

## CONHECIMENTOS DE NATUREZA MATEMÁTICA MOBILIZADOS PELO USO DO OCTANTE REFLEXIVO DE JOHN HADLEY (1682-1744)

### KNOWLEDGE OF A MATHEMATICAL NATURE MOBILIZED BY THE USE OF JOHN HADLEY'S (1682-1744) REFLECTIVE OCTANT

Anna Beatriz de Andrade Gomes<sup>1</sup>; Giselle Costa de Sousa<sup>2</sup>

#### RESUMO

Desde tempos antigos, a matemática desempenha um papel crucial no desenvolvimento da sociedade. Estudos da História da Matemática apontam que a Matemática em si não era uma área institucionalizada até o século XIX, e, antes disso era utilizada em áreas que identificamos como na navegação, astronomia, engenharias, entre outras. Durante os séculos XVII e XVIII não foi diferente, a matemática, por exemplo, aparece associada à construção e uso de instrumentos utilizados para atender necessidades sociais, como no caso do desenvolvimento da navegação. Nesta ótica, o presente trabalho tem o objetivo de evidenciar alguns dos conhecimentos, com enfoque nos de natureza matemática, mas também outros como físicos e geográficos, que são mobilizados durante o uso do Octante Reflexivo de John Hadley (1682-1744). Para isso, foi realizada uma pesquisa qualitativa com procedimentos bibliográfico e documental, para a busca e levantamento de fontes que trouxessem dados sobre o contexto da navegação entre o século XVII e XVIII e para a apreciação de documentos, escritos pelos irmãos Hadley, sobre a manipulação do Octante na navegação. Como resultado, apresentamos uma história dos irmãos Hadley fazendo a ligação com o desenvolvimento do Octante Reflexivo, bem como alguns conhecimentos que advém do uso do mesmo, a exemplo de: a utilização de conceitos geométricos, como ângulos suplementares e complementares e internos e externos a um triângulo, bem como as propriedades das reflexões de espelhos e localização de navegações em alto mar.

**Palavras-chave:** História da Matemática, instrumentos, Octante Reflexivo, John Hadley, conhecimentos geométricos.

#### ABSTRACT

Since ancient times, mathematics has played a crucial role in the development of society. Studies on the History of Mathematics indicate that Mathematics itself was not an institutionalized area until the 19th century, and, before that, it was used in areas that we identify as navigation, astronomy, engineering, among others. During the 17th and 18th centuries it was no different, mathematics, for example, appears associated with the construction and use of instruments used

---

<sup>1</sup> Graduação em andamento pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Natal, RN, Brasil. Endereço para correspondência: Terceira Travessa da Floresta, 09, Nossa Senhora da Apresentação, Natal, RN, Brasil, CEP: 59114-003. E-mail: gomesbeatriz.anna@gmail.com  
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7642-45262>

<sup>2</sup> Doutora. Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Professora associada do DMAT (UFRN), Natal, RN, Brasil. Endereço para correspondência: Cirilo Moreira, 261 – Nazaré, Natal, RN, Brasil, CEP: 59062-130. E-mail: gisellematufrn@gmail.com  
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0213-4179>



to meet social needs, as in the case of the development of navigation. From this perspective, the present work aims to highlight some of the knowledge, with an approach of a mathematical nature, but also others such as physical and geographic, which are mobilized during the use of John Hadley's Reflective Octant (1682-1744). To this end, qualitative research was carried out using bibliographic and documentary procedures, to search and survey sources that provided data on the context of navigation between the 17th and 18th centuries and to evaluate documents, written by the Hadley brothers, on the manipulation of Octante in navigation. As a result, I presented a story about the Hadley brothers making the connection with the development of the Reflective Octant, as well as some knowledge that comes from its use, such as: the use of geometric concepts, such as supplementary and complementary angles and internal and external angles. a triangle, as well as the properties of mirror reflections and location of navigation on the high seas.

**Keywords:** History of Mathematics, instruments, Reflective Octant, John Hadley, geometric knowledge.

## **Introdução**

A História da Matemática possui diversas narrativas que perpassam séculos de contribuições que ajudaram na constituição do mundo em que vivemos. Entretanto, a área Matemática só veio a ser institucionalizada como área autônoma por volta do século XIX, como apresenta Saito (2018). Ou seja, a produção do conhecimento matemático não foi desenvolvida na intenção de estruturar a ciência conhecida hoje como Matemática antes desse período. Na verdade, esse conhecimento se entrelaça com o desenvolvimento de várias áreas conhecidas hoje com Astronomia, Geografia, Engenharia, Física, entre outras, como apresenta Saito (2018):

A ‘matemática’, como área autônoma e unificada de ‘conhecimentos matemáticos’, só se institucionalizou em finais do século XIX. Antes disso, esses conhecimentos matemáticos encontravam-se ‘pulverizados’ e eram parte integrante de outros segmentos de saber, tais como a astronomia, a agrimensura, a música, a hidrostática, a pneumática, a mecânica etc., que eram conhecidas como ‘matemáticas’ (Saito, 2018, p. 609).

Uma dessas áreas foi a Navegação, principalmente pelas expansões marítimas e territoriais ao longo dos séculos. Dentre os desenvolvimentos advindos de estudos voltados para a Navegação, estão os relativos aos instrumentos matemáticos, que, segundo Saito (2016), são ferramentas utilizadas para fazer observações e experimentos<sup>3</sup>, ou até mesmo instrumentos utilizados para medição de grandezas como comprimento, peso, temperatura, força, e entre outros.

