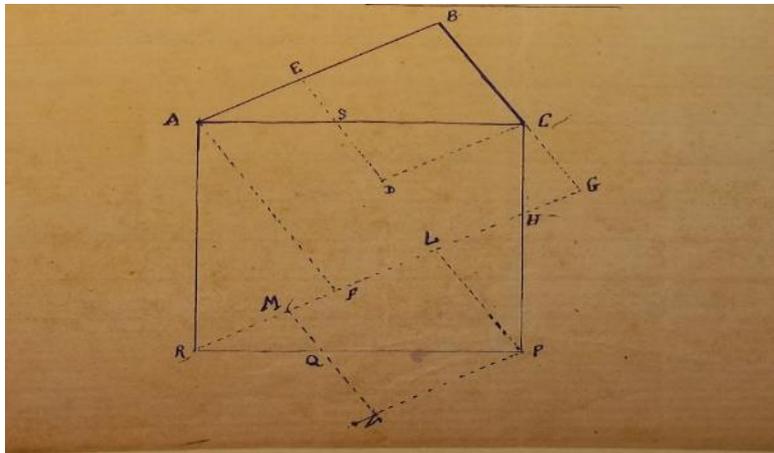
Em geral, a área do quadrado de lado x é igual a x^2 , para qualquer que seja o número real x . E a área de retângulos com lados de medidas reais x e y é igual a xy .

Análise documental da demonstração do Raimundo Teixeira Mendes

Com base nos documentos originais preservados no acervo do Museu Casa Benjamin Constant, apresentamos a construção e a demonstração do Teorema de Pitágoras elaboradas por Raimundo Teixeira Mendes, acompanhadas de análises detalhadas de cada etapa da demonstração.

Para dar início a essa análise, procedemos com a construção dos quadrados sobre os lados do triângulo retângulo ABC , de hipotenusa AC , conforme ilustrado na Figura 6. Tais quadrados são $ACPR$ de lado AC e área igual a $(AC)^2$, o quadrado de lado BC , mais precisamente, $BCDE$, de área igual $(BC)^2$ e finalmente o quadrado $ABGF$, de área igual a $(AB)^2$. Essa etapa inicial será para estabelecer as bases da demonstração do Teorema de Pitágoras, e sua representação visual facilita a compreensão dos passos subsequentes.

Figura 6 - Base da Construção para a prova do Teorema de Pitágoras.



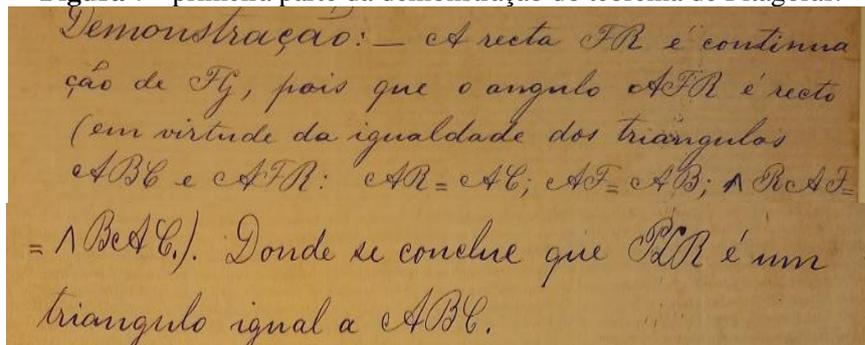
Fonte: Museu Casa de Benjamin Constant.

A demonstração do Teorema de Pitágoras, conforme apresentada por Teixeira Mendes, é realizada da seguinte maneira: começamos com um triângulo retângulo ΔABC , cujo ângulo \widehat{ABC} que é reto e construímos dois quadrados, um de lado \overline{AC} (denominado $ACPR$) e outro de lado \overline{BC} (identificado como quadrado $BCDE$), ambos construídos sobre os lados \overline{AC} e \overline{BC} do triângulo retângulo ΔABC . Em seguida, estabelecemos uma conexão entre os pontos F e R e traçamos uma reta paralela ao lado \overline{BC} , partindo do ponto P . Essa sequência de construções nos possibilita formar o quadrado $PLMN$. Por meio dessa cuidadosa construção, podemos demonstrar de maneira clara e rigorosa o Teorema de Pitágoras.



