BOCEHM
Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

e-ISSN: 2447-8504 **DOI**: 10.30938/bocehm.v11i31.11108

POLINÔMIO DE GAUSS: UMA INVESTIGAÇÃO DA ORIGEM DO CONCEITO E A RELAÇÃO COM COEFICIENTE BINOMIAL

GAUSS POLYNOMIAL: AN INVESTIGATION OF THE ORIGIN OF THE CONCEPT AND THE RELATIONSHIP WITH BINOMIAL COEFFICIENT

Marcia Aparecida Garcia Teixeira[1]; Mariana Fabiane Garcia Travassos[2], Irene Magalhães Craveiro[3]

RESUMO

O foco principal deste trabalho é explorar a origem do conceito de polinômios de Gauss ou coeficiente q-binomial, relacionando suas propriedades com o coeficiente binomial. Essa estrutura pode ser usada em uma infinidade de interpretações combinatórias estudadas no Ensino Médio e início do Ensino Fundamental II. Os coeficientes binomiais aparecem naturalmente como multiplicadores na expansão de $(a+b)^n$, onde a e b são números reais. Esses coeficientes possuem uma estreita relação com as combinações simples e são amplamente utilizados em combinatória. Eles possuem uma riqueza de identidades que podem ser demonstradas tanto por métodos algébricos quanto combinatórios. A ideia principal deste trabalho é apresentar uma diversidade de propriedades inerentes ao conceito de polinômios de Gauss e, ao mesmo tempo, calcular o limite quando q tende a 1. Observa-se que o resultado gera identidades provenientes do coeficiente binomial. Essa função polinomial é inicialmente definida por meio de uma função racional, mas ao longo do trabalho, observa-se que ela pode ser representada como uma função polinomial na variável q, com $q \neq 1$. Ao expandir essa função polinomial, obtemos coeficientes que carregam informações de problemas de natureza combinatória. Essa característica interessante permite ao docente estabelecer uma conexão entre conceitos algébricos e combinatórios. Uma outra propriedade interessante inerente ao coeficiente binomial é a relação estendida de Stifel para o polinômio de Gauss que permite a construção de um triângulo aritmético, explorando a natureza geométrica para resolver problemas combinatórios e algébricos. No entanto, o objetivo é descrever a origem do conceito e apresentar uma maneira diferente de introduzir uma classe de polinômios, explorando as operações algébricas entre eles e unindo, de maneira elegante, a Álgebra com a Análise Combinatória.

Palavras-chave: Polinômio de Gauss. Coeficiente Binomial. Ensino de Matemática. História da Matemática.

[1] Mestre em Matemática (PROFMAT) pela Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD). Professora da Educação Básica (SED-MS), Bonito, MS, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Matheus Muller, 165, Jardim Andrea, Bonito, MS, Brasil, CEP: 79290-000. E-mail: teixe_ira@hotmail.com.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8895-624X.

[2] Mestre em Matemática (PROFMAT) pela Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD). Técnica da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD). Endereço para correspondência: Rodovia Dourados -Ithaum, km12, Cidade Universitária, Dourados, MS, Brasil, CEP: 79804-970. E-mail: marianatravasso@ugfd.edu.br

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4188-2500.

[3] Doutorado em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Professora da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD). Endereço para correspondência: Rodovia Dourados - Ithaum, km12, Cidade Universitária, Dourados, MS, Brasil, CEP: 79804-970. E-mail: irenecraveiro@ugfd.edu.br.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-2839-2598.

ABSTRACT

The main focus of this work is to explore the origin of the concept of Gaussian polynomials or q-binomial coefficient, relating its properties to the binomial coefficient. This structure can be used in a multitude of combinatorial interpretations studied in High School and the beginning of Elementary School II. Binomial coefficients naturally appear as multipliers in the expansion of $(a+b)^n$, where a and b are real numbers. These coefficients have a close relationship with simple combinations and are widely used in combinatorics. They have a wealth of identities that can be demonstrated by both algebraic and combinatorial methods. The main idea of this work is to present a diversity of properties inherent to the concept of Gaussian polynomials and, at the same time, calculate the limit when q tends to 1. It is observed that the result generates identities arising from the binomial coefficient. This polynomial function is initially defined using a rational function, but throughout the work, it is observed that it can be represented as a polynomial function in the variable q, with $q \neq 1$. By expanding this polynomial function, we obtain coefficients that carry information from problems of a combinatorial nature. This interesting feature allows the teacher to establish a connection between algebraic and combinatorial concepts. Another interesting property inherent to the binomial coefficient is the extended Stifel relation to the Gaussian polynomial that allows the construction of an arithmetic triangle, exploiting the geometric nature to solve combinatorial and algebraic problems. However, the objective is to describe the origin of the concept and present a different way of introducing a class of polynomials, exploring the algebraic operations between them and elegantly uniting Algebra with Combinatorial Analysis.

