



UM DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO ECOLÓGICO DO CONCEITO DE LIMITE AN ECO-HISTORICAL DEVELOPMENT OF THE CONCEPT OF LIMIT

*João Cláudio Brandemberg*¹

Universidade Federal do Pará

*José Augusto Nunes Fernandes*²

Universidade Federal do Pará

Resumo

Neste artigo descrevemos um desenvolvimento histórico ecológico do conceito de limite, sua importância e aspectos do seu desenvolvimento que podem ser trabalhados como fonte de atividades para o ensino de Matemática. Historicamente, a tentativa dos antigos em obter quadraturas e cubaturas, assim como, estudar a variação de fenômenos do movimento dos corpos, caracterizam os primeiros passos para uma construção do Cálculo Infinitesimal, uma vez que o mesmo possui como base de sua construção a determinação do infinitamente pequeno e do infinitamente grande.

Palavras-chave: Ecologia do saber. História da Matemática. Conceito de Limite. Didática da Matemática.

Abstract

In this paper we report the ecological historical development of the concept of limit, its importance and aspects of development that can be worked as a source of activities for the teaching of Mathematics. Historically, attempts of old obtaining quadratures and cubatures, as well as to study the variation of the motion of bodies phenomena, characterizing the first steps for construction of infinitesimal calculus, since the same features as the basic construction determining the infinitely small and the infinitely large.

Keywords: Ecology of know. History of Mathematics. Limit concept. Didactics of mathematics.

Apresentação

Após a identificação e classificação dos *habitat* e *nichos* de limite de uma função nos ecossistemas pesquisados por Fernandes (2015), nos aprofundamos no conhecimento desse objeto, sob uma visão histórico-ecológica, verificando como esse saber sábio se desenvolveu em seus ecossistemas, seus respectivos *habitat* e *nichos*.

¹ brand@ufpa.br.

² jaugusto@ufpa.br.



A importância e a legitimidade do conceito de limite nos parecem incontestes para o ecossistema da Matemática, como destacam alguns pesquisadores do ecossistema da Educação Matemática como, por exemplo, Zucchi (2005, p. 19) quando afirma que “a importância do ensino do conceito de limite é inquestionável, pois ele é a fundamentação das aplicações do cálculo, que surgem no conteúdo da derivada e integral”. Assim, nos parece importante destacar as relações da existência e desenvolvimento, nesses ambientes e *nichos* do saber, do conceito de limite.

Um conceito que etimologicamente se fundamenta na sequência de seu surgimento como conhecimento, posteriormente formalizado e em seguida tratado como objeto de ensino. Limite, portanto, surge como uma barreira, feita para não ser ultrapassada, como uma fronteira intransponível. Uma ideia de vizinhança cuja significação da palavra (limite), se expressaria, a princípio, exatamente ao contrário do que costumamos encontrar no ensino do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), onde a continuidade, a derivada e a integral, essenciais ao cálculo como um todo, utilizam-se de limite para se justificarem.

De um modo geral, o conceito matemático de limite, como representação de uma quantidade fixa de quem uma variável se aproxima o tanto quanto se queira (CAUCHY, 1821), mas que nunca pode ser alcançada levou um longo tempo e percorreu um longo caminho para sua consolidação.

Principais termos da ecologia e um modelo de análise ecológica

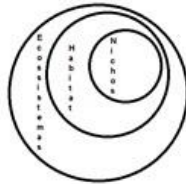
Na Grécia antiga, embora sem essa denominação, a ecologia já se fazia presente nas obras de Hipócrates, Aristóteles e outros filósofos (ODUM, 1988, p.1), no entanto, o termo “ecologia” só foi utilizado pela primeira vez em 1866, pelo biólogo Ernest Haeckel no livro *Generelle Morphologie der Organismen*, para designar a parte da biologia que estuda as relações entre os seres vivos e o meio ambiente, o domínio público, só teria ocorrido em 1967, quando um navio teria derramado óleo ao longo da costa da Inglaterra e o mundo passara a conhecer, através da imprensa, os termos: acidente ecológico, desastre ecológico e catástrofe ecológica.

Para classificarmos os ambientes de existência e desenvolvimento do conceito de limite, mais dois termos da ecologia se fazem necessários, *habitat* e *nicho*, respectivamente como seu lugar e sua função em um dado ecossistema. Uma relação ecológica com saberes matemáticos, como o conceito de limite, pode ser evidenciada

em ambientes como o da história da matemática, da educação matemática e da própria matemática.

