

EXPLORANDO A PROPOSIÇÃO XXXIV DO LIVRO I DOS ELEMENTOS DE OLIVER BYRNE NO GEOGEBRA

EXPLORING PROPOSITION XXXIV FROM BOOK I OF OLIVER BYRNE'S ELEMENTS IN GEOGEBRA

Luis Andrés Castillo¹; Ivonne C. Sánchez²

RESUMO

Neste trabalho descreve-se o andamento de uma proposta baseada na edição de Oliver Byrne dos Elementos de Euclides, que usa diagramas coloridos. A ideia de Byrne era apresentar as afirmações, as construções e até as provas dos Elementos de Euclides com um uso simples e rigoroso de cores, como forma de sintetizar descrições e argumentações verbais mais explícitas. Na proposta deste estudo o sistema semiótico e a abordagem de Byrne são materializados digitalmente com a utilização de um ambiente de geometria dinâmica, o GeoGebra, e o uso do caso da Proposição XXXIV do Livro I, de Byrne. O recurso interativo no GeoGebra no estilo de Byrne foi criado como um objeto de aprendizagem para a exploração de propriedades e discussões matemáticas e como uma ferramenta para tornar explícita a compreensão e aprendizagem da geometria euclidiana pelos estudantes.

Palavras-chave: Demonstração, Byrne, GeoGebra, Ensino.

ABSTRACT

This paper describes the progress of an initiative based on Oliver Byrne's edition of Euclid's Elements, which incorporates colorful diagrams. Byrne aimed to present the statements, constructions, and even proofs of Euclid's Elements using a simple and rigorous use of colors, as a means to synthesize more explicit verbal descriptions and arguments. In this study, Byrne's semiotic system and approach are digitally materialized using a dynamic geometry environment, GeoGebra, focusing on Proposition XXXIV from Book I. The interactive resource in Byrne's style was created as a learning tool for exploring mathematical properties and discussions and as a means to make the understanding and learning of Euclidean geometry explicit for students.

Keywords: Proof, Byrne, GeoGebra, Teaching.

¹ Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Membro do Grupo de Pesquisa Práticas Socioculturais e Educação Matemática (GPSEM). Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Campus Universitário do Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110. E-mail: luiscastleb@gmail.com. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-5174-9148>.

² Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (UFPA), Belém, Pará, Brasil. Membro do Grupo de Pesquisa Práticas Socioculturais e Educação Matemática (GPSEM). Endereço para correspondência: Rua Augusto Corrêa, 01, Campus Universitário do Guamá, Belém, Pará, Brasil, CEP: 66075-110. E-mail: ivonne.s.1812@gmail.com. ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2485-1059>.



Introdução

A História da Matemática, como campo de pesquisa, tem sido desenvolvida no Brasil desde as últimas cinco décadas do século XX até a atualidade (Mendes, 2022). Pesquisadores desse campo têm dedicado esforços para estabelecer diálogos entre a História da Matemática e outros campos, entre esses, temos das Tecnologias Digitais. A literatura especializada já mostra indícios das plausíveis conexões entre a História da Matemática e Tecnologias Digitais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Exemplo disto, temos a Thomsen, Jankvist e Clark (2022), que ressaltam que os desde a última década de século XX, tem literatura a nível internacional no campo com foco no estudo das potencialidades e aplicação de atividades baseadas em fontes históricas primárias e mediadas com diversas tecnologias digitais.

No nível nacional, trabalhos como de Pereira (2022), Pontes; Batista e Pereira (2021), Silva Junior; Santos e Pereira (2022) tem realizados contribuições sobre o uso de tratados históricos matemáticos (fontes primarias), particularmente os publicados entre os séculos XVI e XVII. Nesse cenário encontramos trabalhos com atividades que integram informações históricas com tecnologias digitais, observamos duas abordagens distintas. Uma delas concentra-se nos instrumentos mencionados nos tratados históricos, buscando compreender a matemática envolvida em sua criação e manipulação (Pereira; Alves, 2019; Silva; Batista, 2022). Por outro lado, há atividades que adotam uma abordagem mais contemporânea, utilizando essas tecnologias para explorar problemas ou demonstrações encontradas nos mesmos tratados (Coelho *et al.*, 2023; Sánchez; Castillo, 2022; Teixeira *et al.*, 2023).

Dentre essa última abordagem supracita, temos estudos que visam explorar uma reinvenção que as tecnologias digitais proporcionam para a análise de problemas históricos. Por exemplo, Hašek e Zahradník (2015) juntam o trabalho realizado com o sistema de álgebra computacional wxMaxima com o software de matemática dinâmica GeoGebra para resolver um problema geométrico de um livro didático do século XVIII sobre cônicas e lugar geométrico.

Outro exemplo, Sánchez e Castillo (2022) usam o GeoGebra para explorar a validar uma demonstração do teorema de Pitágoras, dinamizando a referida demonstração apresentada por Sócrates na obra "The Pythagorean Proposition" (Loomis, 1968). Outra forma de estabelecer esses diálogos com a história da matemática e tecnologias digitais, encontramos em Sánchez, Mendes e Castillo (2023) quando são descritas atividades



históricas com GeoGebra para mobilizar conceitos de geometria 3D referentes ao objeto matemático cone, para contribuir com um novo olhar, por meio da tela do computador, para o ensino de matemática baseado nas informações históricas.

