BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

e-ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v11i32.12445

O MÉTODO DA EXAUSTÃO E O USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS

THE EXHAUST METHOD AND THE USE OF DIGITAL TECHNOLOGIES

João Nazareno Pantoja Corrêa [1]; João Cláudio Brandemberg[2]

RESUMO

Neste trabalho abordamos a importância da compreensão dos processos matemáticos através da história. Objetivamos apresentar uma proposta de como métodos históricos podem ser associados com as Tecnologias Digitais. Para tanto, utilizamos o software de geometria dinâmica *Geogebra*, para explorar o método da exaustão desenvolvido por Eudoxo (408 - 355 a.C.) e refinado por Arquimedes (287 – 212 a.C.). Assim, iniciamos com um referencial histórico sobre o método da exaustão, em seguida apresentamos duas construções elaborada no software *Geogebra* que pode ser acessada por smartphone. Ao relacionar o método da exaustão com o *GeoGebra*, sugerimos que a combinação de métodos históricos com Tecnologias Digitais pode proporcionar uma abordagem mais prática e visual no ensino de Matemática, uma vez que manipulação direta de objetos através de *softwares* de geometria dinâmica pode ser um facilitador na compreensão e a análise imediata das construções visualizadas. Por fim, em nossas considerações, ressaltamos a importância de equilibrar o uso das Tecnologias Digitais com uma compreensão conceitual sólida, reconhecendo que o acesso fácil às ferramentas digitais não deve comprometer a compreensão profunda dos fundamentos matemáticos, e enfatizando que a interseção entre o histórico e o moderno pode aprimorar a compreensão da Matemática em resposta às inovações tecnológicas.
Palavras-chave: História da Matemática, Ensino de Matemática, Tecnologias Digitais, Método da Exaustão, *GeoGebra*.

ABSTRACT

In this work we address the importance of understanding mathematical processes through history. We aim to present a proposal on how historical methods can be associated with Digital Technologies. To this end, we used the dynamic geometry software Geogebra to explore the exhaustion method developed by Eudoxus (408 - 355 BC) and refined by Archimedes (287 - 212 BC). Thus, we begin with a historical reference on the exhaustion method, then we present two constructions created in the Geogebra software that can be accessed via smartphone. By relating the exhaustion method to GeoGebra, we suggest that the combination of historical methods with Digital Technologies can provide a more practical and visual approach to teaching Mathematics, since direct manipulation of objects through dynamic geometry software can be a facilitator in the understanding and immediate analysis of the visualized constructions. Finally, in our

[1] Mestrado em Ensino de Matemática pela Universidade do Estado do Pará (UFPA). Professor de Matemática vinculado à Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Lauro Sodré, 168, centro, Igarapé-Miri, Pará, Brasil, CEP: 68430-000. E-mail: joaonpcorrea@hotmail.com.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-1875-4711.

[2] Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professor Titular vinculado à Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Universidade Federal do Pará, Faculdade de Matemática - ICEN, Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110. E-mail: brand@ufpa.br.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8848-3550.

considerations, we highlight the importance of balancing the use of Digital Technologies with a solid conceptual understanding, recognizing that easy access to digital tools should not compromise the deep understanding of mathematical foundations, and emphasizing that the intersection between history and the modern can improve the understanding of Mathematics in response to technological innovations.
Keywords: History of Mathematics, Teaching Mathematics, Digital Technologies, Exhaustion Method, GeoGebra.

Introdução

A noção de processos que originaram conceitos avançados de Matemática proporciona uma compreensão mais aprimorada do conhecimento matemático essencial para o futuro professor atuar não apenas no ensino superior, mas também na educação básica. Ao explorar esses conceitos, o docente pode entrar em contato com problemas epistemológicos significativos nas abordagens convencionais, o que potencialmente resulta em uma discussão mais abrangente sobre o conhecimento a ser ensinado.

O estudo do desenvolvimento histórico de um conceito é crucial para entender as concepções desde o passado até a forma como as conhecemos atualmente. Isso proporciona a oportunidade de perceber as influências sofridas e as dificuldades enfrentadas na construção dos conceitos e teorias envolvidos, além de conhecer os contribuidores desse processo.

Atualmente, as Tecnologias Digitais oferecem a oportunidade utilizar uma abordagem mais prática, visual e interativa no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática através do uso de *softwares* de geometria dinâmica.