Keywords: Gauss polynomial. Binomial Coefficient. Mathematics Teaching. History of Mathematics.

Introdução

O polinômio de Gauss sobreveio de uma generalização do coeficiente binomial publicado por George Fontené em 1915, de acordo com (He-Xiao; Shannon; Shiue,2021). Segundo os autores supracitados a generalização desse conceito fundamenta-se em considerar uma sequência numérica arbitrária do tipo $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e, por meio de uma expressão algébrica, definida pela seguinte razão: Dados os inteiros $n > k > 0$,

$$\binom{n}{k}_A = \frac{A_n \times A_{n-1} \times \ldots \times A_{n-k+1}}{A_k \times A_{k-1} \times \ldots \times A_1} \qquad (1)$$

com $\binom{n}{0}_A = \binom{n}{n}_A = 1.$ O Caso particular da sequência numérica $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por $A_n = n$ temos o coeficiente binomial, o termo coeficiente binomial foi introduzido pelo matemático alemão Michel Stifel (1486-1567). A notação que usamos atualmente para "o coeficiente binomial, utilizando parênteses, foi introduzida pelo matemático e físico alemão Barão Andreas von Ettinghausen (1796- 1878)" (Corés, 2014, p.14).

O coeficiente binomial generalizado foi redescoberto, mais tarde, por Morgan Ward (1901-1963) e a sequência é essencialmente arbitrária, mas exige as condições que

$A_0 = 0$ e $A_1 = 1$. Com esta definição em (Gould, 1969), conforme a figura 1 que descreve o Triângulo de Ward-Fontené.

Figura 1 – Fontené - Ward Triangulo

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad \frac{A_2}{A_1} \quad 1 \\
1 \quad \frac{A_3}{A_1} \quad \frac{A_3}{A_1} \quad 1 \\
1 \quad \frac{A_4}{A_1} \quad \frac{A_4A_3}{A_1A_2} \quad \frac{A_4}{A_1} \quad 1 \\
1 \quad \frac{A_5}{A_1} \quad \frac{A_5A_4}{A_1A_2} \quad \frac{A_5A_4}{A_1A_2} \quad \frac{A_5}{A_1} \quad 1 \\
1 \quad \frac{A_6}{A_1} \quad \frac{A_6A_5}{A_1A_2} \quad \frac{A_6A_5A_4}{A_1A_2A_3} \quad \frac{A_6A_5}{A_1A_2} \quad \frac{A_6}{A_1} \quad 1 \\
1 \quad \frac{A_7}{A_1} \quad \frac{A_7A_6}{A_1A_2} \quad \frac{A_7A_6A_5}{A_1A_2A_3} \quad \frac{A_7A_6A_5}{A_1A_2A_3} \quad \frac{A_7A_6}{A_1A_2} \quad \frac{A_7}{A_1} \quad 1
\end{array}
$$

Fonte: Gould (1969, p. 25).

De acordo com Travassos (2017) os números binomiais, representados por $\binom{n}{k}$, encontram sua definição com base em princípios combinatórios representando a quantidade de maneiras de selecionar k elementos a partir de um conjunto de n elementos. Um contexto particularmente interessante onde esses coeficientes surgem é na expansão da expressão $(1 + z)^n$, na qual z é um número real e n é um número natural. O coeficiente que acompanha z^k nessa expansão é precisamente o coeficiente binomial, esse importante resultado é conhecido como o Teorema Binomial.

Apesar de pouco utilizado no Ensino Médio, o Teorema Binomial permite fazer uma ligação entre o pensamento algébrico e o combinatório pelo aluno e fazer um tratamento de resolução de diversos problemas que podem ser resolvidos de várias formas. Os coeficientes gerados por meio do Teorema Binomial permitem a construção de um triângulo aritmético obtido de forma rápida através de uma forma recursiva conhecida com relação de Stifel[4]. Conforme orientam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) para o Ensino Médio, é fundamental considerar que as técnicas de

[4] A relação de Stifel e uma recorrência dada por: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, com\ n \in \mathbb{N}\ e\ 1 \leq k \leq n.$

contagem abordadas na disciplina de matemática podem ser exploradas de maneira interdisciplinar, integrando-as a outros conteúdos e áreas do conhecimento.