Prosseguindo com a análise, baseada na figura 6 retirada do acervo do Museu Casa Benjamin Constant, podemos observar o seguinte fato: a reta que passa pelos pontos R e F é uma extensão direta do segmento \overline{FG} , uma vez que o ângulo \widehat{AFR} é reto. Isso pode ser demonstrado através da congruência dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle AFR$, sendo \overline{AR} igual a \overline{AC} , \overline{AF} igual a \overline{AB} e o ângulo \widehat{RAF} correspondente ao ângulo \widehat{BAC} . Essa congruência nos leva à conclusão de que esses dois triângulos são idênticos, reforçando a fundamentação da demonstração do Teorema de Pitágoras.

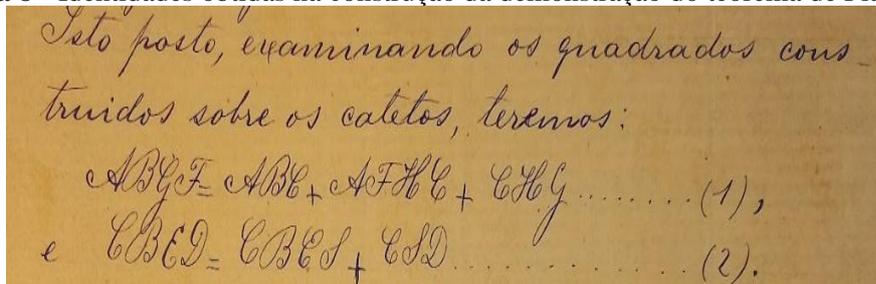
Figura 7 - primeira parte da demonstração do teorema de Pitágoras.



Fonte: Museu Casa de Benjamin Constant.

No contexto da figura 8, notamos que a área do quadrado $ABGF$ equivale à soma das áreas do triângulo $\triangle ABC$, do quadrilátero $AFHC$ e do triângulo $\triangle CGH$, o que resulta na igualdade expressa em (1). Adicionalmente, a área do quadrado $CBED$ se iguala à soma das áreas do quadrilátero $CBES$ e do triângulo $\triangle CSD$, estabelecendo a igualdade representada em (2).

Figura 8 - Identidades obtidas na construção da demonstração do teorema de Pitágoras.



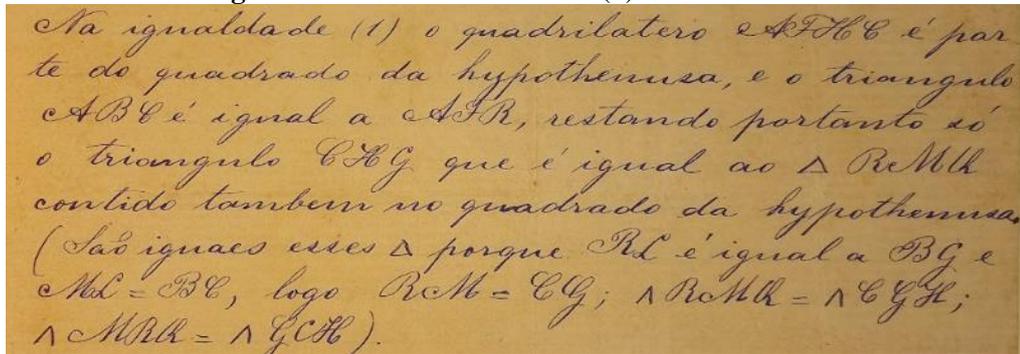
Fonte: Museu Casa de Benjamin Constant.

Na figura 8, podemos observar que na igualdade (1), a área do quadrilátero $AFHC$, juntamente com uma porção da área do quadrado $ABFG$, onde esse último tem um lado



de comprimento igual a \overline{AB} , que equivale à área do triângulo ΔABC , somada à área do quadrilátero $AFHC$, acrescida da área do triângulo ΔCHG .

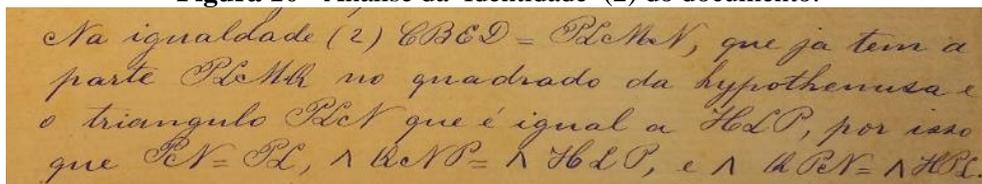
Figura 9 - Análise da Identidade (1) do documento.



