



EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: ASPECTOS HISTÓRICOS E CONTRIBUIÇÕES NOS PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM

LINEAR DIOPHANTINE EQUATIONS: HISTORICAL ASPECTS AND CONTRIBUTIONS IN TEACHING AND LEARNING PROCESSES

Mauricio José Nascimento Macêdo¹; Mikaelle Barboza Cardoso²

RESUMO

Nos estudos de equações algébricas, é recorrente que os estudantes apresentem dificuldades em compreender o conceito estudado, como também os seus aspectos históricos. No campo da Teoria dos Números, emerge o estudo das Equações Diofantinas Lineares, que se mostram presentes na trajetória de professores de Matemática, tanto na licenciatura quanto na atuação em sala de aula, enfatizando a importância da Educação Algébrica na Educação Básica. Assim, o presente estudo tem como objetivo discutir aspectos históricos das Equações Diofantinas Lineares no âmbito dos principais matemáticos que contribuíram para a elaboração do conceito, bem como compreender como esse conceito é evidenciado em artigos científicos brasileiros, em especial, nos processos educacionais. As Equações Diofantinas Lineares de duas variáveis, x e y , são da forma $ax + by = c$, com a , b e c números inteiros, cujas soluções também são números inteiros. Para o desenvolvimento do presente trabalho, foi utilizada a pesquisa bibliográfica de cunho qualitativo; o levantamento dos estudos se deu no Portal de Periódicos da Capes, no qual foi inserido o termo “Equações Diofantinas Lineares”, como descritor. Foram mapeados 15 artigos científicos. Concluiu-se que as pesquisas indicam as unidades temáticas: situações problemas na Educação Básica e Ensino Superior, Formação Inicial e Continuada de Professores e aplicação do método para o Mercado Financeiro. Além disso, aponta-se para a importância dos professores de Matemática, de conhecer e compreender o histórico das Equações Diofantinas Lineares, de modo a entender as dificuldades enfrentadas pelos próprios matemáticos na elaboração do conceito, que teve como cerne o contexto social, econômico e cultural de cada época.

Palavras-chave: Equações Diofantinas Lineares; Aspectos Históricos; Ensino e Aprendizagem.

ABSTRACT

In studies of algebraic equations, it is common for students to have difficulties in understanding the concept studied, as well as its historical aspects. In the field of Number Theory, the study of Linear Diophantine Equations emerges, that are present in the trajectory of Mathematics teachers,

¹ Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Cariri (UFCA). Professor de Matemática da Secretaria de Educação do Estado do Ceará (SEDUC-CE), Iguatu, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Deoclécio Lima Verde, 147, Bairro Areias, Iguatu, Ceará, Cep 63.508-010. E-mail: mauriciojose384@gmail.com.

 ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8274-3283>.

² Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação (UECE). Professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Canindé, Ceará, Brasil. Endereço para correspondência: Rodovia BR 020, Km 303, s/n - Jubaia, Canindé, Ceará, Brasil, CEP: 62.700-000. E-mail: mikaelle.cardoso@ifce.edu.br.

 ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9465-917X>.



both in teaching and in the classroom, emphasizing the importance of Algebraic Education in Basic Education. Like this, the present study aims to discuss historical aspects of the Linear Diophantine Equations within the scope of the main mathematicians who contributed to the development of the concept, as well as understanding how this concept is evidenced in Brazilian scientific articles in educational processes. The Linear Diophantine Equations of two variables, x and y , are of the form $ax + by = c$, with a , b and c integers, whose solutions are also integers. For the development of this work, qualitative bibliographical research was used; the survey of studies took place on the Capes Periodicals Portal, in which the term “Linear Diophantine Equations” was inserted, as a descriptor. 15 scientific articles were mapped. It was concluded that the research indicates the thematic units: problem situations in Basic Education and Higher Education, Initial and Continuing Training of Teachers and application of the method to the Financial Market. Furthermore, the importance of Mathematics teachers is highlighted, to know and understand the history of Linear Diophantine Equations, to understand the difficulties faced by mathematicians themselves in developing the concept, which had at its core the social context, economic and cultural of each era.

Keywords: Linear Diophantine Equations; Historical Aspects; Teaching and learning.

Introdução

As Equações Diofantinas Lineares têm a forma $ax + by = c^3$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $a \cdot b \neq 0$, e tratam do estudo de soluções inteiras para equações que apresentam mais de uma variável. Esse conceito é explorado, principalmente no campo da Teoria dos Números⁴. O precursor deste estudo foi o matemático helenístico Diofanto de Alexandria, daí a nomenclatura Diofantina (Bemm; Cardoso; Bemm, 2020).