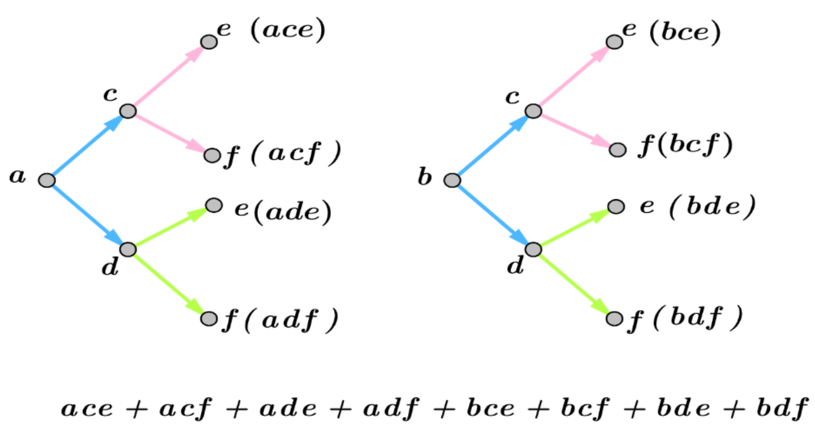
Considerando a proposta de integrar os conceitos geométricos, algébricos e combinatórios, conforme delineado por Santos (2007), demonstramos essa ideia unindo os termos algébricos e combinatórios da seguinte maneira: o termo binômio é qualquer expressão da forma $(a+b)$, isto é, a soma de dois símbolos distintos. Estamos interessados nos coeficientes que aparecem na expansão $(a+b)^n$. Considerando a proposta de integrar os conceitos geométricos, algébricos e combinatórios, conforme delineado por Santos (2007), demonstramos essa ideia unindo os termos algébricos e combinatórios da seguinte maneira: o termo binômio é qualquer expressão da forma $(a+b)$, isto é, a soma de dois símbolos distintos. Estamos interessados nos coeficientes que aparecem na expansão $(a+b)^n$.

Por exemplo, no caso que temos 3 binômios distintos:

$$(a+b)(c+d)(e+f) = (ac+ad+bc+bd)(e+f) = ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf \qquad (2)$$

No caso da identidade dada (2), ao usarmos a propriedade distributiva, inerente dos estudos da álgebra, obtemos 8 parcelas do lado direto de (2)

Figura 2- Diagrama de árvores do produto de três binômios distintos



Fonte: Os autores

Em geral, quando usamos esse raciocínio para um inteiro $n > 3$, ou seja, n binômios distintos, observa-se que o número de parcelas obtidos pelo princípio multiplicativo, é 2^n parcelas possíveis. Agora vamos fazer essa contagem no caso em que os binômios são idênticos. Para ilustrar considere $n = 6$: Temos $2^6 = 64$ maneiras de selecionarmos seis letras, uma de cada binômio distintos. Vamos analisar o caso em que 6 binômios são iguais a $(a + b)$, por exemplo:

i. Se tomarmos a letra a nos quatro primeiros binômios e a letra b nos dois últimos teremos: a^4b^2

ii. Se tomarmos a letra a nos quatro binômios centrais e a letra b no primeiro e no último, teremos: a^4b^2.

Note que o termo a^4b^2 irá aparecer toda vez que escolhermos a letra a em, exatamente, quatro dos seis binômios e a letra b nos dois restantes. Desta forma, a quantidade de escolhas diferentes para obter o termo a^4b^2 é $\binom{6}{4}$ ou, de forma análoga, $\binom{6}{2}$. Como todo termo é formado do produto de seis letras podemos concluir, então, que o termo geral na expansão de $(a + b)^6$ é da forma a^ib^j , onde i + j t= 6, ou seja, cada um dos termos é da forma a^ib^{6-i} . Segue que cada um destes termos aparece $\binom{6}{i}$ vezes. Sendo assim, a expansão fica da seguinte forma:

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^0b^6 + \binom{6}{1}a^1b^5 + \binom{6}{2}a^2b^4 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^4b^2 + \binom{6}{5}a^5b^1 + \binom{6}{6}a^6b^0$$

$$(a+b)^6 = 1b^6 + 6ab^5 + 15a^2b^4 + 20a^3b^3 + 15a^4b^2 + 6a^5b + 1a^6.$$

Em geral, os termos obtidos na expansão de $(a + b)^n$ são da forma a^ib^{n-i} . Estes termos surgem a partir de cada escolha da letra a em i binômios, e para a escolha da letra b em $n - i$ binômios. Como tal escolha pode ser feita de $\binom{n}{i}$ maneiras diferentes então podemos enunciar o seguinte resultado, conhecido como **Teorema Binomial**.