Fonte: Museu Casa de Benjamin Constant.

Na figura 10, notamos que na identidade (2), os quadriláteros apresentam áreas idênticas, ou seja, a área do quadrilátero $CBED$ é igual à área do quadrilátero $PLMN$. Isso é uma consequência direta da construção realizada anteriormente pelo autor, na qual ambos os quadriláteros possuem a mesma medida de área. Esse resultado reforça ainda mais a validade do Teorema de Pitágoras, na construção passo a passo.

Figura 10 - Análise da Identidade (2) do documento.



Fonte: Museu Casa de Benjamin Constant.

Demonstração do Teorema de Pitágoras sob a ótica de Raimundo Teixeira Mendes comentada pelos autores.

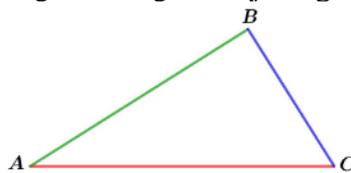
O GeoGebra é uma ferramenta educacional que combina geometria, álgebra, cálculo e outras áreas da matemática em um único ambiente interativo. Desenvolvido para tornar o ensino e a aprendizagem da matemática mais envolventes, o GeoGebra permite aos estudantes e professores que explorem conceitos matemáticos de maneira visual e dinâmica. Com sua interface amigável e recursos versáteis, o GeoGebra possibilita a criação de construções geométricas, gráficos de funções, cálculos simbólicos e até mesmo animações, tornando a matemática mais acessível e compreensível para todos os níveis de aprendizado. Essa ferramenta desempenha um papel fundamental na promoção da



educação matemática de qualidade em todo o mundo. Por meio dessa ferramenta educacional iremos fazer os passos da construção de Raimundo Teixeira Mendes reproduzindo a prova de acordo com os documentos originais obtidos no acervo do Museu Casa Benjamin Constant, mais precisamente no Fundo B.C. Série Instituto Politécnico Brasileiro BC/IPT, REG 533.

Na demonstração de Raimundo Teixeira Mendes o dado de entrada na construção é um triângulo retângulo qualquer ΔABC , cujo ângulo \widehat{ABC} é reto, conforme a figura 11.

Figura 11- Triângulo retângulo, cujo ângulo \widehat{ABC} é reto.



Fonte: Os autores.

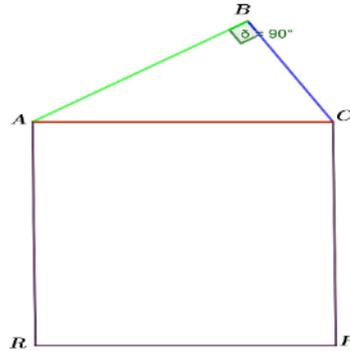
Neste contexto, nosso objetivo é a construção dos quadrados sobre os lados desse triângulo retângulo (figura 11), cuja hipotenusa é \overline{AC} . Esses quadrados são identificados como $ACPR$, com lado \overline{AC} e área de medida correspondente a $m(\overline{AC})^2$; note que o quadrado $BCDE$, com lado \overline{BC} e área igual a $m(\overline{BC})^2$; e, por fim, o quadrado $ABGF$, que possui uma área de medida $m(\overline{AB})^2$. Essa etapa inicial desempenha um papel crucial no estabelecimento das bases necessárias para a demonstração do Teorema de Pitágoras, conforme descrito por Teixeira Mendes. Vamos iniciar os passos da construção da demonstração do Teorema de Pitágoras:

O procedimento da construção de Teixeira Mendes dá-se com os dados de entrada, que é o triângulo retângulo ΔABC , cujo ângulo $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$,

- 1) Construa o quadrado $ACPR$ de lado \overline{AC} sobre a hipotenusa do triângulo retângulo ΔABC e observe que $m(ACPR) = m(AC)^2$.



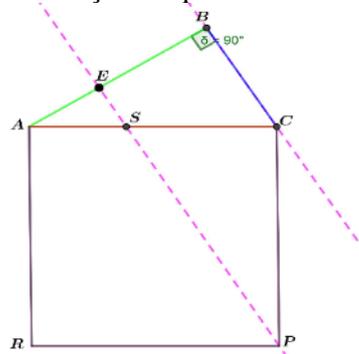
Figura 12 - Construção do quadrado ACPR.



Fonte: Os autores.