Além da disciplina de Teoria dos Números, as Equações Diofantinas Lineares estão relacionadas com outras áreas do conhecimento, tais como: Química, Álgebra, Criptografia e Economia. Desse modo, apresentam grande abrangência e possibilidades de desenvolver situações de aprendizado e aplicações, proporcionando a contextualização e a interdisciplinaridade entre as áreas (Silva; Brito; Sousa, 2020).

Na Educação Básica e na formação de professores, é possível perceber dificuldades dos estudantes e graduandos em lidar com as abstrações relacionadas aos estudos de equações algébricas, em especial, quando possuem mais de uma variável (Pommer, 2015). Essa situação torna cada vez mais necessário que se discuta a temática desde a Educação Básica, proporcionando um letramento algébrico adequado aos estudantes.

No campo da aritmética, no que se refere à Teoria dos Números, encontra-se uma gama de conceitos que podem e devem ser explorados como recursos de melhoria na

³ Equação Diofantina de duas variáveis.

⁴ Está relacionada à faceta abstrata do estudo dos números e de suas propriedades, em especial dos números inteiros (Eves, 2011).



Educação Básica (Vansan, 2015). Por isso, são importantes a compreensão e as aplicações desses conceitos. Além disso, esses resultados se mostram presentes na trajetória acadêmica dos professores de Matemática em formação, tidos assim com potencial elemento agregador de conhecimento (Doumbia; Carvalho; Almouloud, 2020).

A partir dessas informações que relacionam aspectos históricos, conceituais e aplicações das Equações Diofantinas, esse trabalho tem como objetivo discutir aspectos históricos das Equações Diofantinas Lineares, no âmbito dos principais matemáticos que contribuíram para a elaboração do conceito, bem como compreender como esse conceito é evidenciado em artigos científicos brasileiros, em especial nos processos educacionais.

Sob esse viés, justifica-se o presente estudo como de forma de compreender aspectos históricos dos conceitos aritméticos e algébricos, em particular das Equações Diofantinas Lineares. Além disso, as pesquisas que envolvem os processos de ensino e de aprendizagem na disciplina de Matemática acerca desse conceito ainda são escassas na literatura levantada.

Vale destacar que a Álgebra é uma das Unidades Temáticas do Currículo de Matemática da Educação Básica e sua finalidade conta no desenvolvimento do pensamento algébrico. Essa capacidade tem sua importância nos modelos matemáticos e, por isso, tem repercussão na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas. Ademais, é possível desenvolver o trabalho com a abstração e a familiarização com situações e estruturas matemáticas por meio do uso de letras e outros símbolos (Brasil, 2018).

Assim, é possível apontar a relevância do trabalho ao se chamar atenção para o estudo das equações algébricas desde os anos finais do Ensino Fundamental até o Ensino Superior. O estudo das Equações Diofantinas Lineares, seja nos seus aspectos históricos, na construção do conceito ou nas suas aplicações, apresenta-se como um campo de situações que podem ajudar a desenvolver as habilidades e competências nos estudantes da Educação Básica.

Procedimentos Metodológicos

Para o desenvolvimento do presente trabalho, foi utilizada a pesquisa bibliográfica, de cunho qualitativo. Tal metodologia de pesquisa se baseia no levantamento de informações e identificação de fatores que determinam um fenômeno e



exige que este esteja suficientemente descrito e detalhado (Gerhardt; Silveira, 2009; Godoy, 1995).

As principais fontes para este estudo foram livros, entre as quais destacam-se Boyer (2012) e Eves (2011), além de publicações científicas que abrangem Teoria dos Números e/ou História da Matemática. O levantamento bibliográfico desses estudos se deu no Portal de Periódicos da Capes, no qual foi inserido o termo “Equações Diofantinas Lineares” como descritor, no mês de julho de 2023. Os resultados estão dispostos no Quadro 1.

Quadro 1 – Principais referências que compõem a análise de dados.

Autor(es)
Dario (2022); Silva; Brito; Sousa (2020); Bemm; Cardoso; Bemm (2020); Doumbia; Carvalho; Almouloud (2020); Bonfim; Novaes (2015); Pommer; Pommer (2012); Vansan (2014); Savóis; Freitas (2015); Pommer (2015); Pommer (2014); Rodriguez; Fidalgo (2015); Pommer (2011a); Pommer (2011b); Ferreira; Domingues (2013); Filho; Rodrigues; Ferri (2022); Pommer; Pommer (2013).

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Durante as buscas, foram encontrados 15 artigos científicos brasileiros que abordavam a temática Equações Diofantinas Lineares. Alguns dos estudos se concentram primordialmente nos aspectos históricos, outros trabalham as possibilidades de aplicação do conceito, em especial, nas aulas da Educação Básica, e ainda tem aqueles que exploraram a perspectiva da formação de professores.