Fernandes (2015) apresenta o relacionamento da ecologia com outros saberes e a proposição de um modelo heurístico para análise da ecologia didática, apresentado na figura 1 a seguir, que neste trabalho sugerimos para o desenvolvimento histórico do conceito de limite.

Figura 1 - Ambientes da ecologia de limite



Fonte: Fernandes (2015)

Para caracterizar os *nichos* do conceito de limite, reformulamos os termos da classificação proposta por Fernandes (2015), que podem ocorrer isoladamente ou em conjunto, nas formas: Textuais (NT), Algébricas (NA), Numéricas (NN), Gráficas (NG) e Empíricas (NE). Os NT são identificados pelo uso de expressões verbais, como: “limite”, “lim”, “passar ao limite”, “limite máximo”, “limite mínimo”, “tende a”, “se aproxima de”, “cota máxima”, “cota mínima”, “assíntotas”, “comportamento assintótico”, etc. Os NA ocorrem quando limite também se apresenta em práticas em que seu cálculo é solicitado, a partir de uma expressão algébrica. Os NN são verificados quando o objeto se expuser em práticas aritméticas, com o uso de sequências numéricas que, de alguma forma, “sugestionem” uma tendência, ou ainda façam uso de tabelas. As práticas em que limite se expõe de forma gráfica são características dos NG. Os NE se dão a partir de observações diretas, provenientes experimentos ou resultantes de eventos não controlados, que podem não dispor das formas apresentadas nos *nichos* anteriores.

Desenvolvimento histórico ecológico de limite

Como em todo conhecimento, o conceito de limite modificou-se com o tempo, apresentando funcionalidades distintas, ou seja, diferentes *nichos*, o que pode ter contribuído à forma como esse tema é ensinado hoje. Para se chegar ao conceito atual, aceito pela comunidade científica, um percurso longo e nem sempre linear foi



percorrido. Em Boyer (2012), Eves (2011) e Roque (2012) encontramos detalhamentos da história da Matemática e, particularmente do conceito de limite.

Embora reconhecendo a importância do surgimento da noção desse conceito na antiguidade, induzidos pelos paradoxos de Zenão de Elea (450 a.C), pelo cálculo do volume da pirâmide por Demócrito (410 a.C), pelo Método da Exaustão de Eudoxo (408 a.C) aplicado ao cálculo de áreas, dentre outros, característico dos argumentos geométricos (NG e NE), nos fixaremos, em uma abordagem sucinta, no período de desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral (infinitesimal), mais especificamente, iniciando no século XVII.

O século XVII, além de registrar o surgimento da filosofia moderna, é tido como muito profícuo tanto para as ciências quanto para as artes, apresentando importantes contribuições à construção histórico ecológica do conceito de limite, principalmente através do trabalho de matemáticos como Galileu Galilei (1564–1642).

Observamos que o *infinitamente pequeno* e o *infinitamente grande*, que segundo nossa classificação, situam-se nos *nichos* numéricos (NN) foram formalmente tratados por Galileu, tendo o mesmo, dado maior importância ao primeiro desses em seu trabalho: *Os dois sistemas principais* (1632).

Outros precursores do CDI foram René Descartes (1596-1650), Bonaventura Cavalieri (1598–1647) e Pierre de Fermat (1601-1665). Descartes nos fornece uma correspondência geométrica das operações algébricas, tratando as incógnitas como segmentos, remetendo a sua *Geometria Analítica* a uma algebrização da Geometria Euclidiana, em conjecturas onde, embora não haja relação imediata com o conceito de limite, evidenciam os *nichos* que denominamos de Algébricos (NA) e Geométricos (NG). Com Fermat temos um método para resolver problemas de máximos e mínimos, através do qual, para se calcular o máximo de uma função, como: $p(x) = 3x - x^2$ se fazia, a partir de pequenas variações (NE).

No entanto, foi Cavalieri quem apresentou o método que consiste em se considerar como indivisíveis os elementos que constituem uma figura de maior dimensão (NE) e (NG). Nesse caso, por exemplo, os pontos são os indivisíveis de segmentos de reta; os segmentos são os indivisíveis de figuras planas e essas de um sólido. Para obter o volume de um cilindro por esse método, basta decompô-lo em uma infinidade de cilindros de altura infinitamente pequena, a partir de planos paralelos, e a



soma dos volumes de todos os cilindros resultará no volume do cilindro original (ROQUE, 2012).