O método da exaustão, desenvolvido por matemáticos como Eudoxo e posteriormente aplicado por Arquimedes, é uma abordagem importante na Matemática que se concentra em lidar com quantidades infinitamente pequenas ou grandes através da consideração de aproximações sucessivas (Brandemberg, 2017).

Para os graduandos de Matemática estudar o método da exaustão de Eudoxo e de Arquimedes oferece uma perspectiva histórica valiosa e estabelece as bases para conceitos matemáticos fundamentais, contribuindo para o desenvolvimento contínuo da Matemática e suas aplicações.

A utilização de *softwares* de geometria dinâmica permite criar simulações interativas que podem representar visualmente o método da exaustão, ajudando na compreensão do método, bem como tornando o aprendizado mais envolvente, uma vez que a incorporação dessas tecnologias tem o potencial de dinamizar o processo de ensino e de aprendizagem, especialmente em contextos relacionados à experimentação, permitindo a apresentação mais eficaz de conceitos e teorias para a construção do conhecimento matemático (Corrêa; Brandemberg, 2022).

Nesse sentido, nosso texto foi elaborado com o propósito de apresentar uma proposta de como métodos históricos podem ser combinados com as Tecnologias Digitais, para tanto utilizamos os *softwares* de geometria dinâmica *Geogebra*, para explorar o método da exaustão de Eudoxo e de Arquimedes.

A Matemática grega e o método da exaustão

Historicamente, a busca pela quadratura de um círculo e de outras figuras curvas pode ser considerada como os primeiros passos em direção à construção do Cálculo Integral, uma vez que este está fundamentado na determinação de áreas e volumes de formas delimitadas por superfícies curvas (Brandemberg, 2017, p. 09). Assim, é possível afirmar que a teoria da integração tem suas raízes nos cálculos de áreas e volumes de figuras geométricas realizados na Grécia Antiga (Jahnke, 2003, p. 12).

As limitações conceituais aritméticas dos gregos impediam a associação direta de figuras geométricas com números para a medição de áreas e volumes. Nesse contexto, eles recorriam a aproximações diretamente ligadas a figuras conhecidas, considerando-as como magnitudes (grandezas). Esse método, conhecido como "método da exaustão," foi inventado por Eudóxo de Cnido (408-355 a.C.).

Eudóxo empregava fatias infinitamente finas para determinar áreas e volumes, utilizando esse método para deduzir que o volume de uma pirâmide ou cone é um terço da área da base multiplicada pela altura. Antes de Eudóxo, Antífona de Atenas (480-411 a.C.) é creditada por descobrir que a área de um círculo é equivalente à área de um triângulo com altura igual ao raio do círculo e base determinada pela circunferência do círculo (Bressoud, 2019).

O método da exaustão de Eudoxo foi aprimorado por Arquimedes (287 – 212 a.C.) com a proposta de calcular quadraturas (áreas) e cubaturas (volumes) por meio de figuras geométricas mais elementares. Esse método foi apresentado na obra "Elementos" de Euclides, na Proposição X.1, sendo denominado Princípio da Exaustão. Essa proposição afirma que uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente:

> Se de uma grandeza qualquer subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (Eves, 2004, p. 419, grifo nosso)

Segundo Wussing (1998, p. 47), no século XVII, quando se intensificava a busca por métodos infinitesimais, esse método recebeu o nome um tanto infeliz de método da exaustão (do latim *exhaurire*, esvaziar, esgotar). Além de aparecer no livro X dos Elementos, também aparece no livro XII com exemplos de aplicação do esgotamento a superfícies e sólidos como círculo, cone e esfera, entre outros.