Dessa forma, a análise de dados, concentrou-se em duas categorias de base: i) Equações Diofantinas Lineares: matemáticos e suas contribuições; e ii) o que mostram as pesquisas. Nessa última, os artigos foram categorizados em blocos temáticos conforme objetivos delimitados das pesquisas, destacados a seguir: aplicação em situações-problemas na Educação Básica, educação algébrica, formação continuada de professores, métodos/estratégias de solução de Equações Diofantinas Lineares (formação inicial de professores) e aplicação no mercado financeiro.

Equações Diofantinas Lineares: matemáticos e suas contribuições

As Equações Diofantinas Lineares fazem parte de um universo que estuda problemas algébricos indeterminados ou equações indeterminadas, na maioria das vezes,



voltando-se a achar as soluções racionais⁵; em alguns casos, apenas as soluções inteiras (Doumbia; Carvalho; Almouloud, 2020). Recebem esse nome em homenagem ao matemático helenístico Diofanto de Alexandria (c. 201-299 a.C.)⁶ (Eves, 2011).

Apesar disso, Diofanto não foi o primeiro a trabalhar com equações indeterminadas. Civilizações mais antigas, como os babilônios e árabes, por exemplo, já trabalhavam essa teoria. Porém, foi Diofanto quem deu os primeiros passos no surgimento das notações algébricas (Pommer; Pommer, 2012). Além de Diofanto, outros matemáticos contribuíram para o desenvolvimento do conceito de Equações Diofantinas.

O primeiro deles foi Pitágoras (570 a.C.)⁷, que se destacou principalmente nos ramos da Geometria e da Teoria dos Números. É atribuído a ele o teorema que relaciona os lados de um triângulo retângulo: o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos: $a^2 + b^2 = c^2$; repercutido nos chamados Ternos Pitagóricos, que consiste em encontrar inteiros x , y e z , que possam representar os catetos e a hipotenusa de um triângulo. Mais tarde, esses resultados serviriam de base para as Equações Diofantinas Quadradas e inspirariam o último Teorema de Fermat $x^n = y^n + z^n$ (Eves, 2011).

De modo mais específico, Pitágoras foi o responsável pelo desenvolvimento dos conceitos de Mínimo Múltiplo Comum (*MMC*) e Máximo Divisor Comum (*MDC*). Na solução de Equações Diofantinas Lineares, relaciona-se o *MDC* dos coeficientes ao termo independente. Por isso, considera-se que Pitágoras foi, juntamente com seus seguidores, quem deu os primeiros passos para o estudo da Teoria dos Números.

Entretanto, foi Diofanto de Alexandria quem teve seu progresso científico em Alexandria, responsável pelo desenvolvimento da Álgebra Moderna e com grande influência nos estudos sobre Teoria dos Números. Diofanto ficou conhecido por trabalhar com Equações Indeterminadas e resolver Equações Quadráticas sem o uso geométrico, além de ser considerado como um dos precursores do uso das notações algébricas para encontrar solução desse tipo de equação (Pommer; Pommer, 2012). Ele se destacou em Aritmética – Analítica da Teoria dos Números, área em que era considerado um gênio.

⁵ Os problemas algébricos indeterminados ou problemas diofantinos consistiam em achar as soluções racionais. Já o uso moderno dessa terminologia remete à restrição das soluções inteiras, que é o caso mais tratado em livros de Teoria dos Números atualmente (Eves, 2011).

⁶ Não se sabe ao certo o período em que viveu ou sobre a nacionalidade, apenas especula-se que se deu no século III, tendo vivido cerca de 84 anos (Eves, 2011).

⁷ Não se sabe muito da vida pessoal de Pitágoras, inclusive, há quem duvide de sua existência. Especula-se que Pitágoras nasceu na cidade de Samos, ilha grega do mar Egeu (Eves, 2011).



Nessa área, Diofanto traz a resolução de 130 problemas que abordam equações do primeiro e do segundo grau (Silva; Brito; Sousa, 2020). O primeiro livro aborda equações determinadas de uma incógnita; os demais trazem equações indeterminadas de segundo grau e, às vezes de grau maior, de duas ou três incógnitas.

Além dessas anteriores, Diofanto escreveu outras duas obras: Porismas e Números Poligonais. Na primeira, traz um estudo dos problemas algébricos indeterminados que só admitem soluções racionais, que ficaram conhecidos como Problemas Diofantinos; já da segunda, restou apenas um fragmento (Vansan, 2015).