Para esta pesquisa, demos enfoque ao instrumento intitulado Octante Reflexivo, desenvolvido por John Hadley (1682-1744), com ajuda dos seus irmãos Henry Hadley

---

<sup>3</sup> Ou seja, utilizados para fazer testes e observações para verificar acontecimentos em uma determinada condição.



(1697 – 1771) e George Hadley (1685-1768). O Octante Reflexivo é um instrumento de reflexão utilizado na navegação para encontrar a altitude de astros, ou seja, a altura do astro em relação ao horizonte.

Nesta ótica, o presente trabalho apresenta os resultados parciais de uma pesquisa de mestrado desenvolvida no Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências Naturais e Matemática (UFRN), que almeja a produção de um produto educacional fundamentado na aliança entre História da Matemática e Tecnologias Digitais por meio da utilização de instrumentos matemáticos em sala de aula. Assim, o objetivo desse artigo é evidenciar alguns dos conhecimentos que foram identificados, dando enfoque nos de natureza matemática, mobilizados pelo uso do Octante Reflexivo de John Hadley, bem como, os processos contextuais histórico-matemáticos em torno do mesmo. A fim de alcançá-lo adotamos abordagem metodológica qualitativa com procedimentos bibliográficos e documentais que serão detalhados adiante.

Para a estruturação deste trabalho, temos as seguintes seções: a introdução, que é apresentada na seção atual; o percurso metodológico, evidenciando os caminhos trilhados para o desenvolvimento desta pesquisa, bem como os procedimentos utilizados; os resultados e discussões, separados em duas subseções sobre a influência do John Hadley e seus irmãos, George Hadley (1685-1768) e Henry Hadley (1697-1771) na produção e os apontamentos acerca de alguns conhecimentos mobilizados por meio do uso do Octante Reflexivo; e, por fim, as considerações finais, fazendo uma breve retomada sobre o trabalho e caminhos futuros a serem seguidos.

Diante dito, seguimos para a segunda seção do trabalho, o percurso metodológico.

### **Percurso metodológico**

Conforme mencionado, esta pesquisa foi desenvolvida por meio de uma abordagem qualitativa com características bibliográficas e documentais. Gibbs (2009) afirma que a pesquisa qualitativa visa descrever e, às vezes, explicar, certos fenômenos de diversas maneiras como analisar experiências de indivíduos ou grupos, examinar interações em desenvolvimento ou investigar documentos, a exemplo de textos, filmes, imagens ou músicas.

Para o início da pesquisa, utilizamos a pesquisa bibliográfica. Segundo Macedo (1995) a pesquisa bibliográfica refere-se à seleção e revisão de bibliografias como livros,



artigos, trabalhos, teses, e outros, para que os mesmos, mais a frente, auxiliem na produção da pesquisa, dando embasamento teórico e não redundante (Macedo, 1995). Nesta ótica, a pesquisa bibliográfica entra com o objetivo de contextualizar o período histórico no qual foi desenvolvido o Octante Reflexivo, a exemplo dos motivos que levaram o instrumento a ser desenvolvido, bem como na intenção de entender o funcionamento do Octante para o seu uso durante as viagens marítimas entre os séculos XVII e XVIII. Além disso, ela nos dá indícios dos documentos a serem usados na pesquisa documental que nos permitem obter evidências inerentes ao instrumento e seus autores em seu contexto.

Desse modo, realizamos o levantamento de bibliografias, na procura de fontes em repositórios físicos e digitais em busca de livros, imagens e vídeos, como também em sites de busca, como Google Acadêmico, Google Books, Journal Storage (JSTOR) e outros, e em bibliotecas virtuais, como a Biblioteca Nacional da França, Biblioteca Britânica, Europeia, Museu Galileo e a Biblioteca Gallica. Deste levantamento, encontramos as fontes apresentadas no seguinte quadro (Quadro 1).

**Quadro 1:** Documentos levantados na pesquisa bibliográfica

BIBLIOGRAFIA	AUTOR (ANO)	DISPONÍVEL EM
A Complete Epitome of Practical Navigation	Norie (1828)	Link do Ebook: <a href="https://research.mysticseaport.org/item/1013617/1013617-c025/">https://research.mysticseaport.org/item/1013617/1013617-c025/</a>
Biographical account of John Hadley, Esq. V.P.R.S., the inventor of the quadrant, and of his brothers George and Henry	Rigaud (1835)	Link do Ebook: <a href="https://play.google.com/books/reader?id=ACoG1RsxXsUC&amp;pg=GBS.PP18&amp;hl=pt">https://play.google.com/books/reader?id=ACoG1RsxXsUC&amp;pg=GBS.PP18&amp;hl=pt</a>
The Nautical Magazine: A Journal of Papers on Subjects Connected with Maritime Affairs	Brown, Son and Ferguson (1870)	Link do Ebook: <a href="https://books.google.com.br/books/about/The_Nautical_Magazine.html?id=JIYEAAAQAQAJ&amp;redir_esc=y">https://books.google.com.br/books/about/The_Nautical_Magazine.html?id=JIYEAAAQAQAJ&amp;redir_esc=y</a>
The influence of the Royal Observatory at Greenwich upon the design of 17th and 18th century angle-measuring instruments at sea	Stimson (1976)	Link para o PDF: <a href="http://coastalboating.net/Resources/Navigation/Celestial/pix/StimsonNav.pdf">http://coastalboating.net/Resources/Navigation/Celestial/pix/StimsonNav.pdf</a>
Animate It - Octant	History of Science Museum (2015)	Link do vídeo: <a href="https://www.youtube.com/watch?v=iiCY94LMBVg">https://www.youtube.com/watch?v=iiCY94LMBVg</a>