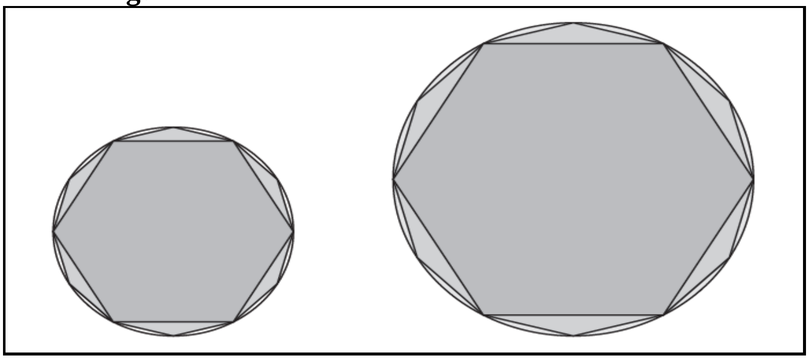
Utilizando notação moderna, o que Euclides estabelece nesta proposição é uma condição suficiente para que uma sequência convirja a 0. Podemos interpretar a proposição e sua demonstração, de acordo com Edwards (1994, p. 16), como mostramos a seguir:

Sejam M_0 e ϵ duas magnitudes (grandezas) positivas dadas tais que $M_0 > \epsilon$, e seja $M_0, M_1, M_2, \dots M_n, \dots$ uma sequência tal que $M_1 < \frac{M_0}{2}, M_2 < \frac{M_1}{2}, \dots, M_n < \frac{M_{n-1}}{2}, \dots$, então existe n tal que $M_n < \epsilon$. Isto é, em linguagem moderna, temos: $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$.

Dessa forma, o método da exaustão possibilitava a aproximação da área de uma figura dada mediante o uso de áreas e volumes conhecidos, por meio de polígonos inscritos e circunscritos à figura. Em outras palavras, ao buscar a área de uma circunferência, era necessário inscrever e circunscrever uma série de polígonos dentro e fora da circunferência. Isso ocorria porque as áreas dessas figuras já eram previamente conhecidas. Assim, construía-se uma sequência de polígonos de maneira que o último convergisse para a área da figura desejada, ou seja, a área da circunferência.

A seguir apresentamos um exemplo de aplicação do método da exaustão para o cálculo aproximado da área de um círculo:

Figura 01 - Método da Exaustão e a área do círculo



Fonte: Boyer (2012, p. 82)

Assim, podemos afirmar que, à medida que tanto o polígono inscrito quanto o circunscrito assumem um número infinito de lados, suas áreas convergem para a área do círculo. Todos os pontos desses polígonos estarão contidos dentro do círculo, e, portanto, nunca ultrapassarão a circunferência. Dessa maneira, o contorno da circunferência se torna o limite do polígono, seguindo uma analogia semelhante ao polígono circunscrito ao círculo. (Corrêa; Brandemberg, 2023)

Portanto, o círculo será limitado tanto por cima quanto por baixo, isto é, a área do círculo (A_C) irá convergir para um valor que estará entre a área do polígono regular circunscrito (A_{Pc}) e a área do polígono regular inscrito (A_{Pi}), assim temos:

$$A_{Pc} > A_C > A_{Pi}$$

Como evidenciado, a estratégia para calcular a área de um círculo baseava-se em aproximações, resultando em uma estimativa da área desejada. Esse procedimento era notavelmente trabalhoso, originando o termo "método da exaustão".

Nesse contexto histórico, o método da exaustão assumiu papel fundamental na resolução de problemas associados a quadraturas e cubaturas, especialmente aqueles envolvendo elementos infinitesimais. Representava uma abordagem de demonstração indireta, evitando a necessidade de uma continuação indefinida, que mais tarde exigiria a introdução do conceito contemporâneo de limite. Euclides e Arquimedes utilizaram amplamente o método da exaustão para garantir a precisão de seus resultados (Brandemberg, 2017, p. 17).

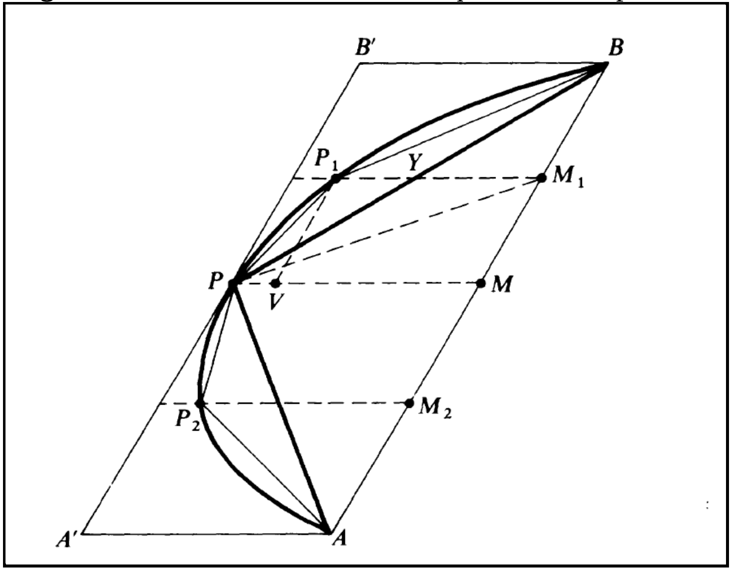
Atualmente, podemos escrever que a área do círculo A_C é igual ao limite da área do polígono de n lados $A_P(n)$, quando o n (números de lados) tende ao infinito, assim temos:

$$A_C = \lim_{n \to \infty} A_P(n)$$

Assim, confirmando que quando o polígono inscrito e circunscrito tende a infinitos lados, a área dos polígonos será igual a área do círculo.

Aproximadamente um século após Eudoxo, Arquimedes refinou essa metodologia, aplicando-a para calcular a área de uma região limitada por uma parábola e uma reta (quadratura da parábola), conforme podemos observar na figura 02. Ele conduziu tal cálculo por meio da soma de infinitos triângulos inscritos nessa região, destacando-se como o primeiro matemático a realizar uma soma envolvendo um número infinito de termos.

Figura 02 - Método da Exaustão e a quadratura da parábola



Fonte: Edwards (1994, p. 37)

Para alcançar a Quadratura da Parábola, Arquimedes empregou 24 proposições, nas quais demonstra por meio de dois métodos que a área delimitada por uma Parábola e uma linha reta equivale a 4/3 da área de um triângulo com a mesma base e altura. Arquimedes, desprovido das ferramentas contemporâneas, sustentou essa prova por meio de um duplo *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo), argumentando que se os polígonos esgotassem o segmento parabólico, então sua área não poderia ser nem maior nem menor que 4/3.

Para chegar a esse resultado, isto é, calcular a área da parábola, Arquimedes utilizou argumentos geométricos, bem como e a ideia de repetição do método da exaustão que era inscrever polígonos dentro da região que desejava ser calculada. Para tanto, utilizou um único polígono específico, o triângulo, de modo que ficou conhecido como método de triângulos inscritos.

O resultado pode ser obtido calculando o valor do que conhecemos hoje como uma série geométrica de infinitos termos com razão 1/4.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = 1 + 4^{-1} + 4^{-2} + 4^{-3} + \cdots = \frac{4}{3}$$

A abordagem fundamental adotada pelos antigos gregos naturalmente se alinha às modernas teorias de integração, utilizando retângulos em vez de triângulos para a estimativa de áreas.

Durante muitos séculos até a Renascença, notavelmente pouco foi adicionado ao corpo de conhecimento geométrico da antiguidade. No entanto, a partir do século XV, eventos de importância, como as grandes navegações, a invenção da imprensa e avanços tecnológicos, começaram a exercer influência sobre o desenvolvimento do Cálculo.

A partir do ano 1600, observou-se um ressurgimento dos conhecimentos antigos, marcado pela atuação de matemáticos eminentes em diversas áreas de estudo. Como será explorado a seguir, esses estudiosos deram início à formulação de suas próprias teorias.

Tecnologias Digitais e o método da exaustão

Como vimos anteriormente, Eudoxo utilizou o método da exaustão para calcular áreas de figuras, aproximando-as por meio de figuras conhecidas. Isso pode ser recriado digitalmente em *softwares* de geometria dinâmica, onde é possível representar figuras complexas por meio de polígonos regulares. Já Arquimedes utilizou o método da exaustão para calcular áreas sob curvas e volumes de sólidos.

Ao associar o método da exaustão com *softwares* de geometria dinâmica, é possível proporcionar uma abordagem mais prática, visual e interativa no ensino e aprendizado da Matemática, uma vez que *softwares* de geometria dinâmica permitem dividir uma figura em partes menores de maneira interativa, simulando digitalmente as subdivisões sucessivas.