Neste cenário, este trabalho tem como propósito maior contribuir por mais diálogos entre a História e as Tecnologias Digitais para o ensino da Matemática. Assim sendo, neste estudo, escolhemos como objeto de estudo a Proposição XXXIV do Livro I dos Elementos da Edição de Byrne (1847), devido à sua relação com conceitos matemáticos relacionados a polígonos, especialmente quadriláteros do tipo paralelogramos, e seus elementos constituintes. O objetivo é descrever a exploração dinâmica da demonstração dessa proposição para o ensino de geometria euclidiana plana, por meio de um objeto de aprendizagem desenvolvido no GeoGebra.

Para atingir esse propósito, inicialmente procuramos conhecer o autor da referida obra. Em seguida, apresentamos a perspectiva adotada em relação ao objeto de aprendizagem. Posteriormente, descrevemos a abordagem dessa proposição no objeto de aprendizagem desenvolvido no GeoGebra e, por fim, nossas considerações finais.

Os Elementos de Oliver Byrne

Neste momento é propício levantar alguns questionamentos sobre Oliver Byrne: onde e quando ele nasceu? Além dos Elementos escreveu outras obras? Qual é a grande contribuição de Byrne à matemática e ao seu ensino? Conseguimos respostas para essas inquietações na biografia extensa que Hawes e Kolpas (2015) fizeram de Oliver Byrne. Byrne, mostrado na Figura 1, nasceu em 31 de julho de 1810 na vila de mineração de cobre de Vale de Avoca, no condado de Wicklow, Irlanda. Morreu em 9 de dezembro de 1880 e foi enterrado em Maidstone, Kent, Inglaterra. Na sua trajetória profissional foi matemático, educador e engenheiro civil. O'Connor e Robertson (2016) apresentam uma extensa biografia – que pode ser consultada no *site* McTutor – sobre a trajetória profissional desse autor.



Figura 1 – Oliver Byrne



Fonte: Hawes e Kolpas (2015)

Hawes e Kolpas (2015) relatam que Oliver Byrne fez sua estreia como autor em Dublin, com *A Treatise on Diophantine Algebra* – obra mais frequentemente referenciada como *Treatise on Algebra* –, publicada por Allen and Co. em 1830. Depois, em 1831, ele publicou o panfleto *A Pamphlet on the Teaching of Geometry by Coloured Diagrams, etc.; Applied to the First Book of Euclid*. Ao que parece, esse panfleto foi a base para *The first six books of the elements of Euclid, in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*, publicada em 1847 em Londres pela William Pickering.

Segundo Hawes e Kolpas (2015, p. 15), Byrne afirmou ter conduzido experiências que mostravam que os Elementos de Euclides poderiam ser compreendidos com uso desse método de cor “em menos de um terço do tempo normalmente empregado”. Seu objetivo expresso era “ensinar as pessoas como pensar e não o que pensar” (p. 16). Além disso, na sua inscrição final no *Royal Literary Fund* em 1880, Byrne expressa que tem um objetivo maior do que a mera ilustração, ele não apresenta cores com propósito estético ou lúdico, ao contrário, faz isso para auxiliar a mente em suas pesquisas pela verdade, para aumentar as facilidades de instrução e para difundir o conhecimento permanente dos Elementos.

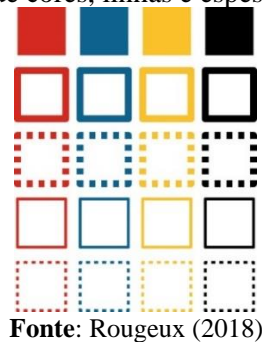
O sistema de Byrne é baseado em três cores: vermelho, amarelo e azul. Com essas cores básicas, ele colore os elementos básicos da geometria euclidiana: pontos, retas, ângulos, superfícies e corpos sólidos. Ele lista também um conjunto de conectivos lógicos e operacionais a serem utilizados nas provas, a fim de reduzir o número de palavras



utilizadas na demonstração, e associa-lhes símbolos a serem utilizados para conectar logicamente elementos coloridos. Byrne começa com as definições primeiras do Livro 1 de Euclides e detalha casos particulares (triângulos, quadriláteros) para dar exemplos de seu sistema de coloração.

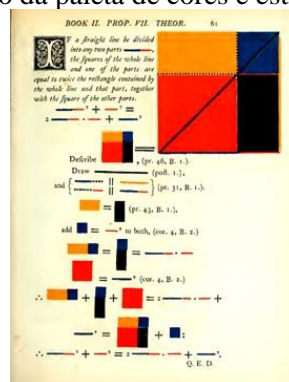
Byrne reformulou em cores brilhantes não apenas as ilustrações das figuras geométricas que estava prestes a provar, mas também os detalhes das provas. Nesse sentido, usou, ao longo do livro, apenas 4 cores (vermelho, azul, amarelo e preto), 2 estilos de linha (sólido e tracejado) e 2 espessuras de linha (grosso e fino). Combinados, esses aspectos criaram 16 opções diferentes, como mostramos na Figura 2, para diagramas de coloração – mais do que o suficiente para ilustrar os conceitos necessários desses 6 primeiros livros dos elementos. A Figura 3 apresenta um exemplo da paleta de cores de Byrne.