Na notação algébrica, criou abreviações para as potências da incógnita até a de expoente seis, subtração, igualdade e inversos. Tal feito marcou a transição da Álgebra Retórica, cujos argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos para a chamada Álgebra Sincopada, na qual se adotam abreviações para algumas quantidades e operações que se repetem com maior frequência (Pommer; Pommer, 2012).

Um dos matemáticos mais influentes da história foi Euclides, principalmente, nas áreas da Geometria e da Teoria dos Números. Também foi o criador e professor da famosa escola de Matemática de Alexandria, autor de, ao menos, dez obras. Entre estas, destaca-se *Os Elementos*, uma das obras mais usadas e respeitadas; para muitos, a de maior influência no pensamento científico; possui mais de dez mil impressões, sendo a primeira em 1482. Sua importância é tamanha que dominou o ensino de Geometria por mais de mil anos (Boyer; Merzbach, 2012).

O livro *Os Elementos*, de Euclides, contava com 465 proposições dispostas em treze livros: os seis primeiros mais voltados para a Geometria e Álgebra; o Livro X foca nos irracionais; os Livros XI, XII e XIII abordam a Geometria Sólida; os livros VII, VIII e IX contam com 102 proposições de Teoria Elementar dos Números; e o livro VIII traz a Teoria das Proporções contínuas e Progressões Geométricas (Silva; Brito; Sousa, 2020).

Sem dúvida, os mais indispensáveis no estudo das Equações Diofantinas Lineares são o VII e IX, pois o livro VII aborda o Algoritmo de Euclides: técnica usada para achar o máximo divisor comum de dois ou mais números e/ou para verificar se dois números são primos entre si e o livro IX que apresenta Teorema Fundamental da Aritmética, que diz que todo número inteiro maior 1 pode ser expresso como o produto de números



primos; e a prova de Euclides de que a quantidade de números primos é infinita (Pommer; Pommer, 2012; Eves, 2011).

Pierre de Fermat⁸ é reconhecido por ser fundador da moderna Teoria dos Números. Tinha um talento sem igual para essa área, da qual presume-se que sua inspiração tenha sido *A Aritmética de Diofanto*, traduzida por Bachet de Méziriac, em 1621. Muitas das contribuições de Fermat foram enunciadas em notas escritas nas margens do exemplar que tinha da tradução de Bachet. Após sua morte, foram incorporadas em uma nova edição da Aritmética, publicada por um dos filhos de Fermat, Clément Samuel. Muitos dos teoremas enunciados por Fermat foram provados, depois, como verdadeiros (Eves, 2011).

Em 1879, encontrou-se, entre os manuscritos de Christiaan Huygens, um escrito em que Fermat descreve um método geral, por meio do qual pode ter feito parte de suas descobertas: o Método da Descida Infinita. Esse método consiste em provar o contrário do que se quer, fazendo uma afirmação contrária e provando que esta não é válida. Tal método pode ser utilizado, em certos casos, para provar que uma Equação Diofantina não possui soluções inteiras.

Por sua vez, Leonard Euler⁹ deu seus primeiros passos na Matemática por meio de seu pai, um pastor calvinista que conhecia um pouco da ciência. Tais conhecimentos eram fruto dos estudos com Jakob Bernoulli, algo que influenciou para que, mais tarde, Euler fosse estudar com Johann Bernoulli (Eves, 2011).

Entre os feitos de Euler, está o aprimoramento da representação de números como soma de dois, três ou quatro quadrados. Fez a primeira demonstração do Teorema “Um primo da forma $4n + 1$ pode ser representado como a soma de dois quadrados”, incluindo a unicidade da representação, publicada em 1754. Dessa forma, forneceu uma prova para $n = 3$, do último Teorema de Fermat; e reinventou um método para a resolução da equação indeterminada $xy = ax + by + c$.

Esse último foi muito relevante para o estudo das Equações Indeterminadas ou Equações Diofantinas. O artigo *De solutione problematum diophanteorum per numeros íntegros*¹⁰ propõe a solução de equações desse tipo, a partir de sua solução inicial, por

⁸ Nasceu em 17 de agosto de 1601, em Beaumont de Lomagn, nas proximidades de Toulouse, região dos Médios Pirenéus da França, e morreu em Castres ou Toulouse, em 12 de janeiro de 1665.

⁹ Nasceu em 1707, na Basileia, fronteira entre Suíça e Alemanha, países em que viveu por parte da sua vida; residiu também na Rússia, onde chegou a atuar como médico.

¹⁰ Sobre a solução dos problemas de Diofantino, por meio de números inteiros.



meio de recorrências (Dantas; Fossa, 2011). Nesse mesmo campo, vale destacar a prova para $n = 3$, do último teorema de Fermat e a representação de números, como soma de quadrados.