- 2) Marque um ponto E , no segmento AB , de modo que $m(\overline{BE}) = m(\overline{BC})$, em seguida trace uma reta paralela a reta suporte a (\overline{BC}) pelo ponto E , encontre S que é o ponto de interseção do lado \overline{AC} com a reta paralela a \overline{BC} , passando por E .

Figura 13 - Construção do quadrado EBCD (Passo 1).

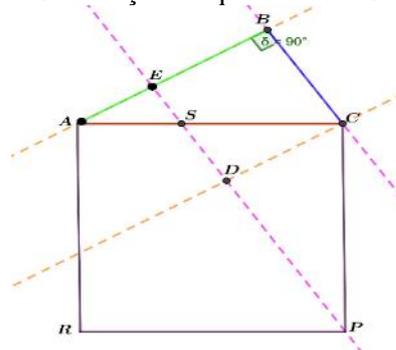


Fonte: Os autores.

- 3) Trace uma reta paralela à reta suporte \overline{AB} passando por C , obtendo o ponto D , na reta suporte \overline{ES} .

Observe que $m(EBCD) = m(\overline{BC})^2$ e $m(\overline{BC}) = m(\overline{BE}) = m(\overline{DE})$.

Figura 14 - Construção do quadrado EBCD (Passo 2).





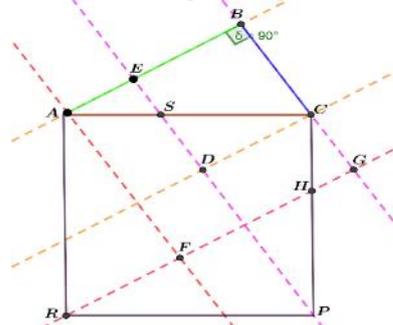
Fonte: Os autores.

- 4) Trace uma reta paralela à reta suporte \overline{BC} , passando por A e uma reta paralela à reta suporte \overline{AB} , passando por R . Encontre os pontos F, H e G .

Observe $m(ABGF) = m(\overline{AB})^2$.

- O ponto F é a interseção a reta que passa por A , paralela à reta suporte \overline{BC} e a reta que passa por R paralela a reta suporte \overline{AB} .
- O ponto H está na reta suporte \overline{CP} , interseção com a reta que passa por R paralela a reta suporte \overline{AB} e o ponto G é a interseção da reta que passa por R paralela a reta suporte \overline{AB} e a reta suporte \overline{BC} ;

Figura 15 - Construção do quadrado $ABGF$.

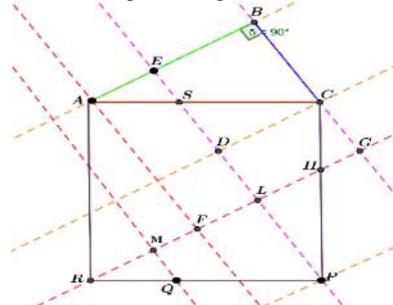


Fonte: Os autores.

- 5) Trace uma reta passando por P e paralela a reta suporte \overline{BC} , obtendo o ponto L na reta suporte \overline{FG} e o ponto M , na reta suporte \overline{FG} , tal que ,obtemos segmento \overline{LM} , cuja $m(\overline{LM}) = m(\overline{BC})$, conforme a figura 16.

Observe que $m(\overline{ML}) = m(\overline{EB}) = m(\overline{DC}) = m(\overline{BC}) = m(\overline{ED}) = m(\overline{LP})$.

Figura 16 - Construção do quadrado $MLPN$ (Passo 1).

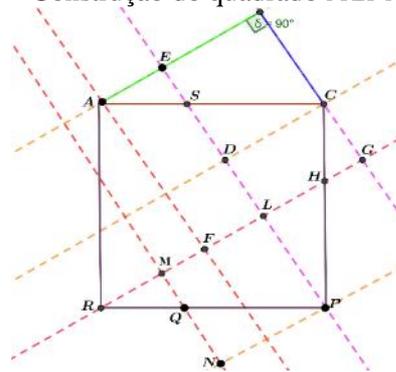


Fonte: Os autores.

- 6) Trace uma reta passando por M paralela a reta suporte \overline{LP} e outra passando por P paralela a reta suporte \overline{ML} , obtendo o ponto N .