Figura 2 – Conjunto de cores, linhas e espessuras na obra de Byrne



Fonte: Rougeux (2018)

Figura 3 – Exemplo da paleta de cores e estilos na obra de Byrne



Fonte: Byrne (1847, p. 61)

Segundo Alexanderson (2010), a obra de Byrne foi praticamente ignorada por seus contemporâneos na matemática na época em que o educador viveu: Augustus de Morgan foi particularmente desdenhoso, provavelmente encorajando Florian Cajori a chamar Byrne de *uma curiosidade*. Também, parece não haver menção a Byrne na história do



ensino da matemática de Cajori naquele período na América ou em seu clássico *History of Mathematics* – apenas uma breve citação em seu livro sobre notação matemática de outra obra de Byrne, essa intitulada *Dual Aritmética*.

Embora na época de sua produção a obra de Byrne tenha passado despercebida, Rougeux (2018) expressa que ela ganhou interesse renovado a partir da última década do século XX – em parte, devido a uma menção de Edward Tufte; em parte, pela recente reprodução publicada pela Taschen em 2010.

Alexanderson (2010), no seu *review* dessa reprodução da Editora Taschen, expressa que se trata de uma edição suntuosa em que as páginas originais, antes de serem fotografadas, foram *lavadas* para remover evidências de *foxing*³. O novo papel é ligeiramente esbranquiçado, aproxima-se do papel que se pode esperar de um livro de arte de alta qualidade. Alexanderson afirma que, na atualidade, os exemplares das obras de Byrne em feiras internacionais de livros têm um valor entre US\$ 20.000 e US\$ 25.000 – podemos perceber que a produção do autor se tornou altamente desejável e valiosa em sua forma original. Mas, agora, a reprodução da Taschen torna possível que praticamente qualquer pessoa que queira a obra no seu formato impresso possa tê-la por um preço mais acessível.

A utilização de diagramas faz com que as fontes individuais de informação sejam visualmente integradas, portanto a aprendizagem dos estudantes é melhorada, já que eles devem dirigir a sua atenção para cada fonte individual, codificar as peças separadas de informação e depois gerir as informações armazenadas para fazer conexões significativas (Hauk *et al.*, 2013).

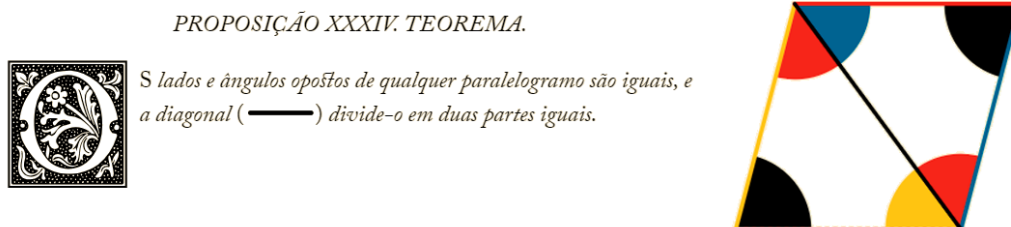
Com o trabalho de Hauk *et al.* (2013) sobre o uso de diagramas coloridos, podemos entender a obra de Byrne e os argumentos que ele expõe e sustenta por meio da experimentação em sala de aula. Os dois argumentos são: *cor como ferramenta de representação* e *cor como ferramenta de compreensão*. Essas maneiras de usar a cor permitem representar fatos e compreender as relações entre os elementos. Assim, podemos entender que essa codificação por cores pode ajudar os estudantes a *empacotar* e *desempacotar* informações e a gerenciar a complexidade das provas e comprovações.

³ O *foxing* é frequentemente descrito como pequenas manchas circulares e irregulares dispersas aleatoriamente na superfície do papel, variando em termos de tonalidade entre o castanho avermelhado e o castanho amarelado. Elas aparecem em diferentes tipos de papel datados do período entre o século XVI e XX.



Para compreender melhor esses argumentos, coloquemos como exemplo a demonstração da Proposição XXXIV do Livro I da edição de Byrne, mostrada na Figura 4. A Proposição afirma: “os lados e os ângulos opostos de qualquer paralelogramo são iguais, e a diagonal divide-o em duas partes iguais” (Byrne, 1847, tradução nossa).

Figura 4 – Proposição XXXIV do Livro I da edição de Byrne



Fonte: Byrne (1847, tradução nossa)

Como podemos observar na Figura 4, já na própria Proposição Byrne usa a cor como ferramenta de representação para sinalizar qual dos segmentos coloridos é a diagonal. Além disso, o diagrama colorido reforça esse argumento: os ângulos da mesma cor comunicam que são iguais em medida; e os segmentos com uma cor diferente comunicam que são diferentes até que se demonstre o contrário – lembramos que Byrne usa só quatro cores, assim, o quinto segmento repete a cor vermelha, porém seu desenho é descontínuo para comunicar que é diferente do seu oposto em posição.

No processo da demonstração no método de Byrne, percebe-se a cor como ferramenta de compreensão. Byrne, a partir do diagrama colorido, para levar a cabo seu raciocínio na demonstração, começa a desempacotar o diagrama em outros menores; em outras palavras, ele codifica os significados de cada peça separadamente e estabelece as relações entre elas, tendo, assim, seis ângulos e cinco segmentos – mostrados na Figura 5





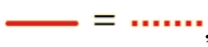
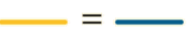




–, de maneira a demonstrar que os triângulos  são iguais.