Destacamos essa ideia combinatória de trabalhar o Teorema Binomial, entretanto, podemos utilizar o mesmo teorema de forma algébrica usando a propriedade distributiva, potência de mesma base, monômios, soma de monômios idênticos.

O Polinômio de Gauss

O polinômio de Gauss denotado $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ é uma sequência de funções racionais que depende dos inteiros positivos $n \geq k$, gerada pela sequência de polinômios na indeterminada q fazendo $A_n = 1 - q^n$, com $q \neq -1$ e $n > 0$, em (1) como segue

$$\frac{(1-q^{n-k+1})(1-q^{n-k+2})\dots(1-q^{n})}{(1-q^{k})(1-q^{k-1})\dots(1-q)}=\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} n\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n\\ n\end{bmatrix}=1 \qquad (3)$$

No caso da definição da generalização do coeficiente binomial dada por George Fontené fez-se o uso de sequências numéricas, cujas entradas são números reais ou complexos, entretanto Gauss explorou essa definição no conjunto dos polinômios, escolhendo uma classe de polinômios na indeterminada q, de forma que a razão $\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}$, quando q se aproxima de 1 converge para o coeficiente binomial.

Segundo Andrews (1999) algumas das propriedades inerentes ao coeficiente binomial podem ser generalizadas para $\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}$. No entanto, quando se expande $\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}$, os coeficientes desse polinômio carregam respostas de problemas de natureza combinatória. O polinômio de Gauss ou coeficiente q −binomial foi estudado por diversos matemáticos no século XIX, como Euler, Cauchy, Jacson. De acordo com Andrews (1999) em 1984, George Polya deu uma interpretação desse polinômio em termos de áreas sob caminhos reticulados publicado em uma coletânea de artigos, que foram distribuídos em quatro volumes[5].

Um dos questionamentos que queremos responder é o seguinte: para todo natural $n \geq k$ a função racional $\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}$ é uma função polinomial? Observe que a resposta é válida para o caso particular $k=0$ e $k=n,$ dado n. A proposição (2.2) irá auxiliar na validação desse fato.

Proposição 2.1: Para $k,n \in \mathbb{N},\ n>k\geq 0,$ temos que

$$\begin{bmatrix} n\\ k+1\end{bmatrix}=\frac{(1-q^{n-k})}{(1-q^{k+1})}\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}.$$

Demonstração: De fato, segue de (2),

$$\begin{bmatrix} n\\ k+1\end{bmatrix}=\frac{(1-q^{n-(k+1)+1})(1-q^{n-k+1})(1-q^{n-k+2})\dots(1-q^{n})}{(1-q^{k+1})(1-q^{k})(1-q^{k-1})\dots(1-q)}=$$

$$\frac{(1-q^{n-k})}{(1-q^{k+1})}\times\frac{(1-q^{n-k+1}(1-q^{n-k+2})\dots(1-q^{n})}{(1-q^{k})(1-q^{k-1})\dots(1-q)}=\frac{(1-q^{n-k})}{(1-q^{k+1})}\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}.$$

Proposição 2.2: Para $k,n \in \mathbb{N}, n\geq k>0,$ temos que:

$$\begin{bmatrix} n+1\\ k+1\end{bmatrix}=q^{n-k}\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} n\\ k+1\end{bmatrix}.$$

5 Vide mais a respeito em Polya (1984, p. 444) no quarto volume.

Demonstração: É claro que $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} = 1$. Então para todo $0 < k < n$, Segue da Proposição 2.1 e de (3),

$$q^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} = q^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \frac{(1-q^{n-k})}{(1-q^{k+1})}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\left(q^{n-k} + \frac{(1-q^{n-k})}{(1-q^{k+1})}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\left(\frac{q^{n-k}(1-q^{k+1}) + 1 - q^{n-k}}{(1-q^{k+1})}\right) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\left(\frac{q^{n-k} - q^{n-k+k+1} + 1 - q^{n-k}}{(1-q^{k+1})}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\left(\frac{1-q^{n+1}}{(1-q^{k+1})}\right) = \frac{(1-q^{n-k+1})(1-q^{n-k+2})\dots(1-q^{n})}{(1-q^{k})(1-q^{k-1})\dots(1-q)} \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{(1-q^{k+1})}\right) =$$

$$\frac{(1-q^{n-k+1})(1-q^{n-k+2})\dots(1-q^{n})(1-q^{n+1})}{(1-q^{k+1})(1-q^{k})(1-q^{k-1})\dots(1-q)} = \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma, usando a definição de polinômio de Gauss e a Proposição 2.1 validamos a seguinte identidade, para todo $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq k > 0$, $\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{k+1}\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$. , Também prova-se por indução sobre n que a função racional $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, $n \geq k > 0$ é um polinômio. De fato, a base da indução segue da definição $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ n+1 \end{bmatrix} = 1.$

Suponha que para todo n, $0 < k \leq n$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ é um polinômio e observe que $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ (k-1)+1 \end{bmatrix} = q^{n-(k-1)}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^{n-k+1}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, de acordo com a proposição (2.2). Como esses $\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ são polinômios, então $\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}$ também é um polinômio.