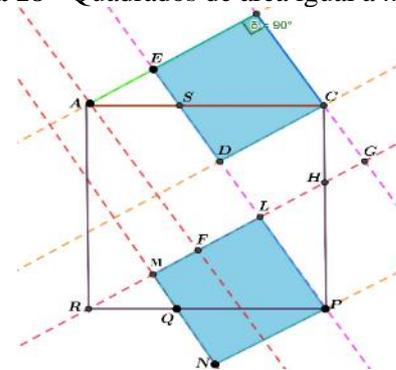
Figura 17 - Construção do quadrado $MLPN$ (Passo 2).



Fonte: Os autores.

Observe que $m(MLPN) = m(\overline{BC})^2$. Para ilustrar veja a figura 18.

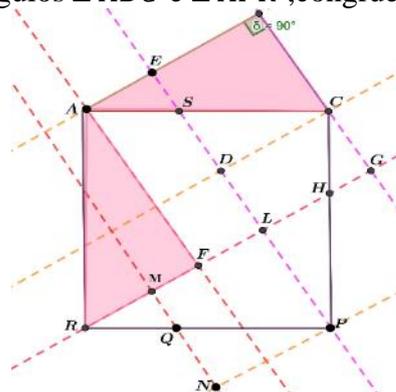
Figura 18 - Quadrados de área igual a $m(\overline{BC})^2$.



Fonte: Os autores.

Por meio da figura 19, as construções descrevem que os triângulos ΔABC e ΔAFR são congruentes pelo caso LAL , pois $m(\overline{AF}) = m(\overline{AB})$; $m(\overline{AR}) = m(\overline{AC})$ e $m(\widehat{RAF}) = m(\widehat{BAC})$. Logo, $\Delta ABC = \Delta AFR$ e $m = (\Delta ABC) = m(\Delta AFR)$.

Figura 19 - Triângulos ΔABC e ΔAFR , congruentes pelo caso LAL .

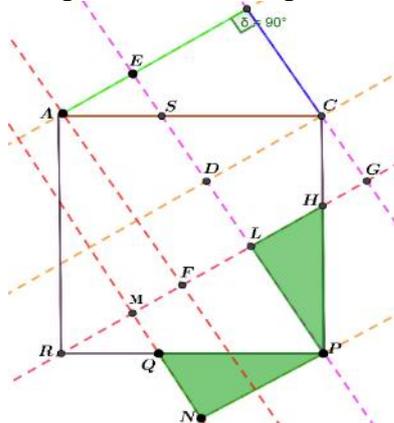


Fonte: Os autores.



Uma outra consideração da referida construção é que os triângulos $\Delta NQP = \Delta LHP$. Pois, $m(\overline{PN}) = m(\overline{PL})$, $m(\widehat{QNP}) = m(\widehat{HLP})$ e pelo caso *ALA*, temos que ΔNQP e ΔLHP são congruentes e $m(\Delta NQP) = m(\Delta LHP)$.

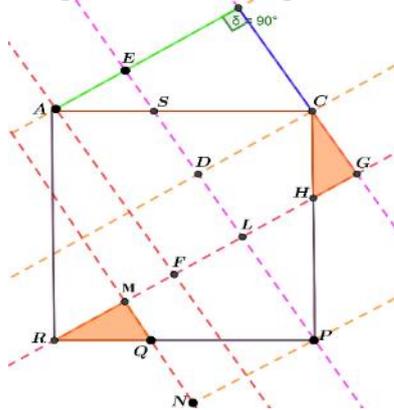
Figura 20 - Congruências dos triângulos ΔMQP e ΔLHP .



Fonte: Os autores.

Finalmente, os ΔCGH e ΔRMQ são congruentes, pois $m(\overline{RM}) = m(\overline{CG})$, $m(\widehat{RMQ}) = m(\widehat{CGH})$ e $m(\widehat{MRQ}) = m(\widehat{GCH})$ e pelo caso *LAA*, temos $\Delta CGH = \Delta RMQ$ e $m(\Delta CGH) = m(\Delta RMQ)$.

Figura 21 - Congruências dos triângulos ΔCGH e ΔRMQ .



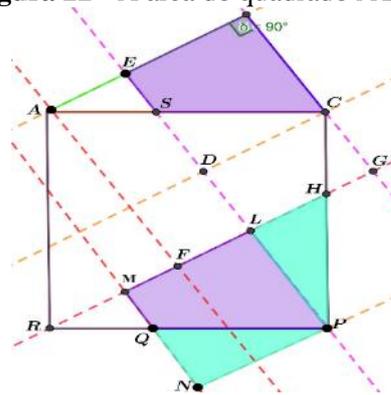
Fonte: Os autores.