Nesse sentido, a utilização de *softwares* de geometria dinâmica pode proporcionar a realização de experimentos que podem desenvolver no discente, entre outras habilidades, a de visualização, por meio da construção e movimentação das figuras, como corroboram Silva e Penteado (2009):

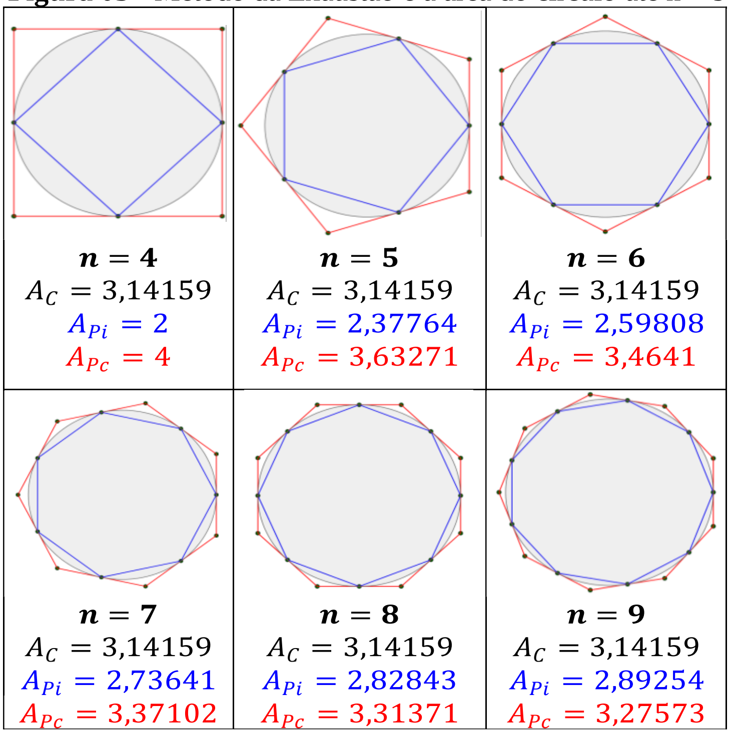
> Pode-se definir um ambiente de geometria dinâmica como um ambiente computacional que possui como característica principal o "arrastar" dos objetos pela tela do computador com o uso do mouse, possibilitando a transformação de figuras geométricas em tempo real. Os softwares de geometria dinâmica permitem aos estudantes criarem construções geométricas e manipulá-las facilmente (Silva; Penteado, 2009, p. 1069).

Afirmamos que mediante a manipulação direta de objetos por meio da interface computacional, há a perspectiva de viabilizar uma análise imediata da construção visualizada. Tal abordagem contribui de maneira significativa para o aprimoramento dos conceitos em estudo. Nota-se que as construções em ambientes de geometria dinâmica podem superar aquelas realizadas com lápis e papel, bem como as apresentadas em páginas de livros ou quadros, uma vez que estes apresentam figuras imutáveis e inalteráveis.

A escolha de um software está intimamente ligada à habilidade do professor em associar a tecnologia à sua proposta educacional, dependendo assim da sua capacidade de percepção, uma vez que a partir dele estas serão desenvolvidas com os discentes com fins educacionais (Tajra, 2001, p.74)

Nesse contexto, apresentamos o software de geometria dinâmica *GeoGebra*[3], onde podemos alterar parâmetros, observando como as áreas ou volumes se aproximam do valor real, facilitando a visualização do processo de exaustão e demonstrando como ele converge para o resultado desejado, levando possivelmente a compreensão do método, e ainda tornando o aprendizado mais envolvente através da interatividade, permitindo aos estudantes explorar e manipular figuras geométricas.

Figura 03 - Método da Exaustão e a área do círculo até n = 9



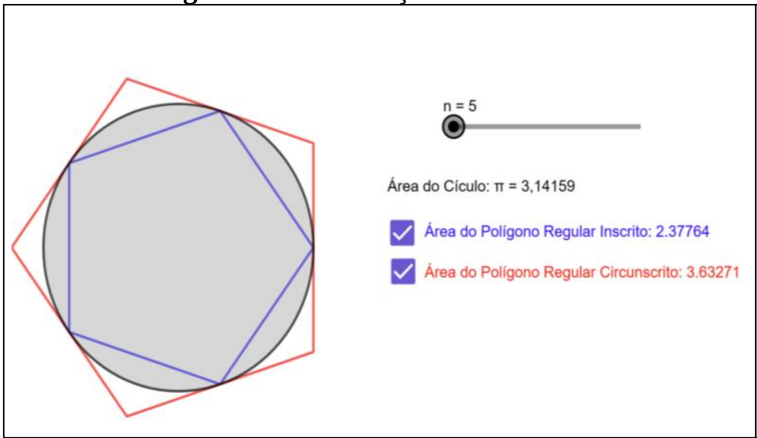
Fonte: Elaboração própria (2024)

[3] *Geogebra* Clássico 6. Disponível em: < https://www.geogebra.org/download> Acesso em: jan. 2023.