**Fonte:** Elaborado pelas autoras (2023)

A partir da bibliografia apresentada foi possível encontrar informações sobre os autores e contexto de produção. Além disso, chegamos até os três documentos escritos

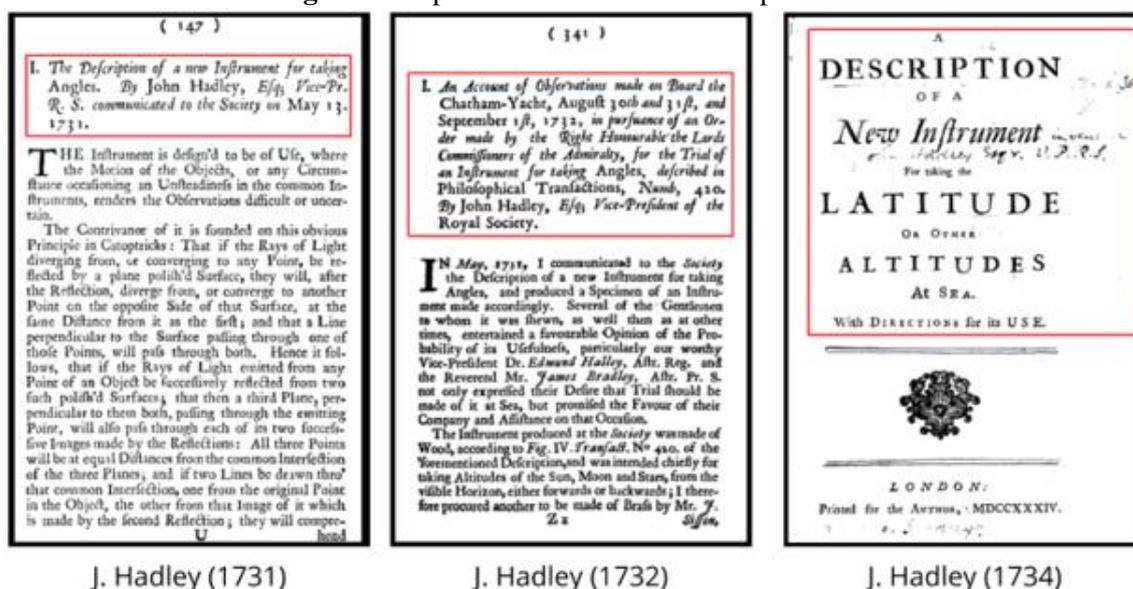


pelos irmãos Hadley sobre o Octante. Desse modo, partimos para pesquisa documental realizando apreciação desses documentos com olhar ao texto e contexto, auxiliado pelas bibliografias já obtidas.

O primeiro documento encontrado foi o artigo *A description of a new instrument for taking angles*<sup>4</sup>, escrito por John Hadley em 1731. O segundo foi *An Account of Observations Made on Board the Chatham-Yacht, August 30th and 31st, and September 1st, 1732, in Pursuance of an Order Made by the Right Honourable the Lords Commissioners of the Admiralty, for the Trial of an Instrument for Taking Angles. Philosophical Transactions*<sup>5</sup>, também escrito por John Hadley em 1732. Os documentos foram encontrados no site da *The Royal Society*<sup>6</sup>, instituição da época responsável pela publicação dos referidos artigos.

Já o terceiro documento é intitulado *A description of a new instrument invented by John Hadley for taking the latitude or other altitudes at sea: with directions for its use with George Hadley*, escrito pelo irmão do John Hadley, George Hadley, em 1734. Não há acesso livre deste documento na *internet*. O acesso foi solicitado e disponibilizado pela Biblioteca Britânica, por meio do e-mail. A seguir, na Figura 1, temos a capa com o título de cada documento que, neste artigo, também optamos por chamar de fontes da pesquisa.

Figura 1: Capa inicial dos documentos apreciados



<sup>4</sup> Link de acesso: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1731.0025>

<sup>5</sup> Link de acesso: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1731.0061>

<sup>6</sup> Sociedade científica do Reino Unido criada em 1660 com o objetivo de promover financiamento e divulgação científica criada em 1660 e com funcionamento até os dias de hoje (The Royal Society, 2023).



**Fonte:** Adaptado de J. Hadley (1731, p. 147), J. Hadley (1732, p. 341) e G. Hadley (1734, s.p.)

A primeira fonte, J. Hadley (1731), refere-se ao primeiro documento encontrado, até agora, sobre a ideia do Octante Reflexivo que foi publicado em 1731 pela *The Royal Society*. O documento consiste em um artigo de 14 páginas, sendo, as 3 primeiras, anexos que são citados durante a leitura do artigo, e, as outras 11 (das páginas 147 a 157), constituem o corpo do texto. No artigo, o autor apresenta algumas definições e propriedades que são utilizadas no funcionamento do instrumento, tanto de natureza física como matemática, além da sua funcionalidade.

Já a segunda fonte, J. Hadley (1732), também se trata de um artigo escrito por Hadley, porém, neste, o autor foca mais no teste do instrumento durante uma viagem marítima juntamente com os seus irmãos e alguns membros da *The Royal Society*. O artigo possui 16 páginas (da página 341 a 356). No corpo do artigo, o autor apresenta tabelas e relatos sobre a experiência de testar o Octante Reflexivo durante uma viagem marítima. Nessas tabelas, há várias anotações feitas pelos integrantes desse grupo.