Étienne Bézout¹¹ teve sua carreira inspirada nas obras da Matemática notável, de Leonard Euler; é reconhecido pela sua atuação na área da Álgebra, especialmente no estudo das Equações. Nessa área, produziu *Plusieurs*¹²; *Sur classes d'équations de tous les degrés qui admettent algébrique une solution*¹³ e *Sur le degré des équations résultantes évanouissement de l'inconnues*¹⁴, que abordavam o comportamento das equações.

Tais trabalhos foram reunidos em *Théorie Générale des équations algébriques*. Abordavam, entre outras coisas, uma teoria de estudo do comportamento das equações, dentre os quais está o teorema que diz que o grau da equação final, resultante de qualquer número de equações completas no mesmo número de incógnitas e de todos os graus, é igual ao produto dos graus de equações.

Das descobertas de Bézout, podemos destacar o seu lema: dados inteiros a e b , não ambos nulos, existem inteiros m e n tais que $am + bn = \text{mdc}(a, b)$; já o teorema diz que uma equação do tipo $ax + by = c$ admite soluções inteiras se, e somente se, o $\text{mdc}(a, b)$ dividir c . Tais resultados são importantes para a condição de existência e solução das Equações Diofantinas Lineares (Neto, 2013).

Por fim, David Hilbert¹⁵, um dos matemáticos mais brilhantes e notáveis do século XX, foi professor da Universidade de Göttingen, antiga cidade universitária da Alemanha, de 1895 a 1930, ano que se aposentou. Foi em Göttingen que Hilbert viveu seus últimos dias e está sepultado no Stadtfriedhof de Göttingen (Darela; Cardoso; Rosa, 2011).

Entre as principais obras de Hilbert, estão: *Teoria dos Invariantes e Transformações da Geometria Euclidiana*, que tratava de uma formalização dos conceitos de Euclides; *Trabalhos voltados a Teoria dos Números Algébricos*; *Trabalhos em Análise: Equações Integrais* (Gray, 2000).

Hilbert foi autor de 23 problemas matemáticos que ficaram famosos em sua época, alguns deles sem solução até os dias de hoje. Os primeiros desses foram os problemas de

¹¹ Nasceu em 31 de março de 1730, em Nermours, na França. Filho e neto de magistrados.

¹² Diversos.

¹³ Sobre classes de equações de todos os graus que admitem a álgebra como solução.

¹⁴ Sobre os graus das equações resultantes, desbotamento das incógnitas.

¹⁵ Nasceu em 1862, em Königsber, atual Kaliningrado, na Alemanha.



número 1, 2, 7, 8, 13, 19, 21 e 22, apresentados em 1990, em um congresso internacional de matemáticos em Paris (Eves, 2011).

Entre os problemas de Hilbert, pode-se destacar o décimo, diretamente relacionado ao campo das Equações Diofantinas. Tal problema consistia em descrever, em um número finito de operações, se uma Equação Diofantina admitia ou não soluções inteiras, o qual levou anos até ser solucionado, tendo obtido uma resposta negativa (Tsukimoto, 2000). Em uma combinação dos trabalhos de Martin Davis, Yuri Matiyasevich, Hilary Putnam e Julia Robinson, chegou-se à conclusão de que o algoritmo proposto não existia.

O que mostram as pesquisas: conceito e repercussão nos processos educacionais

Uma Equação Diofantina Linear de duas variáveis, x e y , possui a forma $ax + by = c$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $a \cdot b \neq 0$, em que sua solução pertence ao conjunto dos números inteiros. Além disso, essa equação possui solução se, e somente se, o $mdc(a, b)$ for um divisor de c (Neto, 2013)¹⁶. Por exemplo, a equação $3x + 12y = 15$ possui solução, pois $mdc(3, 12) = 3$ e 3 é divisor de 15; por outro lado, $4x + 8y = 5$ não possui solução, pois $mdc(4, 8) = 4$ e 4 não é um divisor de 5.

Embora seja razoavelmente fácil determinar se uma Equação Diofantina Linear possui ou não solução, encontrá-la não é uma tarefa simples. Em muitos casos, quando esses problemas surgem na Educação Básica, a busca pela solução ocorre por meio da tentativa e erro, sem que seja formulado um procedimento específico (Silva; Brito; Sousa, 2020).

Assim, destaca-se um fato interessante acerca das Equações Diofantinas Lineares, que é a sua relação com outros conceitos e com apontamentos em diferentes frentes de estudo no campo da Matemática. Por isso, já são abordadas na Educação Básica, como por exemplo, o estudo das expressões algébricas e equações do 1º grau com mais de uma incógnita (Savóis; Freitas, 2015).