Figura 5 – Elementos do diagrama da Proposição XXXIV do Livro I de Byrne



Fonte: Elaboração dos Autores (2023)



Logo, na demonstração Byrne agrupa os diagramas segundo o que pode ser demonstrado de imediato, nesse caso, que  e  por serem ângulos alternos internos; e que  é comum a ambos os triângulos. Continuando com o raciocínio, temos que ,  e ; em função dessas informações, determina-se que . Portanto, os lados e os ângulos opostos do paralelogramo são iguais; e, como os triângulos  e  são iguais em todos os elementos, a diagonal divide o paralelogramo em duas partes iguais.

Com esse exemplo podemos ilustrar o método de ensino de geometria de Byrne em função dos argumentos apresentados por Hauk *et al.* (2013) sobre o uso das cores como uma ferramenta de representação de informações e de compreensão de relações. Pesquisas, como a desenvolvida por Rizos e Foykas (2023), revelam algumas vantagens do uso da obra de Byrne para o ensino da geometria, entre elas: assimilação de conceitos geométricos básicos; aumento do envolvimento da aprendizagem na resolução geométrica de problemas; compreensão dos principais pontos de uma prova geométrica; e envolvimento ativo de todos os estudantes da turma em atividades de resolver problemas geométricos com uso de cores.

Nesse sentido, Rizos e Foykas (2023) chegam à conclusão de que usar o livro dos Elementos de Byrne melhora o desempenho matemático dos estudantes a respeito da percepção visual e das habilidades metacognitivas, como a solução de problemas.

Objetos de Aprendizagem

Na literatura especializada, há diversas conceituações para os Objetos de Aprendizagem (OA). Um desses conceitos os enxerga como recursos virtuais disponíveis para auxiliar os professores no processo de ensino, visando contribuir para a aprendizagem dos alunos (Koper, 2003). Uma definição mais específica os descreve como qualquer material digital que forneça informações para a construção do conhecimento, podendo ser apresentado na forma de imagem, página HTML, animação ou simulação (Santos, 2007). Neste estudo, adota-se o conceito de OA como um recurso virtual passível de ser utilizado e reaproveitado para apoiar a aprendizagem, por meio de atividades interativas na forma de simulações ou animações (Kalinke *et al.*, 2015).



Por um lado, a simulação pode ser compreendida como a utilização de um simulador, ou seja, um modelo computacional de uma situação real ou hipotética, ou ainda de um fenômeno natural, que permite ao usuário explorar as implicações da manipulação dos parâmetros dentro dele (Clark, Nelson; Sengupta e D'Angelo, 2009). Por outro lado, a animação é uma forma de visualização dinâmica que se desenvolve em uma velocidade constante e, ao contrário da simulação, não permite ao usuário interação em termos de manipulação ou modificação de parâmetros (Plass, Homer e Hayward, 2009). Segundo a literatura, os OA, sejam simulações ou animações, apresentam uma diversidade de características.

Sabbatini (2012) os diferencia dos demais materiais didáticos pelas seguintes características: Reutilização, possibilitando seu uso em diferentes contextos de ensino com outras atividades e desafios; Portabilidade, podendo ser utilizados em diferentes plataformas técnicas; Modularidade, permitindo que possam conter outros objetos ou estar contidos neles, possibilitando sua combinação; e Autossuficiência, não dependendo de outros objetos para fazer sentido. Por outro lado, Audino e Nascimento (2010) destacam outras características dos OA, relacionadas às possibilidades de acesso em qualquer lugar, apresentação de interatividade e transporte em diversas mídias. Kalinke et al. (2015) enumeram as seguintes características fundamentais dos OA: são pequenos, podendo ser utilizados em uma ou duas aulas; devem ser fáceis de usar, permitindo que o aluno concentre sua atenção nas questões a serem aprendidas; e apresentam alguma expectativa de aprendizagem, a ser alcançada por meio de seu uso em sala de aula (daí o nome "objeto de aprendizagem").

Portanto, qualquer recurso digital que apresente todas essas características e não tenha um propósito pedagógico não pode ser considerado um OA. Além de suas características, os OA apresentam uma variedade de vantagens que podem ajudar os alunos a estabelecerem uma relação mais afetiva e dinâmica com os conhecimentos a serem adquiridos. Nesse sentido, Gallo e Pinto (2010) destacam que os OA permitem aos alunos, entre outras coisas, criar e testar hipóteses, relacionar conceitos, resolver problemas e fazer descobertas por meio de situações de exploração e navegação, de maneira atrativa e divertida. Na mesma linha, Kalinke *et al.* (2015) afirmam que os OA possibilitam aos alunos explorarem dinamicamente os conteúdos e estabelecer conexões entre as diferentes formas de representação de um mesmo conceito, bem como entre os conceitos matemáticos e as situações cotidianas.