Por fim, a terceira fonte, G. Hadley (1734), refere-se a um livro escrito pelo George Hadley, irmão do John Hadley. O livro contém 31 páginas, sendo a primeira um anexo da imagem do Octante Reflexivo (identificada como Figura 2 na seção seguinte) e as outras 30, o corpo do texto. Assim como a primeira fonte, esta terceira apresenta um pouco mais sobre o instrumento, porém, esse é mais focado em direcionamentos para o seu uso, ou seja, como posicionar o instrumento corretamente para tomar os ângulos, ajustes para os espelhos, os materiais que eram compostos os elementos do Octante, e, também, algumas das vantagens de usar o instrumento em vez dos outros que haviam na época.

Para as duas próximas seções, apresentaremos os dados levantados em conjunto com os resultados obtidos na apreciação destes 3 documentos citados anteriormente. Consistem no levantamento feito sobre a história dos irmãos Hadley e a produção do Octante, em confronto com os documentos produzidos.

### **Desenvolvimento do Octante Reflexivo pelos irmãos Hadley**

Entre os séculos XV e XVII, a Europa foi palco para grandes avanços do conhecimento científico conhecidos hoje como astronomia, engenharia, matemática,



física, e entre outros. Segundo Santos e Pereira (2022), a Inglaterra fez investimentos nos estudos das matemáticas no século XVII, e muita das vezes, voltados para a parte prática das matemáticas e isso se deve ao desenvolvimento do comércio do país na época.

Dentre esses estudos citados, destacamos os voltados para a produção de instrumentos matemáticos, a exemplo da Balestilha, o Astrolábio Náutico, o Sextante, o Octante Reflexivo<sup>7</sup> e entre outros. No presente trabalho, focaremos no Octante Reflexivo, instrumento matemático desenvolvido pelos irmãos Hadley entre os séculos XVII e XVIII. Ao falar dos irmãos Hadley, nos referimos ao John Hadley (1682-1744), George Hadley (1685-1768) e Henry Hadley (1697-1771), que eram estudiosos matemáticos ingleses, membros da *The Royal Society*, e produziram trabalhos voltados para a produção e uso do Octante Reflexivo no âmbito da navegação. No que se tem registro até agora, John Hadley foi o primeiro dos irmãos a publicar um artigo sobre o Octante Reflexivo, em 1731, mais precisamente sobre os conhecimentos científicos mobilizados pelo mesmo e, além disso, em 1732, também fez outra publicação, porém, desta vez, sobre uma viagem marítima no intuito de fazer testes com o instrumento.

George Hadley também fez uma publicação de um livro, em 1734, sobre o uso do Octante Reflexivo, mas sem a parte mais teórica dos conhecimentos por trás do uso e sim sobre orientações de manuseio. Não há registros até o momento sobre alguma produção sobre o instrumento por parte do Henry Hadley, entretanto, o mesmo é citado em J. Hadley (1732), onde é um dos participantes das observações tomadas pelo Octante em auto mar.

Dos documentos produzidos pelos irmãos Hadley reunidos até agora, entendemos que o Octante Reflexivo é um instrumento desenvolvido entre os séculos XVII e XVIII, que, segundo J. Hadley (1731), tem a função de encontrar a altitude do sol, da lua ou de qualquer estrela visível a olho nu, encontrando a distância angular entre o horizonte e o astro desejado. De acordo com os documentos escritos pelos irmãos Hadley<sup>8</sup>, o Octante consiste em uma estrutura de madeira no formato de um arco de 45°, como mostra a Figura 2, a seguir.

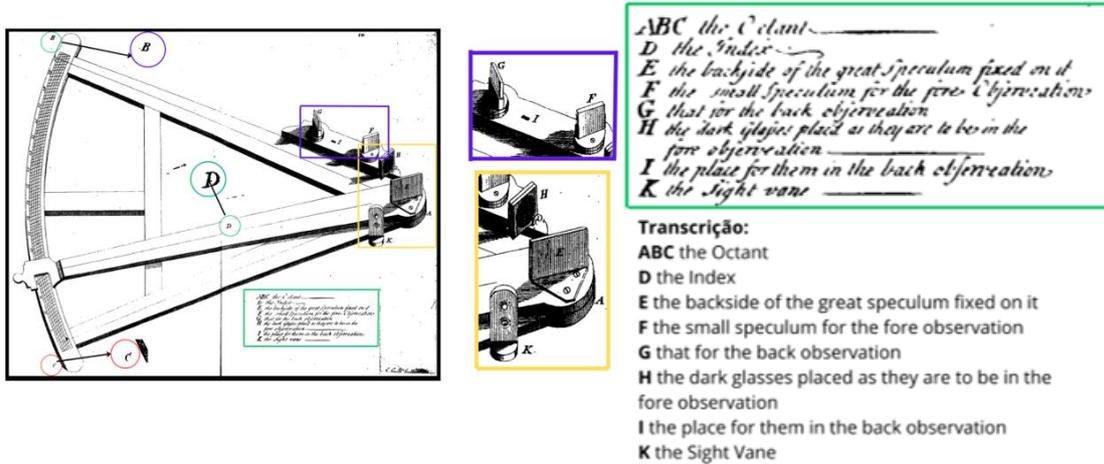
---

<sup>7</sup> Dos instrumentos citados (Balestilha, Astrolábio Náutico, Sextante e Octante Reflexivo), todos eram utilizados para calcular a distância entre o horizonte e um astro ou até mesmo entre dois astros, porém, possuíam estruturas diferentes. No caso do sextante e do octante, tinham a mesma estrutura, porém, arcos de tamanhos diferentes.