Já temos o fato $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ é um polinômio é natural perguntarmos qual o grau desse polinômio que nesse contexto denota-se $\deg\left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right)$ para isso vamos reescrever $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ dado na definição dada em (3), para $n > k > 0$ vamos reescrevê-lo da seguinte forma, e a partir daí calculamos o grau

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1-q^{n})(1-q^{n-1})\dots\left(1-q^{n-(k-1)}\right)}{(1-q^{k})\dots(1-q)} \times \frac{(1-q^{n-k})\dots(1-q^{2})(1-q)}{(1-q^{n-k})\dots(1-q^{2})(1-q)}.$$

Logo $\deg\left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right) = (1+2+\cdots+n) - (1+2+\cdots+k+1+2+3+\cdots+n-k) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} - \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} = \binom{n+1}{2} - \binom{k+1}{2} - \binom{n-k+1}{2}.$

Polinômio de Gauss e o Coeficiente Binomial

Funções definidas numa variável q de forma que ao estudarmos o seu limite quando q se aproxima de 1, tornam-se números combinatórios familiares como números fatoriais e coeficientes binomiais e são chamados de q-análogo. De acordo com Travassos (2017), a definição (3.1) é um exemplo de q-análogo.

Definição 3.1: Seja $n \in \mathbb{N}$. Chamamos de um q-análogo do natural n, e denotamos por $[n]$ o seguinte polinômio na variável $q \neq 1$ definido como $[0] = 1$,

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}, n \geq 1\ .$$

Segue da definição 3.1, que $\lim_{q \to 1} [n] = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$ e dessa forma dizemos que $[n]$ é uma extensão do número natural n.

Segundo Travasso (2017) um q-análogo do número fatorial segue na definição (3.2).

Definição 3.2: Seja $n \in \mathbb{N}$. Chamamos de um q-análogo do $n!$, e denotamos por $[n]!$ o seguinte polinômio na variável q definido recursivamente por: $[n]! = [n][n-1]!, n > 0$ e $[0]! = 1$.

Observe que $\lim_{q \to 1} [n]! = n!$ e dessa forma dizemos que $[n]!$ é uma extensão do número não negativo fatorial de $n, n!$.

Proposição 3.1: O polinômio de Gauss pode ser escrito em função do q -análogo do número fatorial, ou seja, dados os inteiros positivos $n \geq k$, $q \neq -1$ e $n > 0$. Então

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!}.$$

De acordo com Travassos (2017) a demonstração é válida para a proposição (3.1).

Demonstração: Nos casos $k = 0$ e $k = 1$ a proposição é válida. Suponha que $n > k > 1$, dessa forma segue de (2) que

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1 - q^{n-k+1})(1 - q^{n-k}) \ldots (1 - q^n)}{(1 - q^k)(1 - q^{k-1}) \ldots (1 - q)}.$$

Dessa forma reescrevendo $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(1 - q^n)(1 - q^{n-1}) \ldots \left(1 - q^{n-(k-1)}\right)}{(1 - q^k) \ldots\ (1 - q)} \times \frac{(1 - q^{n-k}) \ldots (1 - q^2)(1 - q)}{(1 - q^{n-k}) \ldots\ (1 - q^2)(1 - q)} =$$

$$= \frac{\frac{(1-q^n)}{1-q}(1-q)\frac{(1-q^{n-1})}{1-q}(1-q)\ldots\frac{(1-q^2)}{1-q}(1-q)\frac{(1-q)}{1-q}(1-q)}{\frac{(1-q^k)}{1-q}(1-q)\ldots\frac{(1-q)}{1-q}(1-q)\frac{(1-q^{n-k})}{1-q}(1-q)\ldots\frac{(1-q)}{1-q}(1-q)}$$

$$\frac{\frac{(1-q^n)}{1-q}\frac{(1-q^{n-1})}{1-q}\ldots\frac{(1-q^2)}{1-q}\frac{(1-q)}{1-q}(1-q)^n}{\frac{(1-q^k)}{1-q}\ldots\frac{(1-q^2)}{1-q}\frac{(1-q)}{1-q}(1-q)^k\frac{(1-q^{n-k})}{1-q}\ldots\frac{(1-q^2)}{1-q}\frac{(1-q)}{1-q}(1-q)^{n-k}} =$$