A aplicação do *GeoGebra*, assim como de outros recursos relacionados às Tecnologias Digitais, enfrenta desafios, como as dificuldades de adaptação por parte de muitos professores de Matemática, que acabam por evitar a incorporação de seus recursos em suas práticas. Contudo, em uma sociedade caracterizada pelo progresso tecnológico, a educação, desempenhando um papel crucial, não deve permanecer à margem desse desenvolvimento. Portanto, o uso de recursos tecnológicos é imperativo para os educadores, sendo responsabilidade destes buscar a apropriação do conhecimento para sua aplicação em sala de aula e além (Corrêa; Brandemberg, 2021).

Na tentativa de mitigar as possíveis dificuldades no manuseio do *GeoGebra*, na figura 04 apresentada a seguir, procuramos oferecer um exemplo de uma construção que poderá ser acessada utilizando QR code ou código QR[4] para o estudo da área do círculo.

Figura 04 - Construção no *GeoGebra* da área do círculo e QR Code



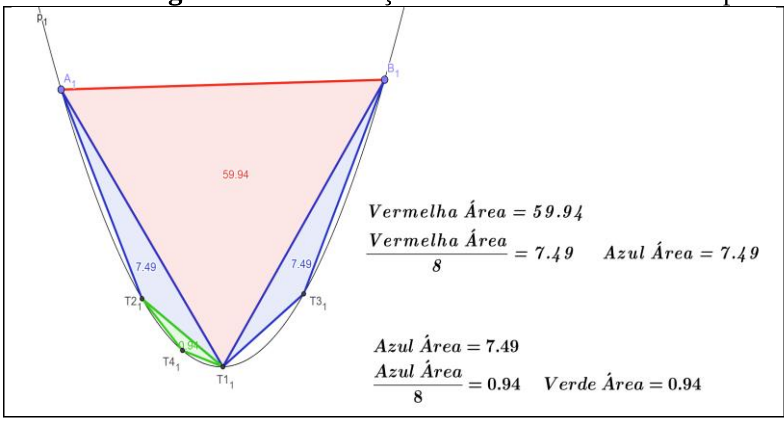
Fonte: Elaboração própria (2024)

Já para o estudo da área da parábola, na figura 05, procuramos oferecer uma construção que também poderá ser acessada utilizando QR Code. Nessa construção, temos um segmento parabólico que é a região delimitada por uma parábola e uma linha. Para encontrar a área de um segmento parabólico. Arquimedes considera um certo triângulo inscrito. A base deste triângulo é a corda dada da parábola, e o terceiro vértice é o ponto da parábola tal que a tangente à parábola nesse ponto é paralela à corda. Ao

[4] Representa a sigla de "Quick Response" que significa resposta rápida, assim QR Code significa Quick Response Code (código de resposta rápida), sendo um código de barras, que foi criado em 1994 pela empresa japonesa Denso-Wave. Disponível em: <https://codigosdebarrasbrasil.com.br/qr-code/>. Acesso em: jan. 2023.

mover os pontos A e B, poderemos observar os valores das áreas, percebendo que a área do triângulo azul é sempre 1/8 do vermelho e a área do triângulo verde é 1/8 do azul.

Figura 05 - Construção no *GeoGebra* da área da parábola e QR Code



Fonte: Elaboração própria (2024)

Ressaltamos, no entanto, que nossa intenção não é abranger todas as funções disponíveis nem fornecer um tutorial abrangente sobre os recursos ou ferramentas disponíveis. Em vez disso, buscamos destacar algumas das possibilidades existentes para a utilização do *GeoGebra* no ensino de Matemática, particularmente no contexto do estudo do método da exaustão.