<sup>8</sup> J. Hadley (1731), J. Hadley (1732) e G. Hadley (1734).



Figura 2: O Octante Reflexivo



Fonte: Adaptado de G. Hadley (1734, s.p.)

A Figura 2 apresenta a estrutura do Octante Reflexivo, juntamente com os elementos que o compõe, e a descrição desses elementos. Esta imagem pode ser encontrada na terceira fonte, escrita por George Hadley e ela foi escolhida para uma explicação mais aprofundada do instrumento por ser uma fonte mais recente, comparada as outras duas a qual temos acesso, e, também, por apresentar mais informações sobre cada elemento. Adaptamos a imagem para melhor visualização tanto dos elementos quanto da legenda presentes.

Na legenda, inicialmente, temos a estrutura que sustenta o Octante, representada pelas letras **ABC**. Segundo G. Hadley (1734), essa estrutura é feita de latão e tem o formato de um arco de 45°. O elemento **D** é o indicador de ângulos, que marca o ângulo tomado quando o instrumento é utilizado para fazer as observações. Os elementos **F** e **E** são os espelhos utilizados para ter uma visão dos feixes de luz emitidos pelo astro. O elemento **H** consiste na junção de dois vidros escuros, para fazer observações de astros que emitem luz mais forte.

O pino observador é representado pela letra **K** e é usado para posicionar o olho na hora da observação. Há dois buracos no pino para alinhar, um com o horizonte e o outro com a imagem da estrela refletida no espelho. Os elementos **G** e **I** são utilizados para observações posteriores, que, no momento, não serão abordados ainda por falta de informações suficientes sobre como tomar observações utilizando esses elementos.



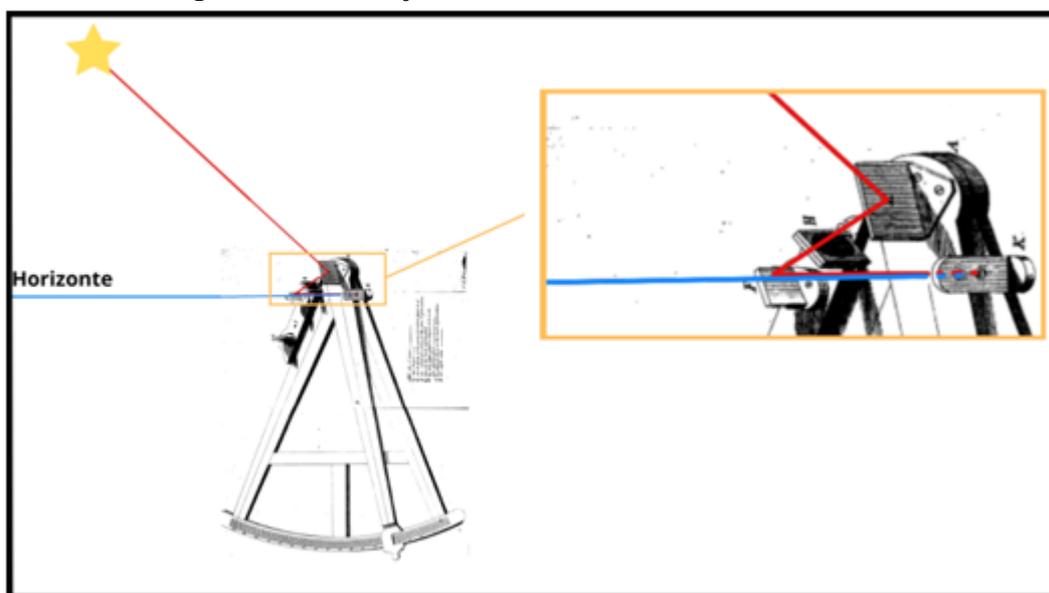
Ao estudarmos sobre o Octante Reflexivo observamos que o mesmo utiliza algumas propriedades de conhecimentos de natureza físicos e matemáticos que serão evidenciados na seção a seguir.

### **Conhecimentos de natureza matemática mobilizados por meio do uso do Octante Reflexivo**

Nesta seção, iremos abordar um pouco mais dos conhecimentos de natureza matemática que são mobilizados durante o uso do Octante Reflexivo. Para isto, também iremos mencionar outros conhecimentos que também emergem durante sua utilização, a exemplo dos físicos, a partir da reflexão que ocorre com a luz dos astros entre os dois espelhos fixados ao instrumento. Vale salientar que os dados apresentados aqui foram gerados por um confronto das informações levantadas nos 3 documentos, escritos pelos irmãos Hadley, juntamente com as bibliografias reunidas, citadas anteriormente.

Para entender os conhecimentos em torno do uso do Octante, iremos, primeiro, compreender como o instrumento é posicionado pelo observador. Segundo G. Hadley (1734), o arco de  $45^\circ$  deve ser voltado para baixo e, o olho do observador, deve ser posicionado no pino observador. Dessa maneira, deve-se mexer o indicador de ângulos até encontrar o astro do qual quer ser calculada a distância angular, como mostra a Figura 3 a seguir.