$$= \frac{\frac{(1-q^n)}{1-q}\frac{(1-q^{n-1})}{1-q}\ldots\frac{(1-q^2)}{1-q}\frac{(1-q)}{1-q}.}{\frac{(1-q^k)}{1-q}\ldots\frac{(1-q^2)}{1-q}\frac{(1-q)}{1-q}\frac{(1-q^{n-k})}{1-q}\ldots\frac{(1-q^2)}{1-q}\frac{(1-q)}{1-q}} =$$

$$= \frac{[n][n-1]\ldots[1]}{[k][k-1]\ldots[1]\ldots[n-k]\ldots[2][1]} =$$

$$= \frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!}.$$

Uma interessante identidade que decorre imediatamente da proposição 3.1 é a relação de simetria, ou seja, para todo inteiro positivo $n \geq k$.

$$\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-k]!\,[n]!} = \frac{[n]!}{[n]!\,[n-k]!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}.$$

Além do mais, a proposição 3.1 permite calcular o limite quando q tende a 1 da função polinomial $\begin{bmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{k} \end{bmatrix}$, como segue:

$$lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = lim_{q\to 1}\, 1 = 1 = \binom{n}{0};\, lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = lim_{q\to 1}\, 1 = 1 =$$
$$\binom{n}{n};\, lim_{q\to 1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \binom{n}{k}, 0 < k < n.$$

Com isso concluímos que o polinômio de Gauss é uma extensão do coeficiente binomial ou q-análogo do coeficiente binomial.

Segundo Eves (1996), após o declínio da matemática grega, a chinesa emergiu como uma das mais inovadoras em todo o mundo. Enquanto a Europa Ocidental enfrentava um período de estagnação cultural durante a Alta Idade Média, a matemática chinesa florescia, gerando resultados que a Europa só viria a redescobrir muito mais tarde, especialmente durante e após o Renascimento. Notavelmente, a China foi pioneira na criação de um sistema de numeração posicional decimal. Um aspecto fascinante foi a introdução do Triângulo Aritmético de Pascal e a compreensão do método binomial. Este triângulo está intimamente relacionado aos coeficientes que desempenham um papel fundamental na expansão de $(a+b)^n$ e na fórmula de recorrência para os coeficientes binomiais $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, com $0 \leq k \leq n$.

Esta relação de recorrência foi criada pelo matemático alemão Michael Stifel (1487–1567). A maior obra de Stifel é *"Arithmetica Integra"* 1544, um tratado importante que desenvolveu a Álgebra na Alemanha do século XVI. Nesta obra, Stifel apresenta o triângulo dos coeficientes binomiais até os de ordem 17, inclusive, a fórmula de recorrência para a construção deste triângulo. Esta fórmula é conhecida como *Relação de Stifel*, de acordo com (Boyer, 2010).

A fórmula de recorrência similar ao polinômio de Gauss foi dada na proposição (2.2), para todo $k, n \in \mathbb{N},\ n > k \geq 0$, $\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = q^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$. Da mesma forma, prova-se que, para todo $k, n \in \mathbb{N},\ n > k \geq 0$, $\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{k+1} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}$, e ambas são extensões da Relação de Stifel, pois quando calculamos o limite quando q tende 1 obtemos $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Teorema binomial generalizado

Ainda jovem, de acordo com (Hefez,2022), Gauss resolveu o Paradoxo do Binômio, o que se conhecia desde Newton era o desenvolvimento da série de funções dada pela igualdade onde n é um número real, não necessariamente natural.

$$(1+x)^n = 1 + nx + \tfrac{n(n-1)}{2}x^2 + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \cdots. \qquad (4)$$

Esses tipos de armadilhas podem ser gerados por somas infinitas, como por exemplo: $n = -1$ e $x = -2$ substituídos em (4), como segue, $(1-2)^{-1} = 1 + (-1).(-2) + \frac{(-1)((-1)-1)}{2}(-2)^2 + \frac{(-1)((-1)-1)((-10-2)}{6}(-2)^3$, ou seja $(-1) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots$.

Em função desse tipo de armadilha, Gauss sente a necessidade de introduzir a noção de convergência para séries infinitas e a igualdade (4) é válida quando a série infinita dada em (4) converge para valores n, x fixados.

De acordo com (Boyer, 2010), o Teorema Binomial tornou-se conhecido mediante correspondências de Newton endereçadas a Leibniz em 1676. Nessas correspondências Newton explica como deduziu propriedades importantes ao desenvolvimento de potências de binômios e mostrou que era possível aplicá-las aos expoentes reais. Ele descobriu que a extração de raízes torna-se muito mais abreviadas quando utiliza-se o teorema binomial.