Para a incorporação do *GeoGebra* em atividades com discentes, sugerimos que estes realizem as construções no software. Dessa forma, o *GeoGebra* pode se tornar uma ferramenta que contribui para o desenvolvimento de habilidades, incluindo a visualização por meio da manipulação das construções, promovendo uma exploração mais aprofundada dos conceitos geométricos para a aquisição e formalização desses conhecimentos.

Considerações Finais

Neste estudo, investigamos a relevância da compreensão dos processos matemáticos por meio de uma perspectiva histórica, enfocando o método da exaustão desenvolvido por Eudoxo e refinado por Arquimedes. Adicionalmente, propusemos a integração de métodos históricos com Tecnologias Digitais, empregando o software *GeoGebra* para visualizar o método da exaustão.

A combinação do método da exaustão com o *GeoGebra* revelou-se uma possibilidade para tornar o ensino e a aprendizagem da Matemática mais práticos, visuais e interativos. A utilização de *softwares* de geometria dinâmica possibilita a criação de simulações interativas, representando visualmente o método da exaustão e facilitando a compreensão imediata das construções Matemáticas.

Contudo, enfatizamos a importância de equilibrar o uso de Tecnologias Digitais com uma compreensão conceitual sólida, reconhecendo que o acesso fácil às ferramentas digitais não deve comprometer a compreensão profunda dos fundamentos matemáticos. A possível interseção entre conceitos históricos e aplicações modernas, exemplificada pela integração do método da exaustão com o *GeoGebra*, ilustra como as tecnologias podem contribuir com a compreensão da Matemática.

A história da Matemática grega, especialmente o desenvolvimento do método da exaustão, serve como uma base sólida para o entendimento dos conceitos matemáticos fundamentais. A abordagem de Eudoxo e Arquimedes, utilizando polígonos inscritos e circunscritos para calcular áreas e volumes, demonstra a sofisticação e a criatividade dos métodos antigos.

No entanto, reconhecemos os desafios enfrentados pelos educadores ao incorporar essas tecnologias em suas práticas pedagógicas. A resistência à adaptação e a falta de familiaridade podem representar obstáculos, mas é crucial superá-los para garantir que a educação Matemática acompanhe o progresso tecnológico da sociedade.

Em resumo, a integração do método da exaustão com as Tecnologias Digitais emerge como uma estratégia valiosa para enriquecer o ensino de Matemática. A interatividade proporcionada pelos *softwares* de geometria dinâmica abre novas possibilidades de exploração e compreensão, promovendo uma educação Matemática mais dinâmica e alinhada com as demandas contemporâneas.

Referências

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo. Edgar Blucher LTDA. 2012.

BRANDEMBERG, J. C. **Uma História da Integral:** de Arquimedes a Lebesgue. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2017. v. 01. 86p.

BRESSOUD, D. M. ***Calculus Reordered*:** A History of the big ideas, Princeton University Press, New Jersey, 2019.

CORRÊA, J. N. P.; BRANDEMBERG, J. C. Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação no Ensino de Matemática em Tempos de Pandemia: desafios e

Possibilidades. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 8, n. 22, p. 34–54, 2021. DOI: 10.30938/bocehm.v8i22.4176. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/4176. Acesso em: 03 nov. 2023.

CORRÊA, J. N. P.; BRANDEMBERG, J. C. Revisitando a história da teoria de integrais com vistas a um entendimento dos processos avançados de integração. **Cuadernos de Educación y Desarrollo**, *[S. l.]*, v. 15, n. 10, p. 12277–12303, 2023. DOI: 10.55905/cuadv15n10-120. Disponível em: https://ojs.europubpublications.com/ojs/index.php/ced/article/view/2087. Acesso em: 20 fev. 2024.

EDWARDS, C. H. . **The historical development of the calculus**. New York: Springer-Verlag, 1994.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora UNICAMP. 2004.

JAHNKE, H. N. **A history of analysis**. Translated from the german by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003.

SILVA, G. H. G.; PENTEADO, M. G. **O trabalho com geometria dinâmica em uma perspectiva investigativa**. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009, Curitiba. **Anais**... p. 1066-1079. Curitiba, PR: UTFPR, 2009.

TAJRA, S. F. **Informática na educação**. São Paulo, SP: Érica, 2001.

WUSSING, H. **Lecciones de Historia de las Matemáticas**. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1998.

Recebido em: 20 / 01 / 2024
Aprovado em: 10 / 03 / 2024