**Figura 3:** Visualização do astro utilizando o Octante Reflexivo

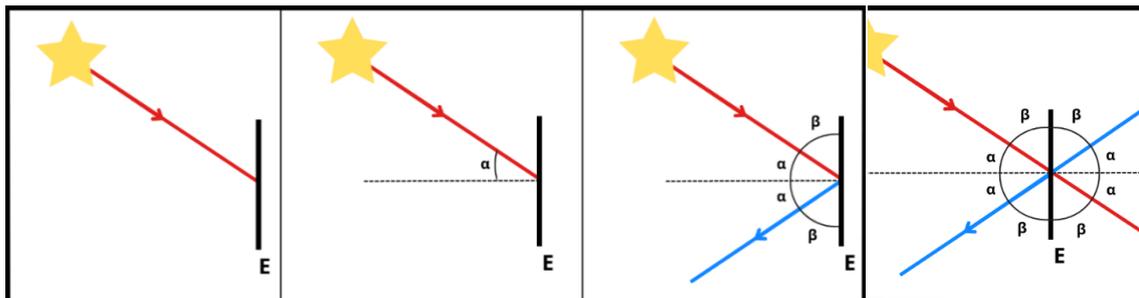


**Fonte:** Adaptado de G. Hadley (1734)



Ao posicionar os olhos no pino observador **K**, temos dois segmentos de reta, uma azul e uma vermelha. Elas representam a direção em que deve ser posicionado o olhar do observador. O segmento azul representa a visão do olhar em direção ao horizonte. Já o vermelho representa a visão indo em direção ao espelho **F**, que, conseqüentemente, está recebendo o feixe de luz que vem do astro, do espelho **E**. O esquema que representa a reflexão entre os espelhos é mostrado na Figura 4 adiante.

**Figura 4:** Esquema da reflexão do astro com o primeiro espelho E



Fonte: Elaborado pela autora (2023)

Ao encontrar o astro desejado, a fim de calcular a distância angular entre o horizonte e a estrela, temos um caso de dupla reflexão entre os espelhos presentes no Octante. Inicialmente, um feixe de luz, que advém do astro, vai em direção ao primeiro espelho, **E**, virando o feixe incidente<sup>9</sup>, e este feixe irá ricochetear<sup>10</sup> o espelho, formando um ângulo  $\alpha$ . Depois disso, temos o segmento azul, formando o feixe refletor<sup>11</sup>. Segundo Halliday e Resnick (2010), quando há uma reflexão em um espelho e consideramos essa linha tracejada como perpendicular ao espelho (ou seja, formando um ângulo de  $90^\circ$ ), o feixe refletor formará o mesmo ângulo do feixe incidente, ou seja, nesse caso,  $\alpha$ .

Dessa maneira, se a linha tracejada forma um ângulo de  $90^\circ$  e o feixe incidente e o feixe refletor formam o mesmo ângulo  $\alpha$ , temos que o ângulo adjacente a eles, nesse caso  $\beta$ , também será igual para os dois tipos de feixes. Também concluímos que, por a linha tracejada ser perpendicular a superfície do espelho, ela forma  $90^\circ$ , fazendo com que  $\alpha$  e  $\beta$  sejam ângulos suplementares, ou seja,  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Além disso, na última parte do esquema evidenciado na Figura 4, fizemos o prolongamento dos feixes incidentes e

<sup>9</sup> Feixe incidente é representado por uma reta originada do emissor de luz, no caso do exemplo, um astro.

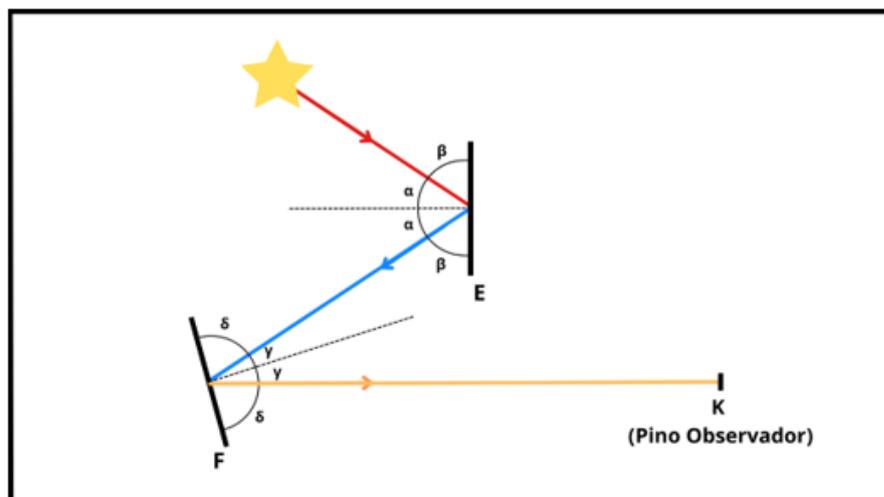
<sup>10</sup> Ou seja, quando encontrar a superfície do espelho, o feixe de luz irá ser mandado para outra direção.

<sup>11</sup> Feixe refletor é representado pelo fim da reta do feixe incidente, mostrando que a luz está sendo refletida



refletores e, como seguem da mesma maneira que o espelho recebe, esses feixes formam o mesmo ângulo no seu prolongamento. De maneira análoga, acontece o mesmo esquema para o segundo espelho, como mostra Figura 5.