Para finalizar, temos que Castillo, Gutiérrez e Sánchez (2020) demonstraram que os objetos de aprendizagem criados com o GeoGebra apresentam vantagens e características distintas daqueles desenvolvidos por outras tecnologias digitais. Isso se deve ao fato de que eles possibilitam aos alunos formular conjecturas e validá-las por meio da exploração e manipulação dinâmica do recurso, de forma mais interativa e dinâmica, graças às suas ferramentas e funcionalidades dinâmicas. Além disso, esse tipo de recurso na interface do GeoGebra viabiliza a exploração dinâmica dos conteúdos que o professor pretende ensinar, estabelecendo conexões entre as diversas formas de representação dos conceitos matemáticos.

Procedimentos Metodológicos

Este estudo baseia-se em uma abordagem qualitativa com pesquisa bibliográfica, desenvolvida com base em material já elaborado, principalmente livros e artigos científicos, conforme preconizado por Gil (2010). A pesquisa teve como ponto de partida a investigação da edição do século XIX dos "Elementos", intitulada "*The first six books of the Elements of Euclid, in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners*" (Byrne, 1847). O objetivo principal é compreender a constituição do sistema desenvolvido por Byrne e sua abordagem semiótica para essa versão dos "Elementos" de Euclides.

O procedimento metodológico adotado consistiu em uma revisão detalhada da obra de Byrne, analisando suas representações visuais e simbólicas, bem como seu método de ensino. Em seguida, realizou-se uma pesquisa bibliográfica abrangente, buscando fontes secundárias que discutissem e contextualizassem a obra de Byrne no contexto da geometria euclidiana e da história da matemática.

Após a análise da obra, identificou-se a Proposição XXXIV do Livro I como objeto de estudo específico. O próximo passo foi conceber uma reinterpretação dessa proposição utilizando o software GeoGebra. Isso envolveu a reconstrução da construção geométrica e a elaboração de uma demonstração dinâmica que refletisse os princípios e métodos apresentados por Byrne.

Demonstração da proposição XXXIV do livro I de Byrne no GeoGebra

Nesta seção descrevemos a forma de usar os ideogramas coloridos dinâmicos como ferramenta de representação e como ferramenta de compreensão. Nesse sentido,



utilizaremos o GeoGebra como um meio para produzir uma dinamização baseada nos ideogramas coloridos da obra de Byrne, com o propósito de acrescentar movimento nesse processo de desempacotar e empacotar informações nos Elementos de Byrne.

A escolha do GeoGebra deve-se à possibilidade de reproduzir o conjunto de cores, linhas e espessuras da obra de Byrne na interface do *software*, já que este possui funcionalidades que permitem variar a cor, o tipo de linha e a espessura da linha dos objetos representados geometricamente na janela de visualização, como vemos na Figura 6 – o que nos faz refletir sobre o fato de que, na produção da ideografia dinâmica em matemática, devemos considerar que o gerador de ideograma consiga reproduzir o tipo de ideograma base que vem das fontes históricas, nesse caso, a obra de Byrne.

Figura 6 – Conjunto de cores, linhas e espessuras da obra de Byrne no GeoGebra



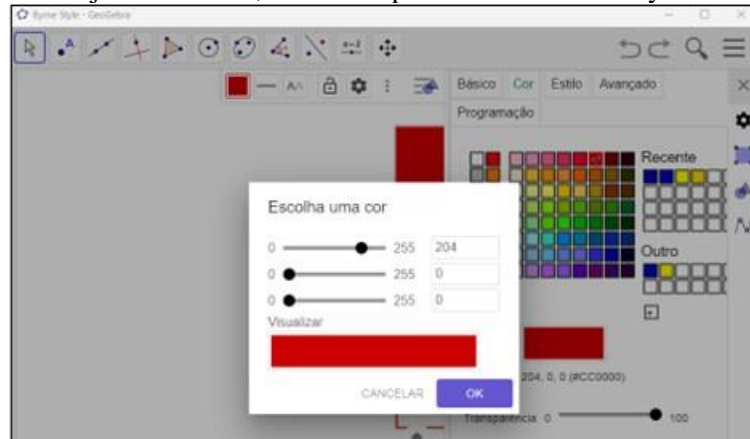
Fonte: Elaboração dos Autores (2023)

Para reproduzir o estilo de Byrne no GeoGebra, foram escolhidas as cores no sistema RGB⁴, que é o modo de determinar uma cor em específico no *software*. Assim, temos o vermelho (204, 0, 0) – que mostramos na Figura 7 – e o azul (0, 0, 204) com o mesmo valor na respectiva escala para manter a tonalidade, uma característica que, no amarelo (255, 215, 0), teve que ser procurada em uma escala diferente, pois o valor (204, 204, 0) resultava em uma cor verde amarelada. Finalmente, temos o preto (0, 0, 0).

⁴ RGB é a abreviatura de um sistema de cores aditivas em que o vermelho (Red, na sigla), o verde (Green) e o azul (Blue) são combinados de várias formas de modo a reproduzir um largo espectro cromático. O sistema de cores RGB é encontrado em monitores de computador, televisão, câmeras digitais entre outros. As cores são atingidas com a mistura das três cores primárias em um número definido em uma escala de 0 a 255.