Filosoficamente Gottfried Leibniz (1646-1716) criou a noção de Mônada, que seria uma experiência interior que cada indivíduo tem em si mesmo, revelando como uma substância é ao mesmo tempo una e indivisível, juntamente com Newton ele tem como crédito a criação do cálculo moderno. Dentre outros termos matemáticos criados por Leibniz temos os de Função e Cálculo, este último em razão de sua publicação de mesmo nome em 1684, no entanto, antes disso, desenvolveu as fórmulas elementares do CDI e, em 1676, descobriu o Teorema Fundamental do Cálculo, que foi publicado em 1677, onze anos depois de quando teria sido a descoberta não publicada de Newton (SMITH, 1956).

Isaac Newton (1643-1727) chegou ao Cálculo através de conceitos relativos ao movimento e do contínuo, enquanto Leibniz através de uma visão mais estática do discreto. Newton teria descoberto o CDI em 1665, através da Teoria das Fluxões, onde adotou uma visão cinematográfica das grandezas geométricas, a que chamou de *fluentes* e as velocidades por ele foram denominadas de *fluxões*. Newton, no entanto, por razões pessoais, não publicou imediatamente a sua descoberta (FERNANDEZ & CASTRO, 2004).

Newton se baseou em grandezas infinitesimais e, embora não explicitamente, em limite, e Leibniz, por sua vez, baseou-se no desenvolvimento da teoria dos infinitamente pequenos. Como o conceito de limite ainda não estava estabelecido, as maneiras de abordar o problema foram úteis no sentido de auxiliar o que viriam a ser conhecidos posteriormente como números reais.

Com Newton temos uma prevalência dos *nichos* NA e com Leibniz a frequência maior são dos *nichos* NG, o que caracteriza não somente suas abordagens diferentes, como a complementaridade de seus métodos.

Finalizando, coube a Cauchy (1789-1857) trabalhar a sua formalização numa tentativa de evitar os deslizes lógicos de uma abordagem mais intuitiva. O que é uma característica forte do *nicho* NA. Com Karl Weierstrass (1815-1897), se introduz uma definição rigorosa de limite, o que propiciou uma solução para o problema dos infinitésimos. O limite se torna, caso exista, um número real fixo e o processo anterior de se encontrar o limite por aproximações é agora revitalizado em uma forma onde se supõe o limite (a partir de experimentos, da intuição ou de outras indicações) e



verificam-se as aproximações; em uma generalização de um processo aritmético (usual) (NN) em algébrico (NA), é a passagem de um cálculo do limite (operações) para uma álgebra do limite (relações) ou mesmo no estudo de uma estrutura Matemática.

Considerações

Buscamos descrever historicamente, o desenvolvimento e as funcionalidades do conceito de limite, procurando identificar seus *nichos* nos *habitat* do ecossistema onde ele ocorre, ou seja, suas formas de “vida”, mostrando as diversas situações em que esse objeto se produz nesses ambientes, de um ecossistema caracterizado na forma das instituições produtoras e utilizadoras desse conhecimento matemático, com destaque para a geometria da Grécia antiga, das mudanças tecnológicas ocorridas no século XVII e o formalismo do século XIX.

Referências

- ARTAUD, M. **Introduction à l’approche écologique du didactique** – L’écologie des organisations mathématiques et didactiques. In Actes de la IXième École d’été de Didactique des Mathématiques. Caen: ARDM & IUFM, 1998.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3ª Edição. São Paulo, SP: EDGARD BLUCHER, 2012.
- CAUCHY, A. L. **Cours d’Analyse de L’école Royale Polytechnique**. Paris, 1821.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5ª Edição. Campinas - SP: Editora da UNICAMP, 2011.
- FERNANDES, J. A. N. **Ecologia do saber: o ensino de Limite em um curso de Engenharia**. Tese de Doutorado - PPGECEM, UFPA, Belém – PA, 2015.
- FERNÁNDEZ, C. S. CASTRO, C. V. **de los Bernoulli a los Bourbaki**. Espanha: NIVOLA, 2004.
- ODUM, E. P. **Ecologia**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1988.
- ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro, RJ: ZAHAR, 2012.
- SMITH, D. E. **A Source book in Mathematics**. USA: DOVER, 1956.
- ZUCHI, I. **A Abordagem do conceito de Limite via sequência didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional**. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis – SC, 2005.