Aliás, em 1685 Wallis publica em sua obra, o Teorema Binomial, desenvolvido por Newton, ao estudar um trabalho deste, sobre a determinação da área sob curvas da forma $(1-x^2)^n$. Tal teorema foi descoberto em 1664 ou 1665 e foi descrito em duas cartas de Newton para o secretário da Royal Society, Henry Oldenburg

> Esse teorema foi enunciado pela primeira vez por Newton numa carta de 13 de junho de 1676, enviada a Oldenburg mas destinada a Leibniz. Numa segunda carta de 24 de outubro do mesmo ano Newton explicou detalhadamente como tinha chegado a essa série binomial (Boyer, 2010, p.273).

Os números binomiais$\binom{n}{k}$ podem ser definidos combinatoriamente como o número de maneiras de escolher k objetos de um conjunto de n objetos. Na expansão de $(1+x)^n$, onde x é um número real e n é um número natural sendo que o coeficiente de x^ké igual a $\binom{n}{k}$, tal resultado é conhecido como Teorema Binomial. “O polinômio de Gauss, também chamado de coeficiente q-binomial, definido na seção três é uma extensão do coeficiente binomial, satisfazendo diversos resultados similares às identidades obtidas por meio do coeficiente binomial.” (Travassos, 2017, p.38). O próximo resultado que iremos provar por indução é o Teorema q −Binomial. Ao calcular o limite quando q tende a 1 na proposição (4.1) obtemos o Teorema binomial, ou seja, os coeficientes binomiais na expansão de $(1+x)^n$.

Proposição 4.1: Sejam $x, q \neq 1 \in \mathbb{R}$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^{n-1}) =$$

$$1 + x\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + x^2\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}q + x^3\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}q^3 + x^4\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}q^6 \dots + x^n\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}q^{\frac{n(n-1)}{2}} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}x^k.$$

Demonstração: Faremos a prova por indução sobre. O caso $n=1$, a proposição 5.1, pois

$$(1+x) = \sum_{k=0}^{1} q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}x^k = 1 + q^{\frac{1(1-1)}{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}x^1 = 1+x.$$

Suponha que $n > k > 1$ é válida a igualdade

$$(1+x)(1+xq)(1+xq^2)\ldots(1+xq^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^{k,}$$

Observe que,

$$(1+x)(1+xq)(1+xq^2)\ldots(1+xq^{n-1})(1+xq^n)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k\right)(1+xq^n) \qquad (4)$$

Ou, seja o coeficiente de x^k em (4) é igual a $q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^n q^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} =$ $q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^n q^{\frac{(k-1)k-2(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} = q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{n-(k-1)} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} =$

$q^{\frac{k(k-1)}{2}} \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \right) = q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}$, de acordo com a proposição (2.2).

Portanto,

$$(1+x)(1+xq)(1+xq^2)\ldots(1+xq^{n-1})(1+xq^n) = \sum_{k=0}^{n+1} q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} x^{k,}$$

Corolário 4.1: Sejam $x, q \neq 1 \in \mathbb{R}$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{n} q^{j^2} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}.$$

Demonstração: Fazendo $x = zq$ na proposição 4.1 temos que:

$$(1+zq).(1+zq^2)\ldots(1+zq^n) =$$

$$= 1 + zq \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} + z^2q^3 \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} + z^3q^6 \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} + \cdots + z^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} z^j\, q^{\frac{j(j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (5)$$

De (5), temos que:

$$\sum_{j=0}^{2n} z^j\, q^{\frac{j(j+1)}{2}} \begin{bmatrix} 2n \\ j \end{bmatrix} = (1+zq).(1+zq^2)\ldots(1+zq^{2n})$$

$$= [(1+zq).(1+zq^2)\ldots(1+zq^n)].[(1+z.q^n.q).(1+z.q^n.q^n)] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} z^j\, q^{\frac{j(j+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} . \sum_{k=0}^{n} (zq^n)^k . q^{\frac{k(k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Comparando o coeficiente de z^n na igualdade dada em (6) temos:

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{n}q^{\frac{(n-k).(n-k+1)}{2}}\begin{bmatrix}n\\n-k\end{bmatrix}.q^{\frac{2nk+k(k+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}, \text{ou seja,}$$

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{n}q^{\frac{n^2-nk+n-kn+k^2-k}{2}}\begin{bmatrix}n\\n-k\end{bmatrix}.q^{\frac{2nk+k^2+k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}q^{\frac{n^2-2nk+n+k^2-k}{2}}.q^{\frac{2nk+k^2+k}{2}}\begin{bmatrix}n\\n-k\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}.$$