Figura 7 – Conjunto de cores, linhas e espessuras da obra de Byrne no GeoGebra



Fonte: Elaboração dos Autores (2023)

No GeoGebra as espessuras de linhas têm uma escala de 0 a 13 – no nosso caso, escolhemos o valor de 12 para as linhas mais grossas e 6 para as mais finas. O *software* oferece 5 tipos de formato para as linhas, que vão desde o mais contínuo ao mais discreto:



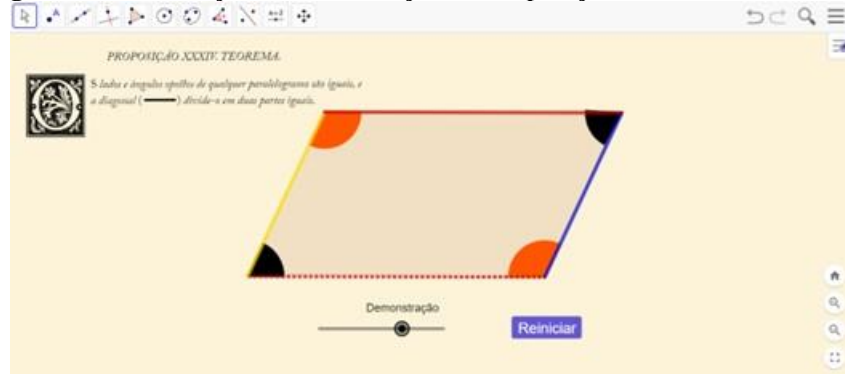
. Para reproduzir o estilo de Byrne, decidimos usar a primeira opção para linhas de traço contínuo; a terceira opção, para as descontínuas de maior espessura; e a quarta opção, para as descontínuas de menor espessura.

Agora, tendo todas as considerações de aspecto visual da obra de Byrne sistematizadas para serem usadas no GeoGebra, retomemos o exemplo da Proposição XXXIV⁵ – que aparece na Figura 8, na Figura 9 e na Figura 10 – do Livro I da edição de Byrne citado anteriormente, de maneira a produzir no GeoGebra a demonstração, não apenas construindo os objetos geométricos seguindo o raciocínio e Byrne, mas de modo a ir além disso, ou seja, de criar uma demonstração dinâmica, em movimento, que simule esses processos de descompactar e empacotar as informações por meios dos ideogramas dinâmicos.

⁵ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/eyhnjs3j> Acesso em: 10 dez. 2023.

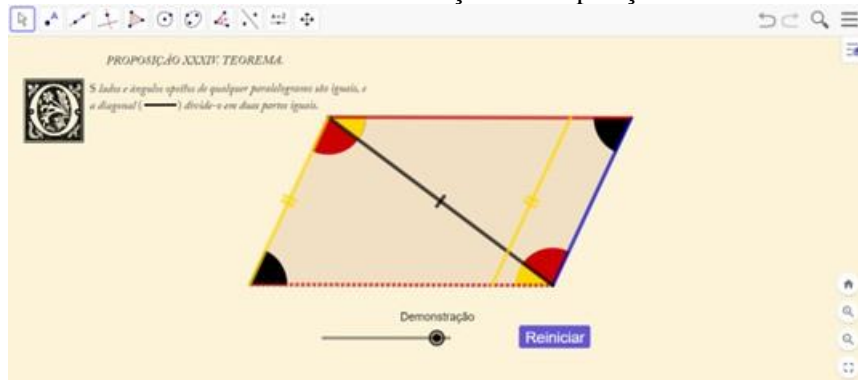


Figura 8 – Construção e demonstração da Proposição XXXIV no GeoGebra



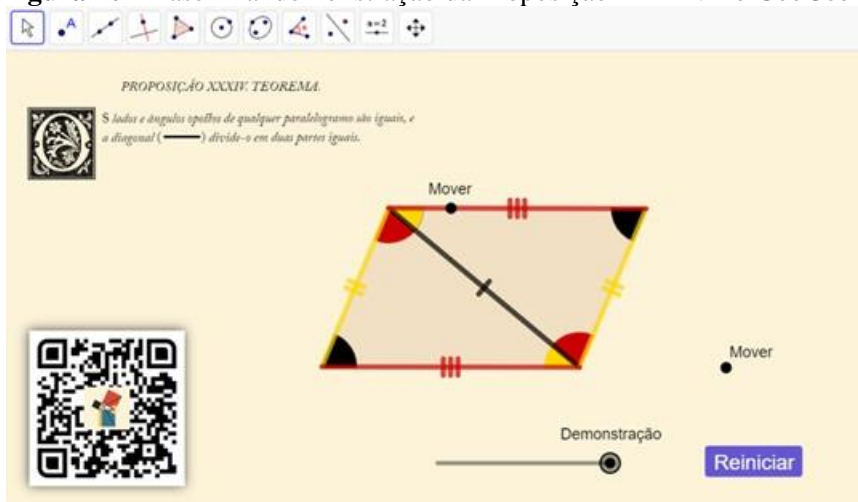
Fonte: Elaboração dos Autores (2023)

Figura 9 – Desenvolvimento na demonstração da Proposição XXXIV no GeoGebra



Fonte: Elaboração dos Autores (2023)

Figura 10 – Fase final demonstração da Proposição XXXIV no GeoGebra



Fonte: Elaboração dos Autores (2023)

Como pode ser observado na Figura 8, na Figura 9 e na Figura 10, apresenta-se um exemplo de uma dinamização no GeoGebra a partir das informações históricas da



obra de Byrne (1847). Nesse exemplo foi possível ampliar as informações presentes na obra de Byrne em dois momentos: o primeiro refere-se à construção da figura que será usada na análise – análise essa que apresenta as informações da hipótese, que não é contemplada na obra de Byrne na Proposição XXXIV. O segundo momento se dá na exploração dos elementos constitutivos do paralelogramo, nos quais, a partir do arrastamento de pontos vinculados aos comprimentos da altura e da base do referido quadrilátero, podem ser geradas outras conjeturas e generalizações na atividade.