**Figura 5:** Esquema com os feixes incidentes e refletores com os dois espelhos do Octante.

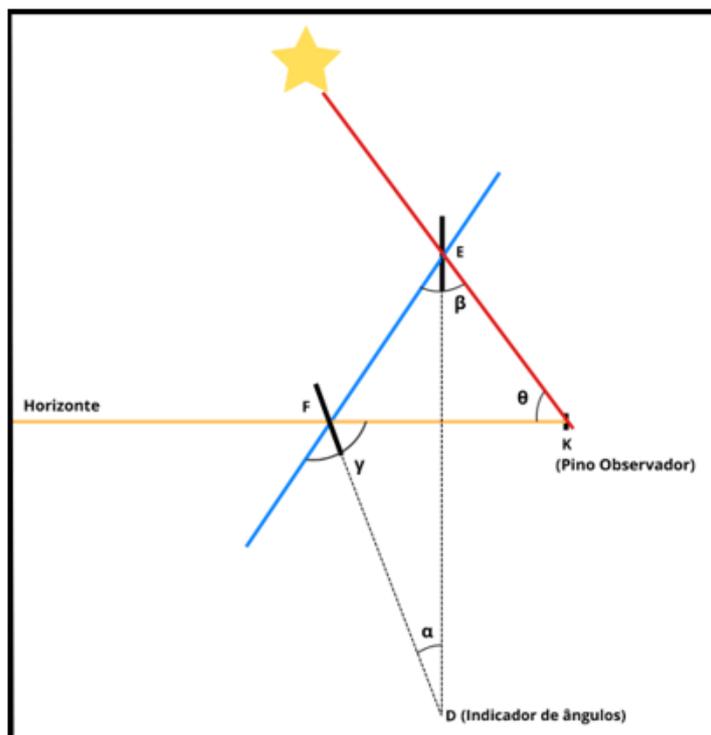


**Fonte:** Elaborado pela autora (2023)

Quando o feixe refletor vem do espelho **E**, representado pelo segmento azul, ele se torna o feixe incidente da reflexão que acontece no espelho **F**. De maneira análoga ao esquema interior, o feixe incidente, ao ricochetear o espelho **F**, se torna o feixe refletor, indo em direção ao pino observador **K**, ou seja, ao olhar do observador. Agora, iremos mostrar, a partir de uma continuação do esquema evidenciado na Figura 5, como ocorre a dupla reflexão no Octante Reflexivo, na Figura 6.



**Figura 6:** Dupla reflexão no Octante Reflexivo (parte 1)



**Fonte:** Elaborado pelas autoras (2023)

Na Figura 6, evidenciamos o esquema que nos leva a entender como acontece a dupla reflexão entre os espelhos e o funcionamento da tomada de ângulos do Octante Reflexivo. Do esquema da Figura 5, fizemos o prolongamento dos feixes incidentes dos espelhos **E** e **F**, e, além disso, também prolongamos os segmentos de retas que representavam os espelhos **E** e **F**. Dessa maneira, forma-se o ângulo  $\theta$  no pino observador, que representa o ângulo entre o horizonte e a estrela, denominado de distância angular, visto que é formado entre os segmentos em direção ao horizonte e o prolongamento do feixe incidente do espelho **E**.

Além disso, também temos a formação do ângulo  $\gamma$ , que está entre o prolongamento do feixe incidente do espelho, em azul, e o segmento amarelo que representa a visão do observador em direção ao horizonte. Outro ângulo formado foi o entre o indicador de ângulos do Octante e a reta que prolonga o espelho **F**. Este ângulo  $\alpha$  é o representado no indicador de ângulos, no arco de  $45^\circ$  do Octante. A partir desse esquema, temos os triângulos  $EFD$  e  $EFK$ .



Considerando, inicialmente, que o prolongamento do feixe incidente em azul forme um ângulo de  $180^\circ$ , então o ângulo formado pelo vértice F no triângulo  $EFK$  é igual a  $180^\circ - \gamma$ , visto que este ângulo é suplementar a  $\gamma$ . Dessa maneira, evidenciando o triângulo  $EFK$ , temos, em relação aos seus ângulos internos que:

$$\beta + \theta + (180^\circ - \gamma) = 180^\circ$$

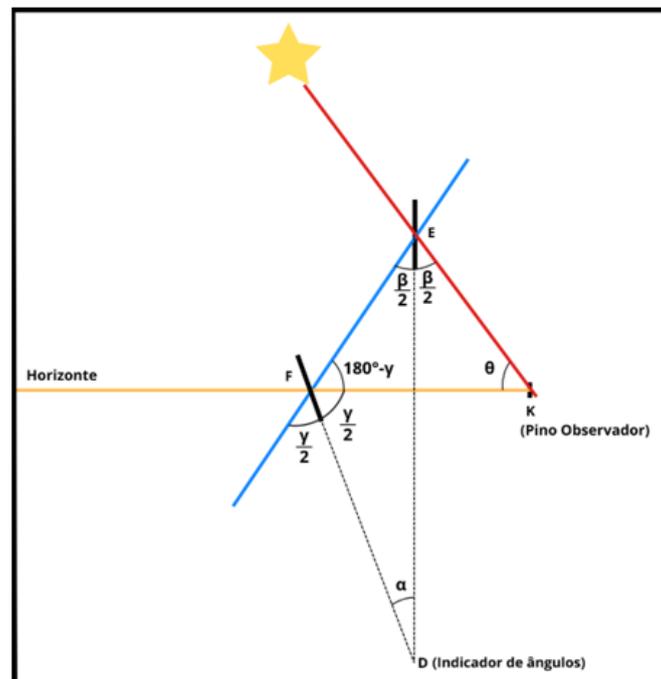
Desenvolvendo esta equação, concluímos que:

$$\beta + \theta + 180^\circ - \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = \beta + \theta \quad [1]$$

Dessa forma, como foi dito anteriormente, o ângulo incidente é igual ao ângulo de reflexão, então, quando prolongamos o feixe de luz, como evidenciado no final do esquema da Figura 4, o seu prolongamento possui os mesmos ângulos. Logo, mostramos o seguinte esquema na Figura 7.