Ou ainda,

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{n}q^{\frac{n^2+n+2k^2}{2}}\begin{bmatrix}n\\n-k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$$

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{n}q^{\frac{n(n+1)}{2}}.q^{k^2}\begin{bmatrix}n\\n-k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$$

$$q^{\frac{n(n+1)}{2}}\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}=q^{\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{k=0}^{n}q^{k^2}\begin{bmatrix}n\\n-k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{n}q^{k^2}\begin{bmatrix}n\\n-k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{n}q^{k^2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{n}q^{k^2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\sum_{k=0}^{n}q^{k^2}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}^2.$$

Ao calcular o limite quando q tende a 1 na identidade do corolário (4.1) obtemos a célebre identidade que envolve relações entre coeficientes binomiais e, é um caso particular da Identidade de Vandermonde, também chamado de Teorema de Euler que consiste, para todo $m, n, r \in \mathbb{N}$,

$$\binom{m+n}{r}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{r-k},$$

Pois quando $m=r=n$,

$$\binom{2n}{n}=\binom{n+n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}^2.$$

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos a origem e as propriedades dos polinômios de Gauss ou coeficiente q-binomial, estabelecendo uma sólida relação com os coeficientes binomiais. Estes últimos, amplamente conhecidos e utilizados em combinatória, desempenham um papel fundamental na expansão de expressões do tipo$(a+b)^n$, onde a e b são números reais, e estão intrinsecamente ligados a combinações simples. Ao longo deste estudo, demonstramos a riqueza de identidades associadas aos coeficientes binomiais, seja por meio de métodos algébricos. Também apresentamos uma ideia de trabalhar com o coeficiente binomial de forma combinatória e algébrica. Apresentamos algumas propriedades dos polinômios de Gauss e que esses são funções polinomiais na variável q, com $q \neq 1$ e a expansão desses polinômios revelou coeficientes que carregam informações relevantes para problemas combinatórios pois estão associados ao coeficiente binomial que permite uma conexão entre conceitos algébricos e combinatórios no contexto do ensino. Uma propriedade notável que exploramos foi a relação estendida de Stifel, que permitiu a construção de um triângulo aritmético. Essa abordagem geométrica pode ser valiosa na resolução de problemas combinatórios e algébricos de maneira elegante, demonstrando como a Álgebra pode se unir à Análise Combinatória de forma eficaz. Em suma, este trabalho contribuiu para a compreensão da origem e das propriedades dos polinômios de Gauss, mostrando como eles se relacionam com os coeficientes binomiais e ampliam as possibilidades de abordagem combinatória, enriquecendo o ensino de matemática no Ensino Médio.

Referências

ANDREWS, George. E; ASKEY, Richard.; ROY, Ranjan. Special Functions Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Series Number 71. **Cambridge University Press**, Cambridge, 1999.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**.3. ed. São Paulo: E. Blucher,2010.

CORÉS, Fernando Cunha. **Argumentos combinatórios para identidades envolvendo números binomiais, de Fibonacci e de Lucas**, Dissertação (Mestrado) - UnB, Profmat, 2014

EVES, Howard Whitley. História da Matemática. São Paulo: E. Unicamp, 1996.

GOULD, H. W.; The The Bracket Function and Fontené-Ward Generalized Binomial Coefficients with Application to Fibonomial Coefficients**, Fibonacci Quarterly**, n. 1, p. 23-40, 1969. Disponível em http://www.fq.math.ca/7-1.html. Acesso em: 14 out. 2023.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Sociedade Brasileira de Matemática (Coleção Profmat). 3.ed. Rio de Janeiro: 2022.

HE-XIAO, Tian; SHANNON, G. Anthony; SHIUE, J. Peter. Some identities of Gaussian binomial coefficients. Annales Annales Mathematicae et Informaticae, 55. pp. 76-87. ISSN 1787-6117 (Online), 2022.

POLYA, George Collected Papers, Vols. I-IV. **MIT Press,** Cambridge, MA, 1984.

SANTOS, Plinio José.; MELLO, Margarida Pinheiro.; MURARI, Idani Therezinha. Calzolari. **Introdução à Análise Combinatória.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

TRAVASSOS, M.F. G. **Abordagem Algébrica e Combinatória para o Polinômio de Gauss.** 2017, 52f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal da Grande Dourados- Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias. – FACET, Dourados, MS, 2017.

Recebido em: 25 / 07 / 2023
Aprovado em: 05 / 12 / 2023