Considerações Finais

Neste trabalho, buscamos não apenas descrever, mas também explorar de forma dinâmica a demonstração da Proposição XXXIV, com o intuito de utilizá-la no ensino de conteúdos da geometria euclidiana plana. Essa exploração foi conduzida por meio de um objeto de aprendizagem que foi desenvolvido no GeoGebra, utilizando como base a obra *Elementos*, de Byrne (1847). Além de abordar a demonstração em si, diversas considerações foram destacadas para enriquecer a proposta.

Um dos aspectos relevantes abordados foi o contexto histórico e social da obra de Byrne. Compreender as circunstâncias em que a obra foi produzida permite uma melhor contextualização e apreciação das contribuições do autor para a geometria euclidiana. Além disso, a postura adotada em relação aos objetos de aprendizagem foi discutida, destacando a importância de utilizar ferramentas contemporâneas, como o GeoGebra, para potencializar o ensino e a aprendizagem.

No desenvolvimento da proposta, foram exploradas diferentes maneiras de utilizar o GeoGebra. Essa ferramenta foi considerada não apenas como um meio de representação, mas também como uma poderosa ferramenta de comunicação do conhecimento matemático. A capacidade de visualização oferecida pelo GeoGebra foi destacada, enfatizando como ela pode auxiliar os estudantes na compreensão mais profunda dos conceitos geométricos.

Além disso, o GeoGebra foi tratado como uma ferramenta de descoberta na demonstração, contribuindo para dinamizar a Proposição XXXIV. A ênfase foi colocada na exploração, generalização e experimentação, utilizando recursos como diagramas coloridos para catalisar as capacidades cognitivas do raciocínio. Essa abordagem visa não apenas à compreensão passiva, mas também à participação ativa dos estudantes na



verificação de teoremas da geometria euclidiana plana – na proposição em destaque e também em outras contidas no tratado de geometria euclidiana.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas do Pará (FAPESPA) e da Universidade Federal do Pará.

Referências

ALEXANDERSON, Gerald L. Reviewed of the first six books of the Elements of Euclid. **Mathematical Association of America**. 2010. *Online*. Disponível em: <https://www.maa.org/publications/maa-reviews/the-first-six-books-of-the-elements-of-euclid> Acesso em: 15 ago. 2023.

ALVES, Verusca Batista. **Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred**. 2019. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza, 2019.

AUDINO, D. F.; NASCIMENTO, R. S. Objetos de aprendizagem: diálogos entre conceitos e uma nova proposição aplicada a educação. **Revista Contemporânea de Educação**, Rio de Janeiro, v. 5, n. 10, p. 128-148, 2010. Disponível em: <https://revistas.ufrj.br/index.php/rce/article/view/1620/1468>.

BYRNE, Oliver. **The first six books of the elements of Euclid, in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners**. Londres: William Pickering, 1847. *Online*. <https://doi.org/10.5479/sil.317414.39088000863027>

CASTILLO, L. A.; GUTIÉRREZ, R. E.; SÁNCHEZ, I. C. O uso do comando sequência na Elaboração de Simuladores com o software GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 9, n. 3, p. 106-119, 2020. <https://doi.org/10.23925/2020.v9i3p106-119>

COELHO, Iara Martins; TEIXEIRA, Lucas Santos; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto. História da matemática e geometria dinâmica: um novo olhar ao teorema de Viviani para o ensino médio. **Journal of Education Science and Health**, Teresina, v. 3, n. 1, 2023. <https://doi.org/10.52832/jesh.v3i1.178>

CLARK, D. B. et al. **Rethinking science learning through digital games and simulations: Genres, examples, and evidence**. In: The National Research Council Workshop on Gaming and Simulations, 2009, Washington, DC. Disponível em: https://sites.nationalacademies.org/cs/groups/dbassesite/documents/webpage/dbasse_080068.pdf.



GALLO, P.; PINTO, M. G. Professor, esse é o objeto virtual de aprendizagem. **Revista Tecnologias na Educação**, v. 2, n. 1, p. 1-12, 2010. Disponível em: <http://tecedu.pro.br/wp-content/uploads/2015/07/Art2-vol2-julho2010.pdf>.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

HAŠEK, Roman; ZHRADNÍK, Jan. Study of historical geometric problems by means of CAS and DGS. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, v. 22, n. 2, p. 53-58, 2015. https://doi.org/10.1564/tme_v22.2.02

HAUK, Shandy; SLATEN, Allison; PETERS, Elisabeth; SLATEN, Kelli. Color work to enhance proof-writing in geometry. **Journal of the California Mathematics Project**, Long Beach, v. 6, n. 1, p. 12–12, 2013. Disponível em: <https://jcmp.calstate.edu/jcmp/article/view/19> Acesso em: 10 dez. 2023.