Por isso, na Educação Básica, em especial na segunda etapa do Ensino Fundamental, é bem recorrente a utilização de letras para generalizar a ideia de número, sendo essa a fase em que o estudante inicia o processo de abstração e a compreensão da

¹⁶ De modo geral, para uma equação que possua n variáveis o critério é o mesmo: o termo independente deve ser divisível pelo mdc de todos os coeficientes da equação.



capacidade de criar parâmetros para representar conjuntos de números. Tal fato chama atenção para o entendimento do conceito de variável, no âmbito do reconhecimento e do uso flexível da variável nas múltiplas dimensões (Pommer, 2015).

Nessa perspectiva, é imprescindível que se atente para a diversidade de estratégias de resolução, permitindo a validade e otimização para cada uma delas. Outro fato importante é em relação à manipulação de grandezas discretas nas soluções, em detrimento das eventuais soluções de natureza contínua, como também no caso em que ocorrem mais de uma solução ou com infinitas soluções (Pommer; Pommer, 2012).

Desse modo, evidencia-se a necessidade de se entender acerca de alguns fatores, como a formação inicial e continuada dos professores, o letramento algébrico e a aplicação desses conceitos em situações do cotidiano e da sociedade em geral. No Quadro 2, estão apresentados os trabalhos por unidades temáticas abordadas pelas pesquisas.

Quadro 2 – Blocos temáticos das pesquisas analisadas.

Autor(es)	Bloco Temático
Silva; Brito; Sousa (2020); Pommer; Pommer (2012); Savóis; Freitas (2015); Pommer; Pommer (2013); Pommer (2011a).	Aplicação em situações problemas na Educação Básica
Pommer (2011b); Doumbia; Carvalho; Almouloud (2020); Pommer (2015), Pommer (2014);	Educação algébrica
Ferreira; Domingues (2013); Bonfim; Novaes (2015); Filho; Rodrigues; Ferri (2022); Bemm; Cardoso; Bemm (2020).	Métodos / estratégias de solução de Equações Diofantinas Lineares (Formação inicial de professores)
Vansan (2015).	Formação continuada de professores
Dario (2022).	Aplicação no Mercado Financeiro

Fonte: Elaborado pelos autores (2023).

Ao observar as pesquisas levantadas, nota-se um predomínio da temática *Aplicação em situações problemas na Educação Básica*, com cinco artigos. Essa temática também se conecta com *Educação Algébrica*, que conta com quatro artigos. A *Formação de professores* também é destacada, trazendo quatro artigos na formação inicial e um na formação continuada. Ainda se tem um artigo que remete a uma temática que aborda aspectos do *Mercado Financeiro*.

No primeiro bloco, *Aplicação em situações problemas na Educação Básica*, chama-se atenção para a possibilidade desse tipo de equação ser explorado com



profundidade na Educação Básica, inclusive, com a apropriação dos conceitos e a reflexão e significado dos conteúdos estudados (Silva; Brito; Sousa, 2020). Para isso, é necessário atentar para o incentivo da aplicação e a criação de situações-problemas que considerem a realidade de cada escola e dos seus estudantes (Sávois, Freitas, 2015).

Nesse sentido, deve ser destacado que o professor tem o papel de valorizar uma abordagem dialética entre procedimentos e conhecimentos, permitindo aos estudantes atribuírem significado aos assuntos estudados (Pommer; Pommer, 2012). Desse modo, as pesquisas apontam para a possibilidade de trabalhar Equações Diofantinas Lineares sem o uso de algoritmos, sendo que as estratégias que trabalham com tentativa e erro, por exemplo, são muito presentes na Educação Básica (Pommer; Pommer, 2013). Com isso, no ciclo básico, é sugerida uma forma de ganho procedimental, com destaque para articulação das linguagens: numérica, algébrica, gráfica e natural (Pommer, 2011a).

No segundo bloco, Educação algébrica, que aborda a concepção de novas estratégias de resolução sob a perspectiva da Educação algébrica, conforme aponta Pommer (2011b), por exemplo, as soluções inteiras são determinadas por meio do conceito de múltiplo ou pela escrita algébrica. Além disso, as letras emergem um viés de generalização funcional e abstrata, o que pode favorecer e permitir ressignificar os símbolos diante dos saberes matemáticos (Pommer, 2015).