Com relação a área do quadrado $EBCD$ a construção de acordo com a figura 18 indica que sua área é igual a área do quadrado $MLPN$.

Também temos, $m(MLPN) = m(\Delta NGP) + m(QMLP)$.

Mas por construção $m(QMLP) = m(EBCS)$ e $m(\Delta NQP) = m(\Delta LHP)$. Com isso concluímos, $m(\overline{BC})^2 = m(EBCD) = m(QMLP) + m(\Delta LHP)$.

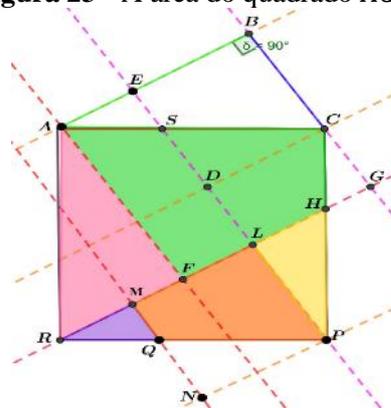
Figura 22 - A área do quadrado $MLPN$.



Fonte: Os autores.

A área do quadrado $ACPR$ sob a hipotenusa \overline{AC} é igual a
 $m(ACPR) = m(ACHF) + m(\Delta AFR) + m(\Delta RMQ) + m(MLPQ) + m(\Delta LHP)$.

Figura 23 - A área do quadrado $ACPR$.



Fonte: Os autores.

Como $m(ACPR) = m(\overline{AC})^2$ e $m(\overline{BC})^2 = m(QMLP) + m(\Delta LHP)$ então temos:

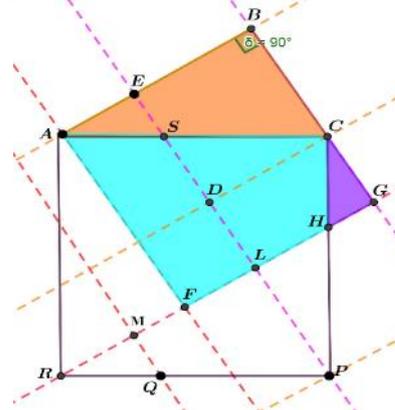
$$m(\overline{AC})^2 = m(ACHF) + m(\Delta AFR) + m(\Delta RMQ) + m(\overline{BC})^2. \quad (1)$$

A área do quadrado $ABGF$ é igual a $m(ABGF) = m(\overline{AB})^2$. Por outro lado $m(ABGF) = m(AFHC) + m(\Delta ABC) + m(\Delta CGH) = m(AFHC) + m(\Delta AFR) + m(\Delta RMQ)$, pois, $m(\Delta ABC) = m(\Delta AFR)$, e $m(\Delta CGH) = m(\Delta RMQ)$. Portanto,

$$m(\overline{AB})^2 = m(AFHC) + m(\Delta RMQ) + m(\Delta AFR). \quad (2)$$



Figura 24 - A área do quadrado ABGF.



Fonte: Os autores.

Substituindo (2) em (1) temos: $m(\overline{AC})^2 = m(\overline{AB})^2 + m(\overline{BC})^2$.

Considerações Finais

Através das investigações para realização deste trabalho nos deparamos com o personagem brasileiro que de acordo com o documento transcrito por Araújo Reis em 6 de maio de 1874, era aluno do Colégio Pedro II em 1870, que demonstrou o teorema de Pitágoras, aos dezesseis anos quando estudava no Colégio Dom Pedro II, instituição de ensino escolar atuante nos dias de hoje. O estudo histórico dos documentos que constam essa demonstração permite uma possibilidade do estudo das construções geométricas, conceitos de geometria plana unindo a história e a matemática. O uso da ferramenta Geogebra pode ser uma possibilidade de explorar e visualizar as construções desta demonstração histórica através desse aplicativo.

Referências

ROSA, Euclides. Mania de Pitágoras. **Revista do Professor de Matemática**, v. 02, p. 34-39, Rosa, 2007.

BARBOSA, João L. M. **Geometria Euclidiana Plana**, 11 ed. Rio de Janeiro, RJ. 2012.

MUSEU CASA DE BENJAMIN CONSTANT, **Ibram**. Fundo BC. Série Instituto Politécnico Brasileiro BC/IPB, REG 533.

Recebido em: 23 / 04 / 2024
Aprovado em: 20 / 12 / 2024