HAWES, Susan M.; KOLPAS, Sid. Oliver Byrne: The Matisse of Mathematics. **Mathematical Association of America**, 2015. *Online*. Disponível em: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/oliver-byrne-the-matisse-of-mathematics-biography-1810-1829> Acesso em: 14 ago. 2023.

KALINKE, Marco Aurélio; DEROSI, Bruna; JANEGITZ, Laíza Erler; RIBEIRO, Marina Silva Nogueira. Tecnologias e educação matemática: um enfoque em lousas digitais e objetos de aprendizagem. In: KALINKE, Marco Aurélio; MOCROSKY, Luciane Ferreira (org.). **Educação matemática: pesquisas e possibilidades**. Curitiba: Ed. UTFPR, 2015. p.159-186.

KOPER, Rob. Combining re-usable learning resources to pedagogical purposeful units of learning. In: LITTLEJOHN, A. (org.) **Reusing online resources: a sustainable approach to eLearning**. London: Kogan Page, 2003. p. 1-8.

MENDES, Iran Abreu. História para o ensino de matemática: fundamentos epistemológicos, métodos e práticas. **COCAR**, Bélem, ed. esp, n. 14, p. 1-26, 2022. Disponível em: <https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/5509> Acesso em: 10 dez. 2023.

O'CONNOR, John J.; ROBERTSON, Edmund F. Oliver Byrne. **MacTutor**. 2016. *Online*. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Byrne/> Acesso em: 6 dez. 2023.

PLASS, J. L.; HOMER, B. D.; HAYWARD, E. O. Design factors for educationally effective animations and simulations. **Journal of Computing in Higher Education**, v. 21, n. 1, p. 31-61, 2009. DOI: 10.1007/s12528-009-9011-x.
PEREIRA, Ana Carolina Costa (org.). **Ensino de matemática: conversas didáticas a partir de tratados históricos**. [S. l.]: EdUECE, 2022.

PEREIRA, Ana Carolina Costa; ALVES, Verusca Batista. A reconstrução dos círculos de proporção no geogebra como uma atividade para a mobilização de conhecimentos matemáticos. **Revista História da Matemática para Professores**, São Paulo: v. 5, p.



19-28, 2019. Disponível em: <https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/41>
Acesso em: 10 dez. 2023.

PONTES, Lívia Monteiro; BATISTA, Antonia Naiara de Sousa; PEREIRA, Ana Carolina Costa. A inserção de textos originais na disciplina de História da Matemática a partir de um problema do documento Sea Island Mathematical Manual. **Revemop**, Ouro Preto, v. 3, p. e202101, 2021. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202101>

RIZOS, Ioannis; FOYKAS, Evaggelos. Utilization of “Byrne’s Euclid” in the teaching of geometry to students with special learning difficulties: A qualitative research. **European Journal of Education and Pedagogy**, London, v. 4, n. 2, p. 139-148, 2023. <https://doi.org/10.24018/ejedu.2023.4.2.623>

ROUGEUX, Nicholas. Making of Byrne’s Euclid. **C82**. 2018. *Online*. Disponível em: <https://www.c82.net/blog/?id=79> Acesso em: 15 ago. 2023.

SABBATINI, M. Reflexões críticas sobre o conceito de objeto de aprendizagem aplicado ao ensino de ciências y matemática. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 3, n. 3, p. 1-36, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2189/1760>.

SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto; CASTILLO, Luis Andrés. Uma antiga demonstração do teorema de Pitágoras desde a perspectiva da geometria dinâmica. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 9, n. 26, p. 214-226, 2022. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8030>

SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto; MENDES, Iran Abreu; CASTILLO, Luis Andrés. ATIVIDADES HISTÓRICAS COM GEOGEBRA PARA EXPLORAR A REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DO CONE. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, Brasil, v. 11, n. 1, p. e23117, 2023. <https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16866>.

SANTOS, Marcio Eugen Klingenschmid Lopes dos. **Objetos e ambientes virtuais de aprendizagem no ensino de matemática: um estudo de caso para o estágio supervisionado de docência** (Dissertação de mestrado). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2007

SILVA, Francisco Hemerson Brito da; BATISTA, Antonia Naiara de Sousa. Aspectos matemáticos e materiais da fabricação do báculo de Petrus Ramus frente a concepção de licenciandos em Matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 9, n. 26, p. 165-180, 2022. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8031>

SILVA JUNIOR, Francimar Miguel da; SANTOS, Andressa Gomes dos; PEREIRA, Ana Carolina Costa. Um primeiro olhar sobre A short Treatise of the Description of the Sector. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 9, n. 26, p. 374-385, 2022. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v9i26.8034>



TEIXEIRA, Lucas Santos; COELHO, Iara Martins; CASTILLO, Luis Andrés; SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto. Uma exploração do Teorema de Stewart com GeoGebra: do estático ao dinâmico. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, v. 9, n. 2, p. e2002, 2023. <https://doi.org/10.35819/remat2023v9i2id6467>

THOMSEN, Marianne; JANKVIST, Uffe Thomas; CLARK, Kathleen Michelle. The interplay between history of Mathematics and Digital Technologies: a review. **ZDM – Mathematics Education**, Germany, v. 54, p. 1631-1642, 2022. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01368-0>

Recebido em: 19 / 01 / 2024

Aprovado em: 05 / 03 / 2024