Sugere-se, também, a articulação do conhecimento e competências, corroborando a transição entre Aritmética e Álgebra, fundamental para desenvolver o pensamento algébrico (Pommer, 2014). Nesse processo, Pommer (2011b) destaca, por exemplo, a dificuldade dos estudantes quando a equação linear não apresenta solução inteira, o que vai ao encontro do fato de que os alunos “apresentam dificuldades em correlacionar a solução geral da equação diofantina com a solução da situação-problema dada” (Dombia; Carvalho; Almouloud, 2020, p. 124).

O terceiro bloco aborda o modo como se chega a soluções, discutido principalmente em situações da formação inicial dos professores. Em Ferreira e Domingues (2013), é apresentada a utilização da programação em Pascal, como forma de solucionar as equações. Assim, enfatiza-se a utilização de recursos tecnológicos para verificação das soluções dessas equações; o mesmo pode ser observado em Vansan (2015), cujo trabalho aborda as soluções desse tipo de equação por meio da utilização do



software matemático *GeoGebra*; Bemm, Cardoso e Bemm (2020) trazem um estudo que relaciona as soluções em planilhas eletrônicas do aplicativo *LibreOffice*.

Nessa perspectiva, em outros trabalhos, são mencionados outros métodos alternativos de solução das Equações Diofantinas Lineares. Bonfim e Novaes (2014) apresentam um método que consiste em aliar frações contínuas e determinantes; já em Filho, Rodrigues e Ferri (2022), são abordados três métodos de resolução como forma de preparar estudantes para olimpíadas de Matemática.

Em um contraponto, para que o trabalho com métodos alternativos tenha aceitação e aprendido por parte dos estudantes, é importante que se tenha uma reorganização e rearticulação dos conhecimentos dos estudantes. Além disso, é relevante o saber fazer, mas também é necessário levar em consideração elementos como o tempo e as tecnologias que possam viabilizar as técnicas escolhidas (Doumbia; Carvalho; Almouloud, 2020).

O quarto bloco destina-se à discussão de Equações Diofantinas Lineares de duas incógnitas, na perspectiva da formação continuada de professores, com ênfase na docência de Ensino Fundamental e Médio. Assim, em Vansan (2015), esse tipo de equação é abordado como caminhos alternativos para soluções de problemas com que o público da educação básica se depara, sob uma ótica de o professor estar a aplicar conceitos de Teoria dos Números nas aulas.

O estudo das Equações Diofantinas Lineares apresenta também repercussão fora do ambiente escolar, ou seja, aplicação no Mercado Financeiro. Um dessas aplicações é destacada de forma didática por Dario (2022), que explora a alocação de recursos financeiros, de forma a otimizar o processo para pequenos investidores. Isso sugere que o campo de estudo pode repercutir em diferentes frentes da vida dos estudantes e professores.

Algumas considerações

O presente estudo teve como objetivo discutir aspectos históricos das Equações Diofantinas Lineares no âmbito dos principais matemáticos que contribuíram para a elaboração do conceito, bem como compreender como esse conceito é evidenciado em artigos científicos brasileiros, em especial nos processos educacionais.

Aponta-se a importância, para professores de Matemática, de conhecer e compreender o histórico das Equações Diofantinas Lineares, de modo a entender as



dificuldades enfrentadas pelos próprios matemáticos na elaboração do conceito que teve como cerne o contexto social, econômico e cultural de cada época.

Os conceitos advindos das Equações Diofantinas se mostram relevantes para alguns ramos da Matemática e outras ciências, sugerindo inúmeras possibilidades de desenvolvimento, tais como: sua implementação nas aulas da Educação Básica, métodos alternativos de resolução por meio de recursos tecnológicos e aplicabilidade em situações do cotidiano.

Além disso, deve ser destacado o quanto a temática tem desdobramentos no âmbito educacional, uma vez que o levantamento bibliográfico realizado aponta como unidades temáticas diversas aplicações em situações problemas na Educação Básica e Ensino Superior, Formação Inicial de professores e Aplicação do método para o Mercado Financeiro.

Outrossim, esta pesquisa permite a possibilidade da utilização do trabalho como apoio em aulas, mostrando surgimento de conceitos presentes no cotidiano escolar do aluno como algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, bastante explorados em aulas de Matemática em todos os níveis de ensino.

Espera-se, por fim, que o conceito das Equações Diofantinas possa continuar sendo explorado, em especial na Educação Básica. Com a compreensão da evolução histórica desse conceito, os professores podem desenvolver práticas pedagógicas, incorporando uma perspectiva contextualizada que conecte o presente com o passado, permitindo uma abordagem mais significativa e engajadora para os estudantes.

Referências

BEMM, Laerte; CARDOSO, Vinicius Bomfim; BEMM, Priscila Costa Ferreira de Jesus. Soluções de equações diofantinas com coeficientes nos inteiros gaussianos por meio de planilhas eletrônicas. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 6, n. 2, p. e4004-e4004, 2020.