**Figura 7:** Dupla reflexão no Octante Reflexivo (parte 2)



**Fonte:** Elaborado pelas autoras (2023)

Agora, com os ângulos evidenciados, consideremos a soma dos ângulos internos do triângulo  $EFD$ . Então temos que:

$$\alpha + \frac{\gamma}{2} + (180^\circ - \gamma) + \frac{\beta}{2} = 180^\circ$$



Simplificando esta equação, temos:

$$\alpha + \frac{\gamma}{2} + 180^\circ - \gamma + \frac{\beta}{2} = 180^\circ$$

$$\alpha + \frac{\gamma}{2} - \gamma + \frac{\beta}{2} = 0$$

$$\alpha = -\frac{\gamma}{2} + \gamma - \frac{\beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\gamma - \beta}{2}$$

$$2\alpha = \gamma - \beta$$

Agora, retomando [1], na página 14 do presente artigo podemos substituir na equação acima:  $\gamma$  por  $\theta + \beta$ , pois são iguais. Logo:

$$2\alpha = \gamma - \beta$$

$$2\alpha = (\theta + \beta) - \beta$$

$$2\alpha = \theta + \beta - \beta$$

$$2\alpha = \theta$$

Assim, chegamos à conclusão que a distância angular, representada por  $\theta$  no esquema das Figuras 6 e 7, é igual ao dobro do ângulo tomado pelo indicador de ângulos, representado por  $\alpha$ , comprovando assim, a dupla reflexão do Octante Reflexivo.

### Considerações Finais

Observando as demonstrações que concluem a dupla reflexão no Octante Reflexivo, os conhecimentos de natureza matemática que podemos evidenciar são: propriedades dos triângulos, ângulos complementares e suplementares, segmentos de reta, distâncias angulares. Além disso, também encontramos conhecimentos de natureza física, a exemplo de: reflexão de espelhos, feixes incidentes, feixes refletores, prolongamento desses feixes e as propriedades dos ângulos em torno deles.

Vale salientar que este trabalho se refere a uma parte de uma pesquisa de mestrado que busca produzir um produto educacional utilizando os conhecimentos de natureza matemática evidenciados durante o uso do Octante Reflexivo e utilizá-lo em uma sequência didática para o ensino de Geometria que alie História da Matemática e Tecnologias Digitais. No trabalho completo, mais discussões a respeito dos conhecimentos mobilizados são realizadas e entrelaçadas em seu contexto de modo a serem acionadas no produto educacional.



## Referências

- GIBBS, Graham. **Análise de dados qualitativos**. Porto Alegre, Artmed; 2009.
- HADLEY, John. **The Description of a new instrument for taking angles**. Philosophical Transactions. The Royal Society. Vol. 37. p. 147-157. (1731). Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1731.0025> . Acesso em: 10 de set. de 2022.
- HADLEY, John. **An Account of Observations Made on Board the Chatham-Yacht, August 30th and 31st, and September 1st, 1732, in Pursuance of an Order Made by the Right Honourable the Lords Commissioners of the Admiralty, for the Trial of an Instrument for Taking Angles**. Philosophical Transactions. The Royal Society. Vol. 37. p. 341-356. (1732). Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstl.1731.0061>
- HADLEY, George. **A description of a new instrument invented by John Hadley for taking the latitude or other altitudes at sea: with directions for its use with George Hadley**. Londres: produzido pelo autor. 1734.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert. **Fundamentos de Física: óptica e física moderna**. São Paulo: Editora LTC. 2010.
- HISTORY OF SCIENCE MUSEUM. **Animate It – Octant**. Youtube, 8 de janeiro de 2016. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=jiCY94LMBVg>. Acesso dia: 01 de agosto de 2023.
- MACEDO, Neusa Dias de. **Iniciação à pesquisa bibliográfica**. São Paulo: Edições Loyola, 1995.
- NORIE, John William. **New and complete epitome of practical navigation**. Londres: produzido pelo autor. 1852.
- RIGAUD, S.P. **Biographical account of John Hadley, Esq. V.P.R.S., the inventor of the quadrant, and of his brothers George and Henry**, Nautical Magazine 4. 1835.
- SAITO, Fumikazu. História e Ensino de Matemática: Construindo Interfaces. In: SALAZAR, Jesús Flores; GUERRA, Francisco Ugarte. **Investigaciones en Educación Matemática**. Lima: PUCP, 2016. p. 253-291.
- SAITO, Fumikazu. A pesquisa histórica e filosófica na educação matemática. **Eventos Pedagógicos**, 9(2), 604–618. 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.30681/reps.v9i2.10087>
- SANTOS, Andressa Gomes dos; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Gresham College e a matemática prática de Londres no século XVII. **Revista Brasileira de História da Matemática**, [S. l.], v. 22, n. 45, p. 67–81, 2022. DOI: 10.47976/RBHM2022v22n4567-81. Disponível em: <https://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/384>. Acesso em: 10 jan. 2024.



STIMSON, A.. **The influence of the Royal Observatory at Greenwich upon the design of 17th and 18th century angle-measuring instruments at sea.** In: *Vistas Astronom.* v. 20. p. 123-130 (1976).

**THE ROYAL SOCIETY**, Londres: 2023. Disponível em:

<https://royalsociety.org/about-us/mission-priorities/>

**Recebido em:** 20 / 01 / 2024

**Aprovado em:** 23 / 02 / 2024