BONFIM, Delfim Dias; NOVAES, Gilmar Pires. Frações Contínuas, Determinantes e Equações Diofantinas Lineares. **Ciência e Natura**, v. 37, p. 95-102, 2015.

BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.



DOUMBIA, Cheick Oumar; CARVALHO, Geciara da Silva; ALMOULOU, Saddo Ag. Algumas técnicas de resolução das equações diofantinas do primeiro grau a duas incógnitas em Z. **TANGRAM-Revista de Educação Matemática**, v. 3, n. 2, p. 102-126, 2020.

DANTAS, Joice de Andrade; FOSSA, John A. O Primeiro Trabalho de Euler sobre Equações Diofantinas. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 9., 2011, Natal. **Anais...** Aracaju: Sbh, 2011. p. 1 - 9.

DARELA, Eliane; CARDOSO, Marleide Coan; ROSA, Rosana Camilo da. **História da Matemática**. 3. ed. Palhoça: Unisulvirtual, 2011.

DARIO, Ronie Peterson. Equações diofantinas e alocação otimizada de recursos financeiros de pequenos investidores no mercado acionário brasileiro. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 8, n. 1, p. e3007-e3007, 2022.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. São Paulo. Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, Hugo Brenner Oliveira; DOMINGUES, José Sérgio. Equações diofantinas lineares: fundamentação matemática e um algoritmo de resolução. **ForScience**, v. 1, n. 1, p. 22-32, 2013.

FILHO, Egidio Costa; RODRIGUES, Márcio Lúcio; FERRI, Orlando Eduardo da Silva. Técnicas para resolução de equações diofantinas lineares. **Professor de Matemática**. SBM, v.10, n.1, 2022.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Ufrs, 2009.

GODOY, Arilda Schmidt. Pesquisa qualitativa tipos fundamentais. **Rae**, São Paulo, v. 35, n. 3, p.20-29, jun. 1995.

GRAY, Jeremy. **The Hilbert Challenge**. Oxford University Press, USA, 2000.

NETO, Antônio C. M., **Teoria dos Números**. 2. ed. Tópicos de Matemática Elementar. Rio de Janeiro. SBM, 2013.

POMMER, Wagner Marcelo; POMMER, Clarice P. C. Retroz. Equações Diofantinas Lineares: um viés histórico-epistemológico como recurso para introduzir diferentes estratégias de resolução de problemas. **REnCiMa**, São Paulo, v. 3, n. 1, p.28-43, jun/jul. 2012.

POMMER, Wagner Marcelo; POMMER, Clarice Peres Carvalho Retroz. Equações Diofantinas Lineares no Ensino Médio: um tema mobilizador de estratégias aritmética & algébricas. **Cadernos da Pedagogia**, v. 6, n. 12, 2013.



POMMER, Wagner Marcelo. As Equações Diofantinas Lineares e o novo Ensino Médio. **Boletim GEPEM**, n. 58, p. 51-70, 2011b.

POMMER, Wagner Marcelo. Equações Diofantinas Lineares: um tema articulador de estratégias no ensino de Matemática Elementar. **Re-vista**, v. 21, n. 1, p. 145-157, 2014.

POMMER, Wagner Marcelo. Os usos flexíveis do conceito de variável na Educação Básica: Um estudo envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. **Ciência e Natura**, v. 37, n. 3, p. 356-364, 2015.

POMMER, Wagner Marcelo. Transição Aritmética & Álgebra: Contribuições da temática das Equações Diofantinas Lineares. 2011a.

SAVÓIS, Josias Neubert; FREITAS, Daiane. Método para resolver equações diofantinas com coeficientes no conjunto dos números racionais. **Ciência e Natura**, Santa Maria, v. 37, n.3, Ed. Especial PROFMAT, 2015, p. 47 – 57.

SILVA, Diego Adriano; BRITO, Arnaldo Silva; SOUSA, Valdirene Gomes de. Equações Diofantinas Lineares: um estudo com estudantes do 1º ano do Ensino Médio. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 6, n. 2, p. e2009-e2009, 2020.

TSUKIMOTO, Edson Tiharu. **Uma prova da insolubilidade do Décimo Problema de Hilbert e relações com complexidade de algoritmos**. 2000. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45131/tde-20210729-115809/>. Acesso em: 27 jul. 2023.

VANSAN, Alexandre Hungaro. Equações Diofantinas: um projeto para a sala de aula e o uso do GeoGebra. **Ciência e Natura**, v. 37, 2015.

Recebido em: 01 / 08 / 2023
Aprovado em: 10 / 07 / 2024